СПЕЦИАЛИСТ

Волькенштейн В. С.

СБОРНИК ЗАДАЧ по общему курсу ФИЗИКИ

- физические основы механики
- молекулярная физика и термодинамика
- электричество и магнетизм
- колебания и волны
- оптика
- физика атома

Волькенштейн В.С.

Решения к сборнику задач 1985 г.

Данный материал подготовлен порталом **ZZapomni.com** *исключительно в образовательных целях в помощь студентам ВУЗов при освоении курса физики.*

ОГЛАВЛЕНИЕ

Глава I. Физические основы механики

§ 1. Кинематика

1.1 Первую половину времени своего движения автомобиль двигался со скоростью v_1 = 80 км/ч, а вторую половину времени - со скоростью v_2 = 40 км/ч. Какова средняя скорость <v> движения автомобиля?

Решение

Средняя скорость определяется выражением: $\bar{v}=\frac{s}{t}$, где $s=s_1+s_2=v_1\frac{t}{2}+v_2\frac{t}{2}$, т.к. $t_1=t_2=\frac{t}{2}$. Т.е. $s=\frac{t}{2}(v_1+v_2)$, отсюда: $\bar{v}=\frac{t(v_1+v_2)}{2t}=\frac{v_1+v_2}{2}$, $\bar{v}=60$ км/ч.

1.2 Первую половину своего пути автомобиль двигался со скоростью v_1 = 80 км/ч, а вторую половину пути - со скоростью v_2 = 40 км/ч. Какова средняя скорость <v> движения автомобиля?

Решение

Средняя скорость определяется выражением: $\bar{v}=\frac{s}{t}$ – (1), где $t=t_1+t_2$; $s_1=s_2=\frac{s}{2}$. Тогда $t_1=\frac{s}{2v_1}$; $t_2=\frac{s}{2v_2}$, откуда $t=\frac{s(v_1+v_2)}{2v_1v_2}$ – (2). Подставляя (2) в (1), получим: $\bar{v}=\frac{s\cdot 2v_1v_2}{s(v_1+v_2)}=\frac{2v_1v_2}{v_1+v_2}$, $\bar{v}=\frac{2\cdot 80\cdot 40}{80+40}\approx 53{,}3$ км/ч.

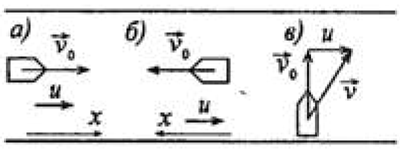
1.3 Пароход идет по реке от пункта *A* до пункта *B* со скоростью v_1 = 10 км/ч, а обратно - со скоростью v_2 = 16 км/ч. Найти среднюю скорость <v> парохода и скорость *u* течения реки.

Решение

Средняя скорость $\bar{v}=\frac{s}{t}$ – (1), где $t=t_1+t_2$, а $s_1=s_2=\frac{s}{2}$. Тогда $t_1=\frac{s}{2v_1}$ и $t_2=\frac{s}{2v_2}$, откуда $t=\frac{s(v_1+v_2)}{2v_1v_2}$ – (2). Подставляя (2) в (1), получим: $\bar{v}=\frac{s\cdot 2v_1v_2}{s(v_1+v_2)}=\frac{2v_1v_2}{v_1+v_2}$ или $\bar{v}=12{,}3$ км/ч. При движении вниз по течению $\bar{v}=v_1+u$, а при движении вверх по течению $\bar{v}=v_2-u$. Приравняем правые части уравнений и выразим u: $v_1+u=v_2-u$, $2u=v_2-v_1$, $u=\frac{v_2-v_1}{2}$; $u=3$ км/ч.

1.4 Найти скорость v относительно берега реки: а) лодки, идущей по течению; б) лодки, идущей против течения; в) лодки, идущей под углом $\alpha = 90°$ к течению. Скорость течения реки $u = 1$ м/с, скорость лодки относительно воды $v_0 = 2$ м/с.

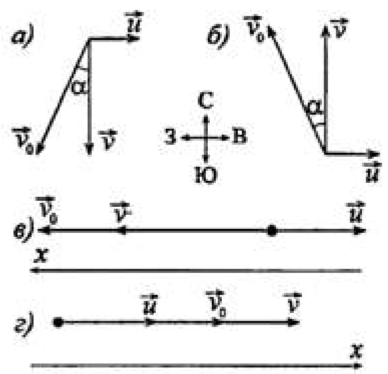
Решение



а) $\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{u}$, или в проекции на ось x: $v = v_0 + u = 3$ м/с. б) $\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{u}$, или в проекции на ось x: $v = v_0 - u = 1$ м/с. в) $\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{u}$, сложив вектора по правилу треугольников, получим: $v = \sqrt{v_0^2 + u^2} = \sqrt{4+1} = \sqrt{5} \approx 2{,}24$ м/с.

1.5 Самолет летит относительно воздуха со скоростью $v_0 = 800$ км/ч. Ветер дует с запада на восток со скоростью $u = 15$ м/с. С какой скоростью v самолет будет двигаться относительно земли и под каким углом α к меридиану надо держать курс, чтобы перемещение было: а) на юг; б) на север; в) на запад; г) на восток?

Решение



а) $\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{u}$, или в скалярном виде: $v_0 = \sqrt{v^2 - u^2}$. Подставляя числовые данные и учитывая, что $u = 15$ м/с $= 54$ км/ч, получаем $v_0 = 798$ км/ч. Из рисунка видно, что $v = v_0 \cos\alpha$; $\cos\alpha = v / v_0$; $\cos\alpha = 0{,}998$; $\alpha \approx 4°$. Курс на юго-запад.

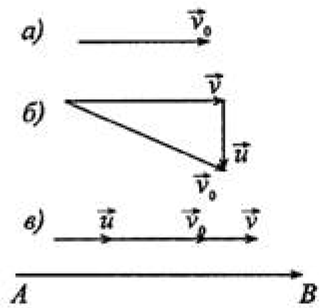
б) $\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{u}$, или в скалярном виде: $v_0 = \sqrt{v^2 - u^2}$ или $v_0 = 798$ км/ч. Поскольку $v = v_0 \cos\alpha$, то $\cos\alpha = v / v_0$; $\cos\alpha = 0{,}998$; $\alpha \approx 4°$. Курс на северо-запад.

в) $\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{u}$, или в проекции на ось x: $v = v_0 - u$; $v = 800 - 54 = 746$ км/ч. Курс на запад.

г) $\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{u}$, или в проекции на ось x: $v = v_0 + u$; $v = 800 + 54 = 854$ км/ч. Курс на восток.

1.6 Самолет летит от пункта A до пункта B, расположенного на расстоянии l = 300 км к востоку. Найти продолжительность t полета, если: а) ветра нет; б) ветер дует с юга на север; в) ветер дует с запада на восток. Скорость ветра u = 20 м/с, скорость самолета относительно воздуха v_0 = 600 км/ч?

Решение



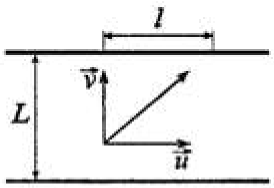
а) $t = \dfrac{l}{v_0}$; $t = 0{,}5$ ч;

б) $v_0^2 = \left(\dfrac{l}{t}\right)^2 + u^2$, отсюда найдем $t = \sqrt{\dfrac{l^2}{v_0^2 - u^2}}$ или $t = 0{,}504$ ч $= 30{,}2$ мин;

в) $t = \dfrac{l}{v_0 + u}$; $t = \dfrac{300}{672} = 0{,}45$ ч $= 26{,}8$ мин.

1.7 Лодка движется перпендикулярно к берегу со скоростью v = 7,2 км/ч. Течение относит ее на расстояние l = 150 м вниз по реке. Найти скорость u течения реки и время t, затраченное на переправу через реку. Ширина реки L = 0,5 км.

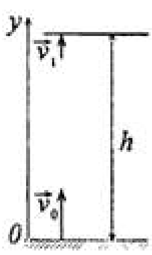
Решение



Движение лодки относительно реки выражается формулой: $L = vt$, откуда $t = \dfrac{L}{v} = 250$ с. За это же время t лодка переместилась относительно берега на расстояние l, причем скорость лодки относительно берега равна скорости реки, тогда $u = \dfrac{l}{t}$; $u = 0{,}6$ м/с.

1.8 Тело, брошенное вертикально вверх, вернулось на землю через время t = 3 с. Какова была начальная скорость v_0 тела и на какую высоту h оно поднялось?

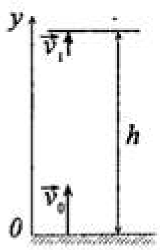
Решение



Запишем уравнения кинематики в проекциях на ось y: $y(t) = v_0 t - \dfrac{gt^2}{2}$ и $v(t) = v_0 - gt$. В наивысшей точке подъема имеем $y(t_1) = h$; $v(t_1) = 0$, т. е. $h = v_0 t_1 - gt_1^2/2$ и $0 = v_0 - gt_1$, где $t_1 = \dfrac{t}{2}$ — время подъема. Откуда $v_0 = gt_1$, $v_0 = \dfrac{gt}{2}$, $h = gt_1^2 - \dfrac{gt_1^2}{2} = \dfrac{gt_1^2}{2}$; $h = \dfrac{gt^2}{8}$. Подставляя числовые данные, получим $v_0 = 14{,}7$ м/с; $h \approx 11$ м.

1.9 Камень бросили вертикально вверх на высоту $h_0 = 10$ м. Через какое время t он упадет на землю? На какую высоту h поднимется камень, если начальную скорость камня увеличить вдвое?

Решение



Воспользуемся решением задачи 1.8 и запишем систему уравнений:

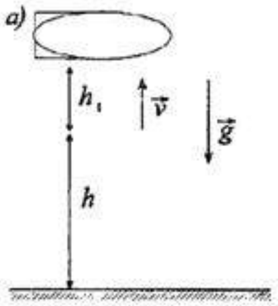
$$\begin{cases} h_0 = v_0 t_1 - \dfrac{qt_1}{2} & —(1), \\ 0 = v_0 - qt_1 & —(2), \\ t = 2t_1 & —(3), \end{cases} \text{ откуда } \begin{cases} v_0 = \dfrac{qt}{2} & —(4), \\ h_0 = \dfrac{qt^2}{8} & —(5). \end{cases}$$

Тогда из (5) $t = \sqrt{\dfrac{8h_0}{g}}$, отсюда $t = 2.9$ с. Из (2) $t_1 = \dfrac{v_0}{g}$. Следовательно, если v_0 увеличится в 2 раза, время подъема также увеличится в 2 раза. Из (1) $h = 2v_0 \cdot 2t_1 - \dfrac{q4t_1^2}{2}$;

$h = 4\left(v_0 t_1 - \dfrac{qt_1^2}{2}\right) = 4h_0 = 40$ м.

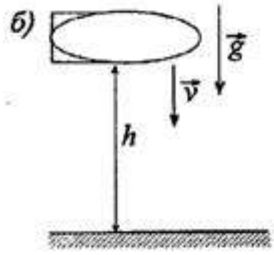
1.10 С аэростата, находящегося на высоте $h = 300$ м, упал камень. Через какое время t камень достигнет земли, если: а) аэростат поднимается со скоростью $v = 5$ м/с; б) аэростат опускается со скоростью $v = 5$ м/с; в) аэростат неподвижен?

Решение



Решаем задачу относительно неподвижной системы отсчета — земли. Тогда скорость камня в начальный момент времени относительно земли $\vec{v}_{отн}$ равна сумме скоростей: камня относительно аэростата $\vec{v}_{отн} = 0$ и скорости v аэростата относительно земли, т.е. $\vec{v}_{отн} = 0 + \vec{v}$. Таким образом, при $t = 0$ скорость камня равна скорости аэростата. В первый момент времени камень, имея начальную скорость v, полетит вверх и за время t_1 поднимется на высоту $h_1 = \dfrac{gt_1^2}{2}$ — (1) (см задачу 1.8). Остановившись в верхней точке, он полетит вниз и за время t_2 преодолеет расстояние $h + h_1 = \dfrac{gt_2^2}{2}$ — (2). Общее время $t = t_1 + t_2$ — (3). При движении вверх скорость $v = gt_1$, откуда $t_1 = \dfrac{v}{g}$ — (4). Подставив (4) в (1), получим $h_1 = \dfrac{v^2}{(2g)}$. Преобразуем уравнение (2): $h + \dfrac{v^2}{2g} = \dfrac{gt_2^2}{2}$.

Отсюда $t_2 = \dfrac{\sqrt{2gh + v^2}}{g}$ — (5). Подставив (4) и (5) в (3), получим $t = \dfrac{\left(v + \sqrt{2gh + v^2}\right)}{g}$; $t \approx 8.4$ с.

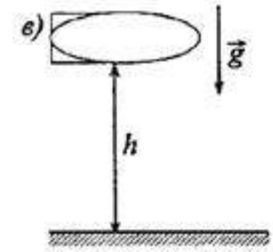


Уравнение движения камня:

$$h = vt + \frac{gt^2}{2} \quad \text{или} \quad \frac{gt^2}{2} + vt - h = 0.$$

Решим квадратное уравнение относительно t: $D = v^2 + 2gh$;

$t = \left(-v \pm \sqrt{v^2 + 2gh}\right)/g$. Величина t должна быть положительна, следовательно: $t \approx 7{,}3$ с.

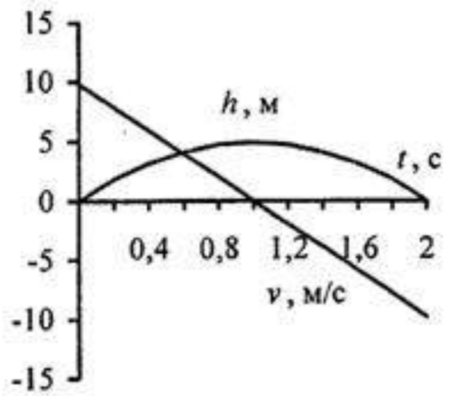


Уравнение движения камня: $h = \dfrac{gt^2}{2}$,

откуда $t = \sqrt{2h/g}$, $t \approx 7{,}8$ с.

1.11 Тело брошено вертикально вверх с начальной скоростью $v_0 = 9{,}8$ м/с. Построить график зависимости высоты h и скорости v от времени t для интервала $0 \le t \le 2$ с через 0,2 с.

Решение



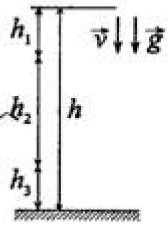
Зависимость скорости и высоты от времени выражается следующими формулами: $v = v_0 - gt$; $h = v_0 t - \dfrac{gt^2}{2}$. Для заданного интервала составим таблицу и построим график.

t, с	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1	1,2	1,4	1,6	1,8	2
V, м/с	9,8	7,8	5,9	3,9	2,0	0	-2,0	-3,9	-5,9	-7,8	-9,8
H, м	0	1,8	3,1	4,1	4,7	4,9	4,7	4,1	3,1	1,8	0

1.12 Тело падает с высоты h = 19,6 м с начальной скоростью v_0 = 0. Какой путь пройдет тело за первую и последнюю 0,1с своего движения?

Решение

За первую 0,1 с движения тело пройдет путь $h_1 = gt_1^2/2$; $h_1 = 0{,}049$ м. Весь путь $h = gt^2/2$ тело пройдет за время $t = \sqrt{\dfrac{2h}{g}}$; $t = \sqrt{\dfrac{2\cdot 19{,}6}{9{,}8}} = 2$ с.



За последнюю 0,1 с движения тело пройдет путь $h_3 = h - h_2$, где h_2 — путь, пройденный телом за время $t_2 = t - 0{,}1$. Так как $h_2 = \dfrac{gt_2^2}{2}$, $h_2 = \dfrac{g(t-0{,}1)^2}{2}$, то путь $h_3 = h - \dfrac{g(t-0{,}1)^2}{2}$;

$h_3 = 19{,}6 - \dfrac{9{,}8(2-0{,}1)^2}{2} = 1{,}9$ м.

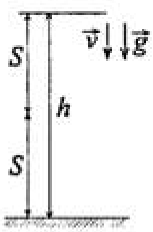
1.13 Тело падает с высоты h = 19,6м с начальной скоростью v_0 = 0. За какое время тело пройдет первый и последний 1 м своего пути?

Решение

Первый 1 м пути тело пройдет за время $t_1 = \sqrt{\dfrac{2h_1}{g}}$, где h_1=1м, таким образом $t_1 = \sqrt{\dfrac{2\cdot 1}{9{,}8}} = 0{,}45$ с. Общее время падения $t = \sqrt{\dfrac{2h}{g}}$; $t = \sqrt{\dfrac{2\cdot 19{,}6}{9{,}8}} = 2$ с. Последний 1 м своего пути тело пройдет за время $t_3 = t - t_2$, где t_2 — время прохождения пути $h_2 = h - h_3$, а $h_3 = 1$ м. Т.к. $t_2 = \sqrt{\dfrac{2h_2}{g}}$, $t_2 = \sqrt{\dfrac{2(h-h_1)}{g}}$ то время $t_3 = t - \sqrt{\dfrac{2(h-h_1)}{g}}$; $t_3 = 0{,}05$ с.

1.14 Свободно падающее тело в последнюю секунду движения проходит половину всего пути. С какой высоты h падает тело и каково время t его падения?

Решение

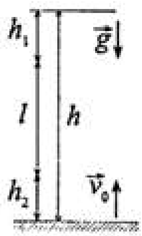


Обозначим половину пути за S, тогда $h = 2S$ — (1). Уравнение движения тела: $h = gt^2/2$ — (2). Вторая половина пути $S = vt_2 + \frac{gt_2^2}{2}$, где $v = g(t - t_2)$; $t_2 = 1$с. Тогда $S = gt_2(t - t_2) + gt_2^2/2$ или, с учетом (1), $h = 2gt_2(t - t_2) + gt_2^2$ — (3). Приравняем (2) и (3): $\frac{gt^2}{2} = 2gt_2(t - t_2) + gt_2^2$. Умножив обе части уравнения на 2, разделив на g и раскрыв скобки, получим: $t^2 = 4t_2t - 4t_2^2 + 2t_2^2$. Для удобства вычислений подставим значение t_2: $t^2 - 4t + 2 = 0$. Решим квадратное уравнение. $D = 8$; $t = \frac{4 \pm \sqrt{8}}{2}$; значение $t = 0{,}6$ — не соответствует условию задачи, тогда $t = 3{,}4$ с; $h = 5 \cdot 3{,}4^2 = 57$ м.

1.15 Тело 1 брошено вертикально вверх с начальной скоростью v_0, тело 2 падает с высоты h без начальной скорости. Найти зависимость расстояния l между телами 1 и 2 от времени t, если известно, что тела начали двигаться одновременно.

Решение

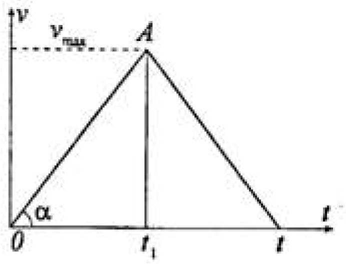
Пусть тела 1 и 2 одинаковы, тогда время движения тела 1 до верхней точки подъема равно времени падения тела 2. Путь, пройденный телом 1: $h_1 = v_0t - gt^2/2$ — (1); путь, пройденный телом 2 : $h_2 = gt^2/2$ — (2). Расстояние между телами $l = h - (h_1 + h_2)$. Сложив (1) и (2), получим $h_1 + h_2 = v_0t$, тогда $l = h - v_0t$.



1.16 Расстояние между двумя станциями метрополитена l = 1,5 км. Первую половину этого расстояния поезд проходит равноускоренно, вторую - равнозамедленно с тем же по модулю ускорением. Максимальная скорость поезда v = 50 км/ч. Найти ускорение a и время t движения поезда между станциями.

Решение

$l/2 = at_1^2/2$ — при равноускоренном движении поезда. $l/2 = vt_2 - at_2^2/2$ — при его равнозамедленном движении. Общее время движения $t = t_1 + t_2$. Максимальная скорость $v = at_1 = at_2$, следовательно $t_1 = t_2$. Весь путь $l = \frac{at_1^2}{2} + vt_1 - \frac{at_2^2}{2}$. Отсюда $t_1 = \frac{l}{v}$; $v = 50$ км/ч $= 13{,}9$ м/с; $t_1 = 108$ с $= 1{,}8$ мин; $t = 3{,}6$ мин. $a = \frac{v}{t_1}$; $a = 0{,}13$ м/с^2.



Для решения данной задачи можно также воспользоваться графическим методом. Построим график зависимости скорости поезда от времени. Путь равен площади под кривой или сумме площадей треугольников $0At_1$ и t_1At. Таким образом $l = v_{max}t_1/2 + v_{max}t_2/2$;

$l = \frac{1}{2}v_{max}(t_1 + t_2)$; $l = \frac{1}{2}v_{max}t$. Откуда $t = \frac{2l}{v_{max}} \approx 3{,}6$ мин;

$a = tg\alpha = \frac{v_{max}}{t/2} \approx 0{,}13$ м/с^2.

1.17 Поезд движется со скоростью v_0 = 36 км/ч. Если выключить ток, то поезд, двигаясь равнозамедленно, остановится через время t = 20 с. Каково ускорение a поезда? На каком расстоянии s до остановки надо выключить ток?

Решение

Уравнение пути в проекции на направление движения: $s = v_0t - at^2/2$. Уравнение скорости: $v = v_0 - at$. Т.к. $v = 0$, то $a = v_0/t$; $v_0 = 36$ км/ч $= 10$ м/с; $a = -0{,}5$ м/с^2; $s = 100$ м.

1.18 Поезд, двигаясь равнозамедленно, в течение времени t = 1 мин уменьшает свою скорость от v_1 = 40 км/ч до v_2 = 28км/ч. Найти ускорение a поезда и расстояние S, пройденное им за время торможения.

Решение

Уравнение скорости: $v_2 = v_1 - at$, откуда ускорение $a = \frac{v_1 - v_2}{t} = 0{,}055$ м/с^2. Путь $s = v_1t - \frac{at^2}{2}$; $s = 567$ м.

1.19 Поезд движется равнозамедленно, имея начальную скорость v_0 = 54 км/ч и ускорение a = -0,5 м/с^2. Через какое время t и на каком расстоянии s от начала торможения поезд остановится?

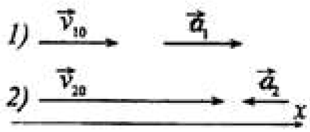
Решение

Уравнение скорости при равнозамедленном движении: $v = v_0 - at$ — (1). Поскольку по условию ускорение уже дано со знаком «–», то из уравнения (1), с учетом $v = 0$, имеем $v_0 = at$, отсюда $t = \frac{v_0}{a}$, где $v_0 = 54$ км/ч $= 15$ м/с. Подставляя числовые данные, получим $t = 30$ с. Путь, с учетом $a < 0$, найдем по формуле $S = v_0 t - at^2/2$; $S = 225$ м.

1.20 Тело 1 движется равноускоренно, имея начальную скорость v_{10} и ускорение a_1. Одновременно с телом 1 начинает двигаться равнозамедленно тело 2, имея начальную скорость v_{20} и ускорение a_2. Через какое время t после начала движения оба тела будут иметь одинаковую скорость?

Решение

Для первого тела $v = v_{10} + a_1 t$.
Для второго тела $v = v_{20} - a_2 t$.
Следовательно

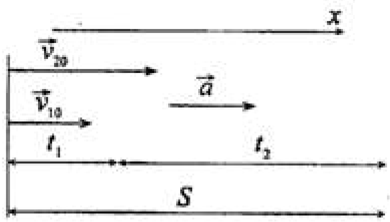


$v_{10} + a_1 t = v_{20} - a_2 t$, откуда $t = \frac{v_{20} - v_{10}}{a_1 + a_2}$; $v_{20} > v_{10}$, т.к. $t > 0$.

1.21 Тело 1 движется равноускоренно, имея начальную скорость v_{10} = 2 м/с И ускорение a. Через время t = 10с после начала движения тела 1 из этой же точки начинает двигаться равноускоренно тело 2, имея начальную скорость v_{20} = 12 м/с и то же ускорение a. Найти ускорение a, при котором тело 2 сможет догнать тело 1.

Решение

Пусть t — время от начала движения первого тела до встречи, t_1 — время, в течение которого двигалось только тело 1 ($t_1 = 10$ с), t_2 — время от начала движения



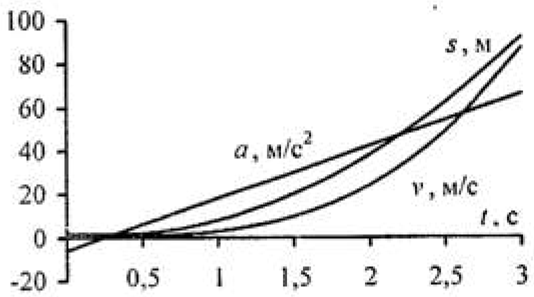
второго тела до встречи; $t = t_1 + t_2$. Путь, который тела пройдут до встречи: $S = v_{10} t + at^2/2$ — (1); $S = v_{20} t_2 + a t_2^2/2$ — (2). Приравняем правые части (1) и (2). $v_{10} + a(t_1 + t_2) = v_{20} + a t_2$, отсюда $a = (v_{20} - v_{10})/t_1$; $a = 1$ м/с^2.

1.22 Зависимость пройденного телом пути s от времени t дается уравнением $s=At-Bt^2+Ct^3$, где A = 2 м/с, B = 3 м/с^2 и C = 4 м/с^3. Найти: а) зависимость скорости v и ускорения a от времени t; б) расстояние s, пройденное телом, скорость v и ускорение a тела через время t = 2 с после начала движения. Построить график зависимости пути s, скорости v и ускорения a от времени t для интервала $0 \le t \le 3$ с через 0,5с.

Решение

а) Скорость тела $v = dS/dt$; $v = A - 2Bt + 3Ct^2$; $v = 2 - 6t + 12t^2$ м/с. Ускорение тела $a = dv/dt = -2B + 6Ct$; $a = -6 + 24t$ м/с^2.

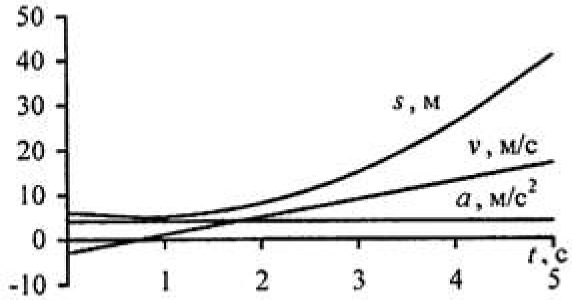
б) Расстояние, пройденное телом, $s = 2t - 3t^2 + 4t^3$. Тогда через время $t = 2$ с имеем $s = 24$ м; $v = 38$ м/с; $a = 42$ м/с^2.



1.23 Зависимость пройденного телом пути s от времени t задается уравнением $s=A-Bt+Ct^2$, где a = 6 м, B = 3 м/с и C = 2 м/с^2. Найти среднюю скорость $\langle v \rangle$ и среднее ускорение $\langle a \rangle$ тела для интервала времени $1 \le t \le 4$с. Построить график зависимости пути s, скорости v и ускорения a от времени t для интервала $0 \le t \le 5$с через 1с.

Решение

Средняя скорость тела определяется соотношением $\bar{v} = \dfrac{\Delta s}{\Delta t}$. По условию $s = A - Bt + Ct^2$, тогда при $t_1 = 1$ с имеем $s_1 = 5$; при $t_2 = 4$ с имеем $s_2 = 26$. Отсюда $\bar{v} = 7$ м/с. Среднее ускорение $\bar{a} = \Delta\bar{v}/\Delta t$. Поскольку $v = s' = -B + 2Ct^2$, то $v_1 = 1$, $v_2 = 13$, отсюда $\bar{a} = 4$ м/с^2.



1.24 Зависимость пройденного телом пути s от времени t дается уравнением $s=A+Bt+Ct^2$, где A = 3 м, B = 2 м/с и C = 1 м/с^2. Найти среднюю скорость $\langle v\rangle$ и среднее ускорение $\langle a\rangle$ тела за первую, вторую и третью секунды его движения.

Решение

Средняя скорость $\bar{v}=\frac{\Delta s}{\Delta t}$. Пусть $t_0=0$; $t_1=1$ с; $t_2=2$ с; $t_3=3$ с. Тогда $\Delta s_1=s_1-s_0=(3+2t_1+t_1^2)-(3+2t_0+t_0^2)$; $\Delta s_1=2t_1+t_1^2$; $\bar{v}_1=\frac{\Delta s_1}{\Delta t_1}=\frac{2t_1+t_1^2}{t_1-t_0}=3$ м/с. Далее, $\Delta s_2=s_2-s_1$; $\Delta s_2=(3+2t_2+t_2^2)-(3+2t_1+t_1^2)=2(t_2-t_1)+t_2^2-t_1^2$; $\bar{v}_2=\frac{\Delta s_2}{\Delta t_2}$

$\bar{v}_2=\frac{2(t_2-t_1)+t_2^2-t_1^2}{t_2-t_1}=5$ м/с. Аналогично для $\bar{v}_3=\frac{\Delta s_3}{\Delta t_3}$; $\bar{v}_3=\frac{2(t_3-t_2)+t_3^2-t_2^2}{t_3-t_1}=7$ м/с. Среднее ускорение $\bar{a}=\frac{\Delta v}{\Delta t}$.

Поскольку $v=\frac{dS}{dt}=B+2Ct$, то $v_0=B+2Ct_0=2$ м/с; $v_0=B+2Ct_0=2$ м/с; $v_2=B+2Ct_2=6$ м/с; $v_3=8$ м/с. Тогда $\bar{a}_1=\frac{v_1-v_0}{t_1-t_0}=2$ м/с^2; $\bar{a}_2=\frac{v_2-v_1}{t_2-t_1}=2$ м/с^2; $\bar{a}_3=\frac{v_3-v_2}{t_3-t_2}$; $\bar{a}_3=2$ м/с^2.

1.25 Зависимость пройденного телом пути s от времени t дается уравнением $s=A+Bt+Ct^2+Dt^3$, где C = 0,14 м/с^2 и D = 0,01 м/с^3. Через какое время t тело будет иметь ускорение a = 1 м/с^2? Найти среднее ускорение $\langle a\rangle$ тела за этот промежуток времени.

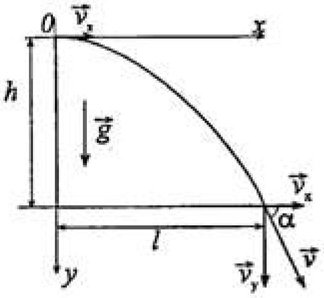
Решение

Мгновенная скорость $v=\frac{dS}{dt}$. Ускорение $a=\frac{d^2S}{dt^2}$. Имеем $\frac{dS}{dt}=v=B+2Ct+3Dt^2$; $\frac{d^2S}{dt^2}=2C+6Dt$. Таким образом $a=2C+6Dt$, откуда $t=a-2C/6D$; $t=12$ с. Среднее ускорение $\bar{a}=\Delta v/\Delta t$. Поскольку $v=B+2Ct+3Dt^2$, то можно найти $\Delta v=v_1-v_0$; $\Delta t=t_1-t_0$, где $t_1=12$ с, $t_0=0$. $v_0=B+2Ct_0+3Dt_0^2$; $v_1=B+2Ct_1+3Dt_1^2$, отсюда $\Delta v=2C\times$ $\times(t_1-t_0)+3D(t_1^2-t_0^2)$; $\bar{a}=\frac{2C(t_1-t_0)+3D(t_1^2-t_0^2)}{t_1-t_0}$; $\bar{a}=2C+$ $+3D(t_1-t_0)$; $\bar{a}=0{,}64$ м/с^2.

1.26 С башни высотой h = 25 м горизонтально брошен камень со скоростью v_x = 15 м/с. Какое время t камень будет в движении? На каком расстоянии l от основания башни он упадет на землю? С какой скоростью v он упадет на землю? Какой угол φ составит траектория камня с горизонтом в точке его падения на землю?

Решение

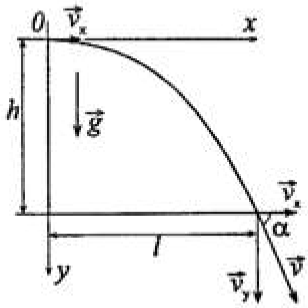
Перемещение камня по вертикали $S_y = h = gt^2/2$ — (1), по горизонтали $S_x = l = v_x t$ — (2). Из уравнения (1): $t = \sqrt{2h/g}$; $t = 2{,}26$ с. Из уравнения (2): $l = v_x t$; $l = 33{,}9$ м. Скорость камня $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$. Вертикальная составляющая скорости $v_y = gt$, следовательно, $v = \sqrt{v_x^2 + (gt)^2}$. Искомый угол φ — угол между направлениями вектора скорости $\vec{v}$ и вектора ее горизонтальной составляющей $\vec{v}_x$. Из рисунка видно, что $cos\,\varphi = v_x / v$; $cos\,\varphi = \dfrac{v_x}{\sqrt{v_x^2 + (gt)^2}}$; $cos\,\varphi = 0{,}56$; $\varphi \approx 56°$.



1.27 Камень, брошенный горизонтально, упал на землю через время t = 0,5 с на расстоянии l = 5 м по горизонтали от места бросания. С какой высоты h брошен камень? С какой скоростью v_x он брошен? С какой скоростью он упадет на землю? Какой угол φ составит траектория камня с горизонтом в точке его падения на землю?

Решение

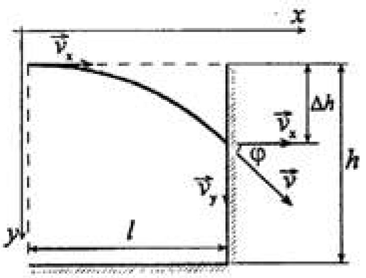
Перемещение камня по вертикали $S_y = h = gt^2/2$ — (1), по горизонтали $S_x = l = v_x t$ — (2). Из уравнения (1)



$h = gt^2/2$; $h = 1{,}22$ м Из уравнения (2) имеем $v_x = l/t$; $v_x = 10$ м/с. Скорость при падении на землю $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$, где $v_y = gt$; $v = \sqrt{v_x^2 + (gt)^2}$, т.е. $v \approx 11{,}1$ м/с. Искомый угол φ — угол между вектором скорости v и вектором ее горизонтальной составляющей $\vec{v}_x$. Из рисунка видно, что $cos\,\varphi = \dfrac{v_x}{v}$; $cos\,\varphi = 0{,}9$; $\varphi \approx 26°$.

1.28 Мяч, брошенный горизонтально, ударяется о стенку, находящуюся на расстоянии l = 5 м от места бросания. Высота места удара мяча о стенку на Δh = 1 м меньше высоты h, с которой брошен мяч. С какой скоростью v_x брошен мяч? Под каким углом φ мяч подлетает к поверхности стенки?

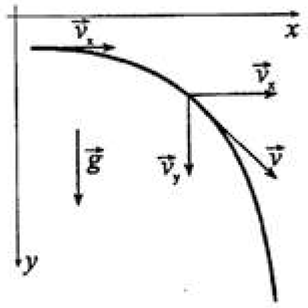
Решение



Перемещение мяча по вертикали $S_y = h = \frac{gt^2}{2}$ — (1), по горизонтали $S_x = l = v_x \times$ $\times t$ — (2). $\cdot$ $v_y = gt$; $v_x = l/t$. Из уравнения (1) получим $t = \sqrt{2\Delta h/g}$. Горизонтальная составляющая скорости $v_x = l\sqrt{g}/\sqrt{2\cdot\Delta h}$; $v_x = 11{,}1$ м/с. Вертикальная составляющая скорости $v_y = g\sqrt{2\Delta h/g}$; $v_y = \sqrt{2g\Delta h}$. Из рисунка видно, что $tg\varphi = \frac{v_x}{v_y} = \frac{l}{2\Delta h}$; $tg\varphi = 2{,}5$; $\varphi \approx 68°$.

1.29 Камень, брошенный горизонтально, через время t = 0,5 с после начала движения имел скорость v, в 1,5 раза большую скорости v_x в момент бросания. С какой скоростью v_x был брошен камень?

Решение



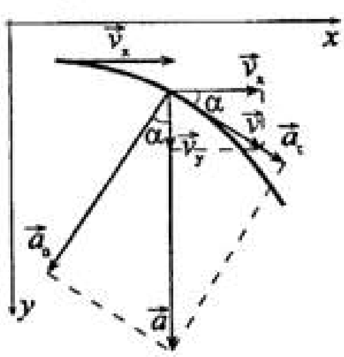
Скорость камня $\vec{v}$ можно разложить на вертикальную $\vec{v}_y$ и горизонтальную $\vec{v}_x$ составляющие. По абсолютной величине $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$ — (1), где $v_y = gt$. По условию $v = 1{,}5v_x$, тогда из уравнения (1): $v_x = \sqrt{v^2 - v_y^2} =$

$= \sqrt{(1{,}5v_x)^2 - (gt)^2}$ — (2). Решая уравнение (2), найдем: $v_x^2 = 2{,}25\cdot v_x^2 - (gt)^2$; $1{,}25v_x^2 = (gt)^2$; $v_x = \frac{gt}{\sqrt{1{,}25}}$; $v_x = 4{,}47$ м/с.

1.30 Камень брошен горизонтально со скоростью v_x = 15 м/с. Найти нормальное a_n и тангенциальное a_τ ускорения камня через время t = 1 с после начала движения.

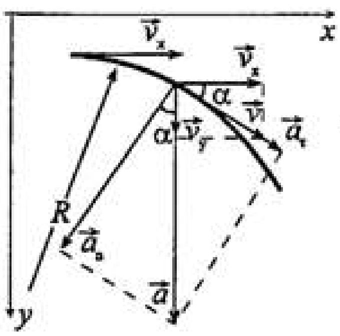
Решение

Полное ускорение камня $a = g$; $a = \sqrt{a_n^2 + a_\tau^2}$. Полная скорость $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$. Из рисунка видно, что $\cos\alpha = v_x / v = a_n / g$; $\sin\alpha = v_y / v$; $\sin\alpha = a_\tau / g$. Тогда $a_n = g v_x / v$; $a_n = g v_x / \sqrt{v_x^2 + g^2 t^2}$; $a_\tau = g v_y / v$; $a_\tau = g^2 t / \sqrt{v_x^2 + g^2 t^2}$; $a_n \approx 8{,}2$ м/с^2, $a_\tau \approx 5{,}4$ м/с^2.



1.31 Камень брошен горизонтально со скоростью v_x = 10 м/с. Найти радиус кривизны R траектории камня через время t = 3 с после начала движения.

Решение



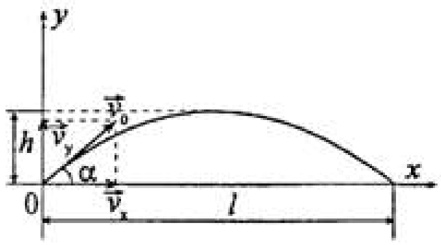
Нормальное ускорение камня $a_n = \dfrac{v^2}{R}$ — (1); из рисунка видно, что $a_n = g\sin\alpha$ — (2). Из уравнения (1) $R = \dfrac{v^2}{a_n}$, где $v = \sqrt{v_y^2 + v_x^2}$. Кроме того, $\sin\alpha = \dfrac{v_x}{\sqrt{v_y^2 + v_x^2}}$; $v_y = gt$. Сделав соответствующие подстановки, получим

$$R = \frac{\left(v_y^2 + v_x^2\right)\cdot\left(\sqrt{v_y^2 + v_x^2}\right)}{v_x g} = \frac{\left((gt)^2 + v_x^2\right)\cdot\left(\sqrt{(gt)^2 + v_x^2}\right)}{v_x g};$$

$R = 305$ м.

1.32 Мяч брошен со скоростью V_0=10 м/с под углом α = 40° к горизонту. На какую высоту h поднимется мяч? На каком расстоянии l от места бросания он упадет на землю? Какое время t он будет в движении?

Решение



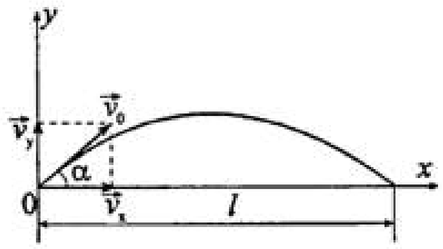
Перемещение мяча по вертикали $S_y = (v_0 \sin\alpha) \cdot t - gt^2/2$ — (1). Вертикальная составляющая скорости $v_y = v_0 \sin\alpha - gt$ — (2). Перемещение мяча по горизонтали $S_x = (v_0 \cos\alpha)t$ — (3). В момент времени $t = t_1$ имеем $S_y = h$, $v_y = 0$, следовательно, из (2) получим $v_0 \sin\alpha = gt_1$ — (4), из (1): $h = (v_0 \sin\alpha) \cdot t_1 - gt_1^2/2$ — (5). Выразив из (4) t_1 и подставив в (5), получим: $t_1 = \frac{v_0 \sin\alpha}{g}$;

$$h = \frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{g} - \frac{gv_0^2 \sin^2\alpha}{2g^2} = \frac{v_0^2 - \sin^2\alpha}{2g};$$ $h \approx 2$ м. В момент времени $t = 2t_1$ имеем $S_x = l$. Тогда $t = \frac{2v_0 \sin\alpha}{g}$ — (6) — полное время полета мяча; $t \approx 1{,}3$ с. Из уравнения (3) $l = (v_0 \cos\alpha) \cdot t$; $l \approx 10$ м.

1.33 На спортивных состязаниях в Ленинграде спортсмен толкнул ядро на расстояние l_1 = 16,2 м. На какое расстояние l_2 полетит такое же ядро в Ташкенте при той же начальной скорости и при том же угле наклона ее к горизонту? Ускорение свободного падения в Ленинграде g_1 = 9,819 м/с^2, в Ташкенте g_2 = 9,801 м/с2.

Решение

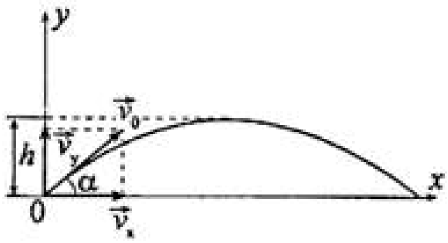
Воспользуемся формулой (6), полученной в предыдущей задаче: $t = \frac{2v_0 \sin\alpha}{g}$.



Перемещение ядра по горизонтали $s_x = l = (v_0 \cos\alpha) \cdot t$. Подставив выражение для t, получим: $s_x = \frac{2v_0^2 \cos\alpha \sin\alpha}{g} = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}$. Тогда $l_1 = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g_1}$; $l_2 = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g_2}$. Отсюда отношение $\frac{l_1}{l_2} = \frac{g_2}{g_1}$, или $l_2 = \frac{l_1 g_1}{g_2} = \frac{16{,}2 \cdot 9{,}819}{9{,}801} = 16{,}23$ м.

1.34 Тело брошено со скоростью v_0 под углом к горизонту. Время полета t = 2,2 с. На какую высоту h поднимется тело?

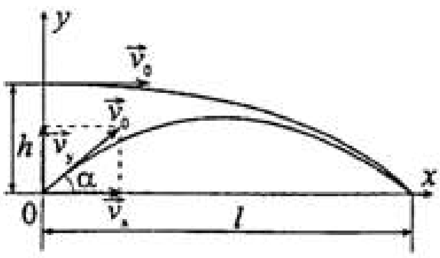
Решение



Перемещение по вертикали $S_y = (v_0 \sin\alpha)\cdot t - \frac{gt^2}{2}$ — (1). Обозначим t_1 — время подъема тела на высоту h. Тогда из (1) получим $h = v_0 \sin\alpha \cdot t_1 - \frac{gt_1^2}{2}$. В верхней точке $v_y = 0$, но $v_y = v_0 \sin\alpha - gt_1$, следовательно, $v_0 \sin\alpha = gt_1$. Тогда $h = gt_1^2 - \frac{gt_1^2}{2} = \frac{gt_1^2}{2}$. Поскольку $t_1 = \frac{t}{2}$, то $h = \frac{gt^2}{8}$; $h = \frac{9{,}8 \cdot 2{,}2^2}{8} = 5{,}9$ м.

1.35 Камень, брошенный со скоростью v_0 = 12 м/с под углом α = 45° к горизонту, упал на землю на расстоянии l от места бросания. С какой высоты h надо бросить камень в горизонтальном направлении, чтобы при той же начальной скорости v_0 он упал на то же место?

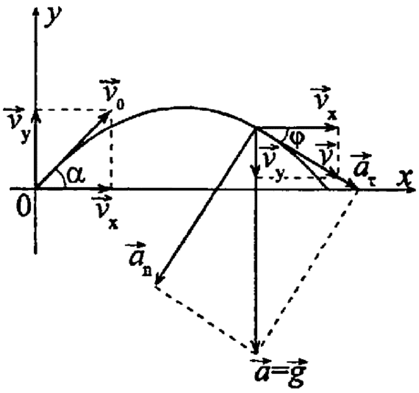
Решение



Если камень брошен под углом к горизонту, $l = v_0 \cos\alpha t_1$ — (1), где $t_1 = \frac{2v_0 \sin\alpha}{g}$ (см. задачу 1.32.). Во втором случае $l = v_0 t_2$. Подставив выражение для t_1 в (1), получим $l = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}$, откуда $t_2 = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{gv_0} = \frac{v_0 \sin 2\alpha}{g}$. Высота, с которой нужно бросить камень, $h = \frac{gt_2^2}{2} = \frac{gv_0^2 \sin^2 2h}{2g^2} = \frac{v_0^2 \sin^2 2\alpha}{2g}$; $h = \frac{144 \cdot 1}{2 \cdot 9{,}8} = 7{,}3$ м.

1.36 Тело брошено со скоростью $v_0 = 14{,}7$ м/с под углом $\alpha = 30°$ к горизонту. Найти нормальное a_n и тангенциальное a_τ ускорения тела через время $t = 1{,}25$ с после начала движения.

Решение

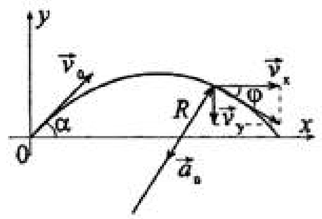


Найдем время, за которое тело поднимется до верхней точки траектории. Вертикальная составляющая скорости $v_y = v_0 \sin\alpha - gt_1$. В верхней точке $v_y = 0$, следовательно, $v_0 \sin\alpha = gt_1$, откуда $t_1 = \frac{v_0 \sin\alpha}{g}$; $t_1 = 0{,}75$ с, т.е. при $t = 1{,}25$ с тело находится уже на спуске; таким образом можно представить, что тело бросили горизонтально со скоростью $v_x = v_0 \cos\alpha$, и нужно найти a_n и a_τ через время $t_2 = t - t_1 = 0{,}5$ с. Изобразим треугольник ускорений и совместим его с треугольником скоростей. Тангенциальное ускорение a_τ направлено по касательной, так же, как вектор $\vec{v}$, $\vec{a}_n \perp \vec{a}_\tau$, полное ускорение — ускорение свободного падения. Из рисунка видно, что $\cos\varphi = v_x / v = a_n / g$; $\sin\varphi = \frac{v_x}{v} = \frac{a_\tau}{g}$; отсюда $a_n = g\frac{v_x}{v}$; $a_\tau = g\frac{v_y}{v}$. Полная скорость тела $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{(v_0 \cos\alpha)^2 + (gt_2)^2}$, тогда $a_n = g\frac{v_0 \cos\alpha}{\sqrt{(v_0 \cos\alpha)^2 + (gt_2)^2}}$;

$a_\tau = g\frac{gt_2}{\sqrt{(v_0 \cos\alpha)^2 + (gt_2)^2}}$. Подставив числовые значения, получим $a_n = 9{,}15$ м/с^2; $a_\tau = 3{,}52$ м/с^2.

1.37 Тело брошено со скоростью v_0 = 10 м/с под углом α = 45° к горизонту. Найти радиус кривизны R траектории тела через время t = 1 с после начала движения.

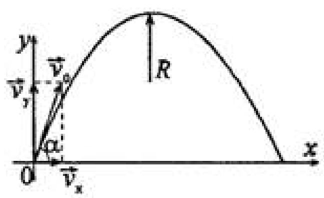
Решение



Найдем время, за которое тело поднимется до верхней точки траектории. Вертикальная составляющая его скорости $v_y = v_0 \sin\alpha - gt_1$. В верхней точке траектории $v_y = 0$, следовательно, $v_0 \sin\alpha = gt_1$, откуда $t_1 = \frac{v_0 \sin\alpha}{g}$; $t_1 = 0{,}7$ с, т.е. при $t = 1$ с тело находится уже на спуске, таким образом можно представить, что тело бросили горизонтально со скоростью $v_x = v_0 \cos\alpha$. Нормальное ускорение тела $a_n = \frac{v^2}{R}$, где $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$. Из рисунка видно, что $a_n = g \sin\varphi$; $\sin\varphi = \frac{v_x}{\sqrt{v_x^2 + v_y^2}}$. Тогда $a_n = g\frac{v_x}{\sqrt{v_x^2 + v_y^2}}$ и $R = \frac{v^2}{a_n} = \frac{\left(v_x^2 + v_y^2\right)\sqrt{v_x^2 + v_y^2}}{v_x g}$. Вычислим отдельно v_x и v_y: $v_x = v_0 \cos\alpha = 5\sqrt{2}$ м/с; $v_y = g\left(t - t_1\right) = 3$ м/с. Подставив числовые значения, получим $R \approx 6{,}3$ м.

1.38 Тело брошено со скоростью v_0 под углом α к горизонту. Найти скорость v_0 и угол α, если известно, что высота подъема тела h = 3м и радиус кривизны траектории тела в верхней точке траектории R = 3 м.

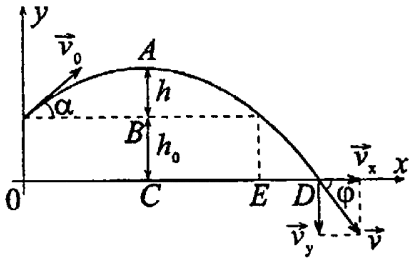
Решение



Уравнения движения тела по вертикали $v_y = v_0 \sin\alpha - gt$; $s_y = \left(v_0 \sin\alpha\right) \cdot t - \frac{gt^2}{2}$. В верхней точке траектории $v_y = 0$, следовательно, $v_0 \sin\alpha = gt_1$, отсюда $t_1 = \frac{v_0 \sin\alpha}{g}$. Высота подъема $h = s_y = \frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{2g}$ — (1). Нормальное ускорение тела в верхней точке траектории $a_n = g = \frac{v_x^2}{R}$, где $v_x = v_0 \cos\alpha$. Тогда $g = \frac{v_0^2 \cos^2\alpha}{R}$, откуда $v_0 = \sqrt{\frac{gR}{\cos^2\alpha}} = \frac{\sqrt{gR}}{\cos\alpha}$ — (2). Подставив (2) в (1), получим: $h = \frac{gR \cdot \sin^2\alpha}{\cos^2\alpha \cdot 2g} = tg^2\alpha\frac{R}{2}$, откуда $tg\alpha = \sqrt{\frac{2h}{R}}$; $tg\alpha = \sqrt{2}$; $\alpha \approx 60°30'$. Из уравнения (2) $v_0 = 9{,}35$ м/с.

1.39 С башни высотой h_0 = 25 м брошен камень со скоростью v_0 = 15 м/с под углом α = 30° к горизонту. Какое время t камень будет в движении? На каком расстоянии l от основания башни он упадет на землю? С какой скоростью v он упадет на землю? Какой угол φ составит траектория камня с горизонтом в точке его падения на землю?

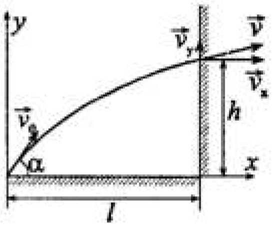
Решение



Движение тела, брошенного с высоты h_0 под углом α к горизонту можно разложить на два этапа: движение тела до наивысшей точки А и движение тела, брошенного из точки А горизонтально со скоростью $v_x = v_0 \cos\alpha$. Высота подъема тела $s_y = AC = h_0 + h = h_0 + \frac{\left(v_0^2 \sin^2\alpha\right)}{2g}$. Общее время движения камня $t = t_1 + t_2$, где $t_1 = \frac{\left(v_0 \sin\alpha\right)}{g}$ — время подъема камня на высоту h и $t_2 = \sqrt{\frac{2s_y}{g}}$ — время падения камня. Подставляя данные задачи, получим $s_y = 27{,}9$ м, $t_1 = 0{,}77$ с, $t_2 = 2{,}39$ с; отсюда $t = 3{,}16$ с. Расстояние от основания башни до места падения камня на землю $l = OD = OC + CD$, где $OC = \frac{OE}{2} = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{2g} \approx 10$ м, $CD = v_x t_2 = v_0 t_2 \cos\alpha = 31{,}1$ м; отсюда $l = 41{,}1$ м. Скорость $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$, где $v_x = v_0 \cos\alpha = 13$ м/с, $v_y = g t_2 = 23{,}4$ м/с; отсюда $v = 26{,}7$ м/с. Угол φ, составляемый траекторией камня с горизонтом в точке падения камня на землю, найдется из формулы $v_y = v_x tg\varphi$, откуда $tg\varphi = \frac{v_y}{v_x} = 1{,}8$ и $\varphi = 61°$.

1.40 Мяч, брошенный со скоростью v_0 = 10 м/с под углом α = 45° к горизонту, ударяется о стенку, находящуюся на расстоянии l = 3 м от места бросания. Когда происходит удар мяча о стенку (при подъеме мяча или при его опускании)? На какой высоте h мяч ударит о стенку (считая от высоты, с которой брошен мяч)? Найти скорость v мяча в момент удара.

Решение



$t_1 = \frac{v_0 \sin\alpha}{g}$ — (1) — время подъема до верхней точки (см. задачу 1.38). Когда мяч находится в верхней точке, $s_x = (v_0 \cos\alpha) \cdot t_1$. С учетом (1) $s_x = \frac{v_0^2 \sin\alpha \cos\alpha}{g} = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{2g}$;

$s_x = \frac{100 \cdot 1}{2 \cdot 9{,}8} = 5{,}1$ м, следовательно, мяч ударяется в стену при подъеме. Мяч ударится о стенку, когда координата $s_y = h = (v_0 \sin\alpha) \cdot t - \frac{gt^2}{2}$ — (2). В этот момент времени $s_x = l = (v_0 \cos\alpha) \cdot t$, откуда $t = \frac{l}{v_0 \cos\alpha}$ — (3). Подставив (3) в (2), получим $h = \frac{v_0 \sin\alpha \cdot l}{v_0 \cos\alpha} - \frac{gl^2}{2v_0^2 \cos^2\alpha} = l \cdot tg\alpha - \frac{gl^2}{2v_0^2 \cos^2\alpha}$. После подстановки числовых значений $h = 2{,}1$ м. Горизонтальная составляющая скорости $v_x = v_0 \cos\alpha$; $v_x = 7{,}07$ м/с. Вертикальная составляющая скорости $v_y = v_0 \sin\alpha - gt = v_0 \sin\alpha - \frac{gl}{v_0 \cos\alpha}$; $v_y = 2{,}91$ м/с. Полная скорость $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$; $v = \sqrt{7{,}07^2 + 2{,}91^2} = 7{,}6$ м/с.

1.41 Найти угловую скоростью ω: а) суточного вращения Земли; б) часовой стрелки на часах; в) минутной стрелки на часах; г) искусственного спутника Земли, движущегося по круговой орбите с периодом вращения T = 88 мин. Какова линейная скорость v движения этого искусственного спутника, если известно, что его орбита расположена на расстоянии h = 200 км от поверхности Земли?

Решение

Угловая скорость $\omega = \frac{2\pi}{T}$, где T — период обращения.

а) $T = 24$ ч $= 86{,}4 \cdot 10^3$ с; $\omega = 72{,}7 \cdot 10^{-6}$ рад/с;

б) $T = 12$ ч $= 43{,}2 \cdot 10^3$ с; $\omega = 145{,}4 \cdot 10^{-6}$ рад/с;

в) $T = 1$ ч $=3600$ с; $\omega = 1{,}74 \cdot 10^{-6}$ рад/с;

г) $T = 88$ мин $=5280$ с; $\omega = 1{,}19 \cdot 10^{-3}$ рад/с.

Линейная скорость спутника $\vec{v} = [\vec{\omega}\vec{R}]$, в скалярном виде $v = \omega R \sin 90^o = \omega R$, где $R = R_З + h$. Здесь $R_З$ — радиус Земли. Тогда $v = \omega(R_З + h)$; $v = 7{,}83$ км/с.

1.42 Найти линейную скорость v вращения точек земной поверхности на широте Ленинграда ($\varphi = 60°$).

Решение

Линейная скорость $v = \omega \cdot r$ (см. задачу 1.41), где $\omega = \frac{2\pi}{T}$. Период вращения Земли $T = 24$ ч $= 86400$ с; $r = R\cos\varphi$, где R — радиус Земли. Отсюда $v = \frac{2\pi R\cos\varphi}{T}$;

$$v = \frac{2 \cdot 3{,}14 \cdot 6{,}38 \cdot 10^6 \cdot 0{,}5}{86400} \approx 231 \text{ м/с}.$$

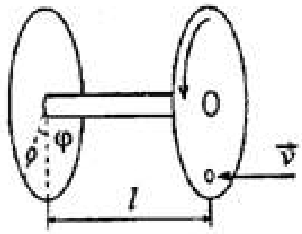
1.43 С какой линейной скоростью должен двигаться самолет на экваторе с востока на запад, чтобы пассажирам этого самолета Солнце казалось неподвижным?

Решение

Очевидно, что самолет должен двигаться со скоростью, равной линейной скорости вращения Земли $v = \omega R = \frac{2\pi}{T}R$; где $T = 24$ ч — период вращения Земли; $R = 6378$ км — радиус Земли. Отсюда $v = 1669$ км/ч.

1.44 Ось с двумя дисками, расположенными на расстоянии $l = 0{,}5$ м друг от друга, вращается с частотой $n = 1600$ об/мин. Пуля, летящая вдоль оси, пробивает оба диска; при этом отверстие от пули во втором диске смещено относительно отверстия в первом диске на угол $\varphi = 12°$. Найти скорость v пули.

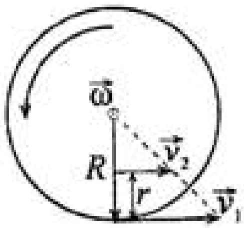
Решение



Уравнение вращательного движения $\vec{\varphi} = \vec{\varphi}_0 + \vec{\omega} \cdot t + \frac{\vec{\beta} t^2}{2}$. Выберем $\varphi_0 = 0$. Из условия следует, что движение осуществляется с постоянной угловой скоростью $\omega = 2\pi n$, следовательно, угловое ускорение равно 0, т.е. смещение $\varphi = \omega \cdot t$, откуда $t = \frac{\varphi}{\omega}$ — (1); $\omega = n \cdot 2\pi$ — (2). Скорость пули $v = \frac{l}{t}$ — (3). Подставив (2) в (1), а затем (1) в (3) получим: $v = \frac{l \cdot 2\pi n}{\varphi}$. Произведя вычисления, найдем скорость пули $v = 419$ м/с.

1.45 Найти радиус R вращающегося колеса, если известно, что линейная скорость v_1 точки, лежащей на ободе, в 2,5 раза больше линейной скорости v_2 точки, лежащей на расстоянии r = 5 см ближе к оси колеса.

Решение



Вектор $\vec{\omega}$ перпендикулярен плоскости чертежа, следовательно, в скалярном виде $v = \omega \cdot r$; $v_1 = \omega \cdot R$; $v_2 = \omega \cdot (R - r)$. Отсюда $\frac{v_1}{v_2} = \frac{\omega \cdot R}{\omega \cdot (R - r)} = 2{,}5$; $\frac{R}{R - r} = 2{,}5$; $1{,}5 \cdot R = 12{,}5$; $R = 8{,}3$ см.

1.46 Колесо, вращаясь равноускоренно, достигло угловой скорости ω = 20 рад/с через N = 10 об после начала вращения. Найти угловое ускорение ε колеса.

Решение

Уравнения движения колеса: $\varphi = \omega_0 t + \frac{\varepsilon \cdot t^2}{2}$, $\omega = \omega_0 + \varepsilon \cdot t$.

По условию $\omega_0 = 0$. Тогда $\varphi = \frac{\varepsilon t^2}{2}$ — (1), $\omega = \varepsilon t$ — (2). Выражая из уравнения (1) ε и учитывая, что $\varphi = 2\pi N$, получим $\varepsilon = \frac{4\pi N}{t^2}$ — (3). Из уравнения (2) найдем $t = \frac{\omega}{\varepsilon}$ и подставим в (3). Получим $\varepsilon = \frac{\omega^2}{4\pi N}$; $\varepsilon = 3{,}2$ рад/с^2. Поскольку $\varepsilon > 0$, то направление вектора $\vec{\varepsilon}$ совпадает с направлением вектора $\vec{\omega}$

1.47 Колесо, вращаясь равноускоренно, через время t = 1 мин после начала вращения приобретает частоту n = 720 об/мин. Найти угловое ускорение ε колеса и число оборотов N колеса за это время.

Решение

Угловая скорость колеса $\vec{\omega}(t) = \vec{\omega}_0 + \vec{\varepsilon} t$. В скалярном виде при $\omega_0 = 0$ получим $\omega = \varepsilon t$, кроме того, $\omega = n \cdot 2\pi$. Отсюда $\varepsilon = \omega / t = n \cdot 2\pi / t$; $\epsilon = 1{,}25$ рад/с^2.

1.48 Колесо, вращаясь равнозамедленно, за время t = 1 мин уменьшило свою частоту с n_1 = 300 об/мин до n_2 = 180 об/мин. Найти угловое ускорение ε колеса и число оборотов N колеса за это время.

Решение

Переведем числовые данные в единицы системы СИ: $t = 1$ мин $= 60$ с; $n_1 = 300$ об/мин $= 5$ об/с; $n_2 = 180$ об/мин $= 3$ об/с. Поскольку вращение равнозамедленное, то $N = \frac{n_1 + n_2}{2} t = 240$. Угловая скорость $\omega = \omega_0 - \varepsilon t$ — (1), где $\omega_0 = n_1 \cdot 2\pi$; $\omega = n_2 \cdot 2\pi$. Из (1) имеем $\varepsilon t = \omega_0 - \omega$, откуда $\varepsilon = \frac{\omega_0 - \omega}{t} = \frac{2\pi(n_1 - n_2)}{t}$; $\varepsilon = \frac{2 \cdot 3{,}14(5-3)}{60} = 0{,}21$ рад/с^2.

1.49 Вентилятор вращается с частотой n = 900 об/мин. После выключения вентилятор, вращаясь равнозамедленно, сделал до остановки N = 75 об. Какое время t прошло с момента выключения вентилятора до полной его остановки?

Решение

$n = 900$ об/мин $= 15$ об/с. Запишем уравнения движения в скалярном виде: $\varphi = \omega_0 t - \frac{\varepsilon t^2}{2}$ — (1); $\omega = \omega_0 - \varepsilon t$ — (2), где $\varphi = 2\pi N$ — (3); $\omega = 0$; $\omega_0 = 2\pi n$ — (4). Тогда из (2) $t = \frac{\omega_0}{\varepsilon} = \frac{2\pi n}{\varepsilon}$ — (5). Перепишем уравнение (1) с учетом (3), (4) и (5): $2\pi N = \frac{(2\pi n)^2}{\varepsilon} - \frac{\varepsilon(2\pi n)^2}{2\varepsilon^2} = \frac{(2\pi n)^2}{2\varepsilon}$; $N = \frac{2\pi n^2}{2\varepsilon} = \frac{\pi n^2}{\varepsilon}$; отсюда $\varepsilon = \frac{\pi n^2}{N}$. Подставив это уравнение в (5), получим: $t = \frac{2\pi n \cdot N}{\pi n^2} = \frac{2N}{n}$; $t = \frac{2 \cdot 75}{15} = 10$ с.

1.50 Вал вращается с частотой n = 180 об/мин. С некоторого момента вал начинает вращаться равнозамедленно с угловым ускорением ε = 3 рад/с^2. Через какое время t вал остановится? Найти число оборотов N вала до остановки.

Решение

$n = 180$ об/мин $= 3$ об/с. Поскольку вращение равнозамедленное, то число оборотов вала до остановки $N = \frac{n}{2} \cdot t$. Угловая скорость $\omega = \omega_0 - \varepsilon t$. По условию $\omega = 0$, следовательно, $\omega_0 = \varepsilon t$, кроме того, $\omega_0 = n2\pi$, тогда $\varepsilon t = n \cdot 2\pi$, откуда $t = \frac{n \cdot 2\pi}{\varepsilon} = 6{,}28$ с. $N = 9{,}4$ об/с.

1.51 Точка движется по окружности радиусом R = 20 см с постоянным тангенциальным ускорением a_τ = 5 см/с^2. Через какое время t после начала движения нормальное ускорение a_n точки будет: а) равно тангенциальному; б) вдвое больше тангенциального?

Решение

По условию вращение является равноускоренным, следовательно, $a_\tau = \frac{v}{t}$, $a_n = \frac{v^2}{R}$; отсюда $t = \frac{v}{a_\tau}$, $v = \sqrt{a_n R}$. Тогда $t = \frac{\sqrt{a_n R}}{a_\tau}$. а) Если $a_n = a_\tau$, то $t = \sqrt{\frac{R}{a_\tau}} = \sqrt{\frac{20}{5}} = 2$ с; б) если $a_n = 2a_\tau$, то $t = \sqrt{\frac{2R}{a_\tau}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 20}{5}} = 2{,}8$ с.

1.52 Точка движется по окружности радиусом R = 10 см с постоянным тангенциальным ускорением a_τ. Найти тангенциальное ускорение a_τ точки, если известно, что к концу пятого оборота после начала движения линейная скорость точки v = 79,2 см/с.

Решение

$a_\tau = dv/dt$, по условию $a_\tau = const$, следовательно, $a_\tau = v/t$ — (1), где $v = \omega R$; $\omega = 2\pi n = 2\pi N/t$. Отсюда $t = \frac{2\pi NR}{v}$ — (2). Подставив (2) в (1), получим $a_\tau = \frac{v^2}{2\pi NR}$; $a_\tau = 0{,}2$ м/с.

1.53 Точка движется по окружности радиусом R = 10 см с постоянным тангенциальным ускорением a_τ. Найти нормальное ускорение a_n точки через время t = 20 с после начала движения, если известно, что к концу пятого оборота после начала движения линейная скорость точки v = 10 см/с.

Решение

Имеем $a_n = \omega^2 R$, где $\omega = \varepsilon t$; отсюда $a_n = \varepsilon^2 t^2 R$ — (1). Найдем угловое ускорение ε. При равноускоренном движении среднее число оборотов в единицу времени (по аналогии со средней скоростью при прямолинейном равноускоренном движении) $\overline{n} = \frac{\Delta N}{\Delta t} = \frac{N}{t_1}$, где t_1 — момент времени, соответствующий концу пятого оборота. $\overline{n} = \frac{n_0 + n}{2}$; $n_0 = 0$, следовательно, $N = \frac{n}{2} \cdot t_1$ — (2). Частота оборотов $n = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{v}{2\pi R}$ — (3). Выразим из (2) t_1, с учетом (3): $t_1 = \frac{4\pi NR}{v}$ — (4). Угловое ускорение $\varepsilon = \frac{\omega_1}{t_1}$ — (5), где $\omega_1 = v / R$ — (6). Подставив в (5) уравнения (4) и (6), получим: $\varepsilon = \frac{v^2}{4\pi NR^2}$. Тогда из уравнения (1) $a_n = \frac{v^4 t^2 R}{16\pi^2 N^2 R^3}$; $a_n = \frac{0{,}1^4 \cdot 20^2 \cdot 0{,}1}{16 \cdot 3{,}14^2 \cdot 5^2 0{,}1^3} = 0{,}01$ м/с^2.

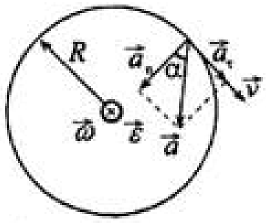
1.54 В первом приближении можно считать, что электрон в атоме водорода движется по круговой орбите с линейной скоростью v. Найти угловую скорость ω вращения электрона вокруг ядра и его нормальное ускорение a_n. Считать радиус орбиты $r = 0{,}5 \cdot 10^{-10}$ м и линейную скорость электрона на этой орбите $v = 2{,}2 \cdot 10^6$ м/с.

Решение

$a_n = \frac{v^2}{r}$; $a_n = \frac{4{,}84 \cdot 10^{12}}{0{,}5 \cdot 10^{-10}} 9{,}7 \cdot 10^{22}$. $\omega = \frac{v}{r}$; $\omega = \frac{2{,}2 \cdot 10^6}{0{,}5 \cdot 10^{-10}} = 4{,}4 \cdot 10^{16}$ рад/с.

1.55 Колесо радиусом R = 10 см вращается с угловым ускорением ε = 3,14 рад/с^2. Найти для точек на ободе колеса к концу первой секунды после начала движения: а) угловую скорость ω; б) линейную скорость v; в) тангенциальное ускорение a_τ; г) нормальное ускорение a_n; д) полное ускорение a; е) угол α, составляемый вектором полного ускорения с радиусом колеса.

Решение



а) При равнопеременном вращательном движении угловая скорость $\omega = \omega_0 + \varepsilon t$. По условию $\omega_0 = 0$, тогда $\omega = \varepsilon t$, при $t = 1$ с угловая скорость $\omega = 3.14$ рад/с.

б) Линейная скорость $v = \omega R$, при $t = 1$ с имеем $v = 0{,}314$ м/с.

в) Тангенциальное ускорение $a_\tau = \varepsilon R$ постоянно во все время движения; при $t = 1$ с имеем $a_\tau = 0{,}314$ м/с^2.

г) Нормальное ускорение $a_n = \omega^2 R = \varepsilon^2 t^2 R$, при $t = 1$ с имеем $a_n = 0{,}986$ м/с^2.

д) Полное ускорение $a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} = a_\tau \sqrt{1 + \varepsilon^2 t^4}$; при $t = 1$ с имеем $a = 1{,}03$ м/с^2.

е) $\sin\alpha = \dfrac{a_\tau}{a} = \dfrac{1}{\sqrt{1 + \varepsilon^2 t^4}}$, где α — угол между вектором полного ускорения и радиусом колеса. К концу первой секунды $\sin\alpha = \dfrac{a_\tau}{a_n} = \dfrac{0.314}{1.03} = 0.305$ и $\alpha = 17°46'$.

1.56 Точка движется по окружности радиусом R = 2 см. Зависимость пути от времени дается уравнением $s = Ct^3$, где C = 0,1 см/с^3. Найти нормальное a_n и тангенциальное a_τ ускорения точки в момент, когда линейная скорость точки v = 0,3 м/с.

Решение

$a_n = \dfrac{v^2}{R} = \dfrac{0{,}09}{0{,}02} = 4{,}5$ м/с^2; $a_\tau = \dfrac{d^2 s}{dt^2} = 6Ct$. Выразим a_n через t: $v = \dfrac{ds}{dt} = 3Ct^2$, следовательно, $a_n = \dfrac{(3Ct^2)^2}{R} = \dfrac{9C^2 t^4}{R}$. Отсюда $t^2 = \sqrt{\dfrac{a_n R}{9C^2}} = \dfrac{\sqrt{a_n R}}{3C}$; $t = \sqrt{\dfrac{\sqrt{a_n R}}{3C}}$. Тогда тангенциальное ускорение $a_\tau = 6C \cdot \sqrt{\dfrac{\sqrt{a_n R}}{3C}}$; $a_\tau = 0{,}06$ м/с^2.

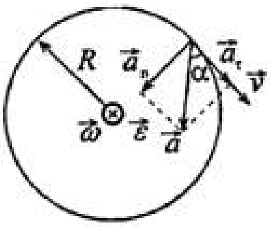
1.57 Точка движется по окружности так, что зависимость пути от времени дается уравнением $s=A-Bt+Ct^2$, где B = 2 м/с и C = 1 м/с^2. Найти линейную скорость v точки, ее тангенциальное a_τ нормальное a_n и полное a ускорения через время t = 3 с после начала движения, если известно, что при t' = 2 с нормальное ускорение точки a'_n = 0,5 м/с^2.

Решение

Линейная скорость точки $v=\frac{ds}{dt}=-B+2Ct$; $v=4$ м/с. Тангенциальное ускорение $a_\tau=dv/dt=2C=2$ м/с^2. Нормальное ускорение $a_n=\frac{v^2}{R}$ — (1). Через время $t'=2$ с точка будет иметь линейную скорость $v'=-B+2Ct'$; $v'=2$ м/с. Радиус окружности можно выразить следующим образом: $R=\frac{(v')^2}{a'_n}$. Тогда из (1) получим $a_n=\frac{v^2a'_n}{(v')^2}$; $a_n=2$ м/с^2. Полное ускорение $a=\sqrt{a_n^2+a_\tau^2}=2{,}8$ м/с^2.

1.58 Найти угловое ускорение ε колеса, если известно, что через время t = 2 с после начала движения вектор полного ускорения точки, лежащей на ободе, составляет угол α = 60° с вектором ее линейной скорости.

Решение



Из рисунка видно, что $tg\alpha=\frac{a_n}{a_\tau}$ — (1). При равноускоренном вращении $a_n=\frac{v^2}{R}$; $a_\tau=\frac{dv}{dt}$, но $v_0=0$, следовательно, $a_\tau=\frac{v}{t}$. Линейная скорость $v=\omega R$, где $\omega=\varepsilon t$, следовательно, $v=\varepsilon tR$. Тогда $a_n=\frac{\varepsilon^2t^2R^2}{R}=\varepsilon^2t^2R$; $a_\tau=\frac{\varepsilon tR}{t}=\varepsilon R$. Подставив эти выражения в (1), получим: $tg\alpha=\frac{\varepsilon^2t^2R}{\varepsilon R}=\varepsilon t^2$, откуда $\varepsilon=\frac{tg\alpha}{t^2}$; $\varepsilon=\frac{1{,}7}{4}\approx0{,}43$ рад/с^2.

1.59 Колесо вращается с угловым ускорением ε = 2рад/с^2. Через время t = 0,5 с после начала движения полное ускорение колеса a = 13,6 см/с^2. Найти радиус R колеса.

Решение

Нормальное ускорение колеса $a_n = v^2 / R$ — (1). Угловое ускорение $\varepsilon = \frac{d\omega}{dt}$, но $\varepsilon = const$, следовательно, $\varepsilon = \frac{\omega}{t}$, откуда $\omega = \varepsilon t$. Линейная скорость точек на ободе колеса $v = \omega R = \varepsilon t R$ — (2). Подставив (2) в (1), получим $a_n = \varepsilon^2 t^2 R$. Тангенциальное ускорение $a_\tau = \varepsilon R$. Полное ускорение $a^2 = a_n^2 + a_\tau^2$; $a^2 = \varepsilon^4 t^4 R^2 + \varepsilon^2 R^2 = \varepsilon^2 R^2 \left(\varepsilon^2 t^4 + 1\right)$. Отсюда $R = a / \varepsilon\sqrt{\varepsilon^2 t^4 + 1}$; $R = 0{,}06$ м.

1.60 Колесо радиусом R = 0,1 м вращается так, что зависимость угла поворота радиуса колеса от времени дается уравнением $\varphi = A+Bt+Ct^2$, где B = 2 рад/с и C = 1 рад/с^3. Для точек, лежащих на ободе колеса, найти через время t = 2 с после начала движения: а) угловую скорость ω; б) линейную скорость v; в) угловое ускорение ε; г) тангенциальное a_τ и нормальное a_n ускорения.

Решение

а) Угловая скорость вращения колеса $\omega = \frac{d\varphi}{dt} = B + 3Ct^2$;
$\omega = 2 + 3 \cdot 4 = 14$ рад/с.
б) Линейная скорость $v = \omega R$; $v = 14 \cdot 0{,}1 = 1{,}4$ м/с.
в) Угловое ускорение $\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = 6Ct$; $\varepsilon = 12$ рад/с^2.
г) Нормальное ускорение $a_n = \omega^2 R$; $a_n = 14^2 \cdot 0{,}1 = 19{,}6$ м/с^2.
Тангенциальное ускорение $a_\tau = \varepsilon R$; $a_\tau = 12 \cdot 0{,}1 = 1{,}2$ м/с^2.

1.61 Колесо радиусом R = 5 см вращается так, что зависимость угла поворота радиуса колеса от времени дается уравнением $\varphi = A+Bt+Ct^2+Dt^3$, где D = 1 рад/с^3. Для точек, лежащих на ободе колеса, найти изменение тангенциального ускорения Δa_τ за единицу времени.

Решение

Изменение тангенциального ускорения связано с изменением углового ускорения следующим соотношением: $\Delta a_\tau = \Delta\varepsilon R$; где $\varepsilon = \frac{d^2\varphi}{dt^2}$. $\frac{d\varphi}{dt} = B + 2Ct + 3Dt^2$; $\frac{d^2\varphi}{dt^2} = 2C + 6Dt = \varepsilon$. Тогда $\Delta\varepsilon = \varepsilon_2 - \varepsilon_1$; $\Delta\varepsilon = (2C + 6Dt_2) - (2C + 6Dt_1) = 6D(t_2 - t_1) = 6D$, учитывая, что $t_2 - t_1 = 1$ с. Отсюда $\Delta a_\tau = 6 \cdot 1 \cdot 0{,}05 = 0{,}3$ м/с^2.

1.62 Колесо радиусом R = 5см вращается так, что зависимость линейной скорости точек, лежащих на ободе колеса, от времени дается уравнением $v=At+Bt^2$, где A = 3 см/с^2 и B = 1 см/с^3. Найти угол α, составляемый вектором полного ускорения с радиусом колеса в моменты времени t, равные: 0, 1, 2, 3, 4 и 5с после начала движения.

Решение

Угол α можно определить следующим образом: $tg\alpha = \frac{a_\tau}{a_n}$, где a_τ и a_n — тангенциальное и нормальное ускорения Но $a_\tau = \frac{dv}{dt}$, $a_n = \frac{v^2}{R}$; следовательно, $tg\alpha = \frac{(3+2t)R}{(3t+t^2)^2}$. Подставляя в эту формулу значения t = 0, 1, 2, 3, 4 и 5с, получим: $t = 0$, $tg\alpha = \infty$, т.е. $\alpha = 90°$ — полное ускорение направлено по касательной. Значения при t, равном от 1 до 5с, приведены в таблице:

t, с	1	2	3	4	5
$tg\alpha$	3,13	0,7	0,278	0,14	0,081
α	72°17′	35°0′	15°32′	7°58′	4°38′

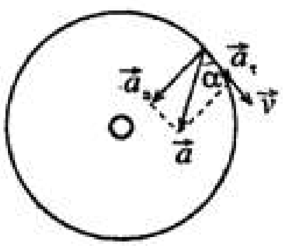
1.63 Колесо вращается так, что зависимость угла поворота радиуса колеса от времени дается уравнением $\varphi=A+Bt+Ct^2+Dt^3$, где B = 1 рад/с, C = 1 рад/с^2 и D = 1 рад/с^3. Найти радиус R колеса, если известно, что к концу второй секунды движения для точек, лежащих на ободе колеса, нормальное ускорение $a_n = 3{,}46\cdot10^2$ м/с^2.

Решение

$a_n = \omega^2 R$, где $\omega = \frac{d\varphi}{dt} = B + 2Ct + 3Dt^2$. Радиус колеса $R = \frac{a_n}{\omega^2} = \frac{a_n}{(B+2Ct+3Dt^2)^2}$; $R = \frac{3{,}46\cdot10^2}{(1+4+12)^2} = 1{,}2$ м.

1.64 Во сколько раз нормальное ускорение a_n точки, лежащей на ободе колеса, больше ее тангенциального ускорения a_τ для того момента, когда вектор полного ускорения точки составляет угол α = 30° с вектором ее линейной скорости?

Решение



Нормальное ускорение точки $a_n = a\sin\alpha$; тангенциальное ускорение $a_\tau = a\cos\alpha$, отсюда $\frac{a_n}{a_\tau} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \approx$ $\approx 0{,}58$.

§ 2. Динамика

2.1 Какой массы m_x балласт надо сбросить с равномерно опускающегося аэростата, чтобы он начал равномерно подниматься с той же скоростью? Масса аэростата с балластом $m = 1600$ кг, подъемная сила аэростата $F = 12$ кН. Считать силу сопротивления $F_{сопр}$ воздуха одной и той же при подъеме и спуске.

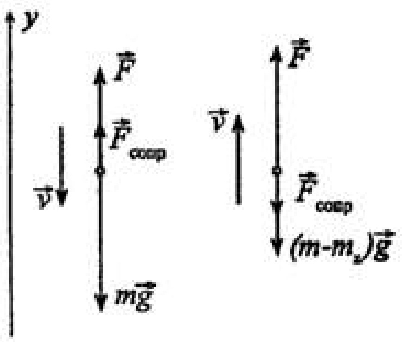
Решение

По второму закону Ньютона

$$\begin{cases} \vec{F} + m\vec{g} + \vec{F}_{сопр} = 0; \\ \vec{F} + \vec{F}_{сопр} + (m - m_x)\vec{g} = 0, \end{cases}$$

или в проекциях на ось y

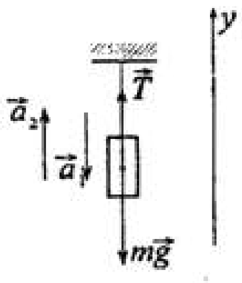
$$\begin{cases} F - mg + F_{сопр} = 0; \\ F - F_{сопр} - (m - m_x)g = 0. \end{cases}$$



Здесь первое уравнение описывает опускающийся аэростат, второе — поднимающийся. Раскрыв скобки и сложив первое уравнение со вторым, получим $m_x = \dfrac{2(mg - F)}{g} = 2\left(m - \dfrac{F}{g}\right)$; $m_x = 752$ кг.

2.2 К нити подвешен груз массой $m = 1$ кг. Найти силу натяжения нити T, если нить с грузом: а) поднимать с ускорением $a = 5$ м/с^2; б) опускать с тем же ускорением $a = 5$ м/с^2.

Решение



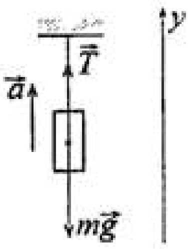
В обоих случаях, а и б, применим второй закон Ньютона.

а) $\vec{T} + m\vec{g} = m\vec{a}$ или $T - mg = ma$, отсюда $T = ma_1 + mg = m(a_1 + g)$; $T = 14{,}8$ Н.

б) $\vec{T} + m\vec{g} = m\vec{a}$ или $-mg + T = -ma_2$, откуда $T = mg - ma_2 = m(g - a_2)$; $T = 4{,}8$ Н.

2.3 Стальная проволока некоторого диаметра выдерживает силу натяжения T = 4,4 кН. С каким наибольшим ускорением можно поднимать груз массой m = 400 кг, подвешенный на этой проволоке, чтобы она не разорвалась.

Решение



По второму закону Ньютона $\vec{T}+m\vec{g}=m\vec{a}$ или $T-mg=ma$, откуда $a=\frac{T-mg}{m}$; $a=12$ м/с^2.

2.4 Масса лифта с пассажирами m = 800 кг. С каким ускорением а и в каком направлении движется лифт, если известно, что сила натяжения троса, поддерживающего лифт: а) T = 12 кН; б) T = 6 кН.

Решение

По второму закону Ньютона $\vec{T}+m\vec{g}=m\vec{a}$ или $T-mg=ma$ (см. рис. к задаче 2.3), откуда $a=T/m-g$. а) $a=5{,}2$ м/с^2; б) $a=-2{,}3$ м/с^2.

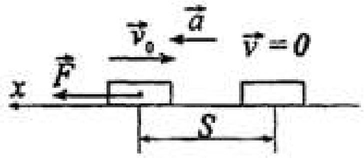
2.5 К нити подвешена гиря. Если поднимать гирю с ускорением a_1 = 2 м/с^2, то сила натяжения нити T_1 будет вдвое меньше той силы натяжения T_2, при которой нить разорвется. С каким ускорением a_1 надо поднимать гирю, чтобы нить разорвалась?

Решение

Запишем второй закон Ньютона в скалярном виде для двух случаев: $T_1-mg=ma_1$ — (1); $T_2-mg=ma_2$ — (2) (см. рис. к задаче 2.3). Поскольку $T_2=2T_1$, то уравнение (2) можно переписать $2T_1-mg=ma_2$, откуда $T_1=ma_2-ma_1=$ $=m(a_2-a_1)$. Подставив выражение для T_1 в (1), получим $m(a_2-a_1)-mg=ma_1$, откуда $a_2=2a_1+g$; $a_2=13{,}8$ м/с^2.

2.6 Автомобиль массой m = 1020 кг, двигаясь равнозамедленно, остановился через время t = 5 с, пройдя путь s = 25 м. Найти начальную скорость v_0 автомобиля и силу торможения F.

Решение



По второму закону Ньютона $\vec{F}=m\vec{a}$, или в проекции на ось x: $F=ma$ — (1). Уравнения движения при равнозамедленном движении автомобиля имеют вид: $S=v_0t-\frac{at^2}{2}$ — (2); $v=v_0-at$ — (3). Поскольку конечная скорость автомобиля $v=0$, то из (3) начальная скорость автомобиля $v_0=at$. Подставляя это выражение в (2), найдем $a=\frac{2S}{t^2}$ — (4). Подставив (4) в (1), получим: $F=\frac{2Sm}{t^2}$; $F=2{,}04$ кН.

2.7 Поезд массой m = 500 т, двигаясь равнозамедленно, в течение времени t = 1 мин уменьшает свою скорость от v_1 = 40 км/ч до v_2 = 28 км/ч. Найти силу торможения F.

Решение

Запишем второй закон Ньютона в виде: $\vec{F}=\frac{\Delta\vec{p}}{\Delta t}$, откуда $\Delta\vec{p}=\vec{F}\Delta t$ или $m\Delta\vec{v}=\vec{F}\Delta t$. В проекции на направление движения последнее уравнение можно записать в виде $m(v_2-v_1)=-F\Delta t$. Отсюда, при $\Delta t=t$, $F=m\frac{v_1-v_2}{t}$. Подставляя числовые данные, получим $F=27{,}5\cdot10^3$ Н.

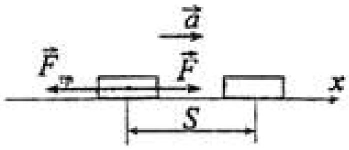
2.8 Вагон массой m = 20 т движется с начальной скоростью v_0 = 54 км/ч. Найти среднюю силу $\langle F\rangle$, действующую на вагон, если известно, что вагой останавливается в течение времени: *а*) t = 1 мин 40 с; б) t = 10 с; в) t = 1 с.

Решение

Имеем $F=m\frac{v_1-v_2}{t}$ (см. задачу 2.7). В нашем случае $v_1=v_0$, $v_2=0$, т.е. $F=\frac{mv_0}{t}$. Подставляя числовые данные, получим: а) $\overline{F}=3$ кН; б) $\overline{F}=30$ кН; в) $\overline{F}=300$ кН.

2.9 Какую силу F надо приложить к вагону, стоящему на рельсах, чтобы вагон стал двигаться равноускоренно и за время t = 30 с прошел путь s = 11 м? Масса вагона m = 16 т. Во время движения на вагон действует сила трения $F_{тр}$, равная 0,05 действующей на него силы тяжести mg.

Решение



По второму закону Ньютона $\vec{F}+\vec{F}_{тр}=m\vec{a}$ или в проекции на ось x: $F-F_{тр}=ma$, откуда $F=ma+F_{тр}$. Поскольку движение равноускоренное и $v_0=0$, то путь $S=at^2/2$, откуда $a=\frac{2S}{t^2}$. По условию $F_{тр}=0{,}05mg$, тогда $F=m\cdot\frac{2S}{t^2}+$ $+0{,}05mg$; $F=8{,}2$ кН.

2.10 Поезд массой m = 500 т после прекращения тяги паровоза под действием силы трения $F_{тр}$ = 98 кН останавливается через время t = 1 мин. С какой скоростью v_0 шел поезд?

Решение

Имеем $F_{тр}=\frac{mv_0}{t}$ (см. задачу 2.8), отсюда $v_0=\frac{F_{тр}\cdot t}{m}$; $v_0=11{,}75$ м/с.

2.11 Вагон массой m = 20 т движется равнозамедленно, имея начальную скорость v_0 = 54 км/ч и ускорение a = -0,3 м/с^2. Какая сила торможения F действует на вагон? Через какое время t вагон остановится? Какое расстояние s вагон пройдет до остановки?

Решение

По второму закону Ньютона $\vec{F}=m\vec{a}$, или в проекции на направление движения $-F=-ma$, откуда сила торможения по абсолютной величине равна $F=6$ кН. Ускорение вагона $a=\frac{v-v_0}{t}$, но $v=0$, следовательно, $a=-\frac{v_0}{t}$, откуда $t=-v_0/a$; $t=50$ с. Пройденный путь, с учетом $a<0$, найдем по формуле $s=vt-at^2/2$; $s=375$ м.

2.12 Тело массой m = 0,5 кг движется прямолинейно, причем зависимость пройденного телом пути s от времени t дается уравнением $s=A-Bt+Ct^2-Dt^3$, где C = 5 м/с^2 и D = 1 м/с^3. Найти силу F, действующую на тело в конце первой секунды движения.

Решение

По второму закону Ньютона $F = ma$, где $a = d^2s/dt^2$. $\frac{ds}{dt} = -B + 2Ct - 3Dt^2$; $\frac{d^2s}{dt^2} = 2C - 6Dt = a$ отсюда $F = m\times$ $\times(2C - 6Dt)$; $F = 2$ Н.

2.13 Под действием силы F = 10 H тело движется прямолинейно так, что зависимость пройденного телом пути s от времени t дается уравнением $s=A-Bt+Ct^2$, где C = 1 м/с^2. Найти массу m тела.

Решение

По второму закону Ньютона $\vec{F} = m\vec{a}$ или $F = ma$, где $a = \frac{d^2s}{dt^2}$. $\frac{ds}{dt} = -B + 2Ct$; $\frac{d^2s}{dt^2} = 2C$, отсюда $F = m \cdot 2C$, следовательно, $m = F/2C$; $m = 5$ кг.

2.14 Тело массой m = 0,5 кг движется так, что зависимость пройденного телом пути s от времени t дается уравнением $s=A\sin\omega\cdot t$, где A = 5 см и $\omega = \pi$ рад/с. Найти силу F, действующую на тело через время t = (1/6)c после начала движения.

Решение

По второму закону Ньютона $F = ma$, где $a = \frac{d^2s}{dt^2}$. Первая производная $\frac{ds}{dt} = A\omega\cos\omega t$; вторая производная $\frac{d^2s}{dt^2} =$ $= -A\omega^2\sin\omega t = a$, отсюда $F = -mA\omega^2\sin\omega t$; $F = -0{,}125$ Н.

2.15 Молекула массой m = 4,65·10^{-26} кг, летящая по нормали к стенке сосуда со скоростью v = 600 м/с, ударяется о стенку и упруго отскакивает от нее без потери скорости. Найти импульс силы $F\Delta t$, полученный стенкой во время удара.

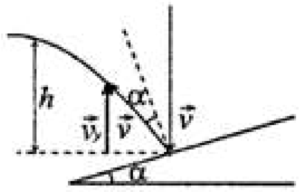
Решение

По закону сохранения импульса $F\Delta t = (mv + 0) - (-mv + 0)$, откуда $F\Delta t = 2mv$; $F\Delta t = 5{,}6\cdot10^{-23}$ Н·с.

2.16 Молекула массой $m = 4{,}65 \cdot 10^{-26}$ кг, летящая со скоростью $v = 600$ м/с, ударяется о стенку сосуда под углом $\alpha = 60°$ к нормали и упруго отскакивает от нее без потери скорости. Найти импульс силы $F\Delta t$, полученный стенкой во время удара.

Решение

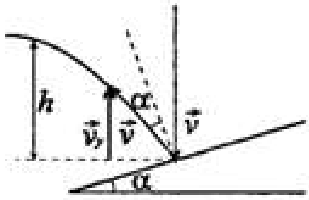
По второму закону Ньютона $F\Delta t = m\Delta v$. Считая положительным направление нормали, внешней к стенке, получим: $\Delta v = v_2 \cos\alpha - (-v_1 \cos\alpha)$; $\Delta v = v_2 \cos\alpha + v_1 \cos\alpha$. Таким образом, получим $F\Delta t = 2mv\cos\alpha$; $F\Delta t = 2{,}8 \cdot 10^{-23}$ Н·с.



2.17 Шарик массой $m = 0{,}1$ кг, падая с некоторой высоты, ударяется о наклонную плоскость и упруго отскакивает от нее без потери скорости. Угол наклона плоскости к горизонту $\alpha = 30°$. За время удара плоскость получает импульс силы $F\Delta t = 1{,}73$ Н·с. Какое время t пройдет от момента удара шарика о плоскость до момента, когда он будет находиться в наивысшей точке траектории?

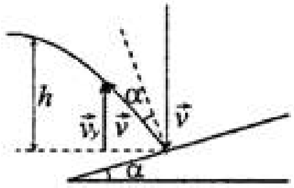
Решение

По закону сохранения импульса $F\Delta t = m\Delta v$, где $\Delta v = v_1 \cos\alpha - (-v_2 \cos\alpha)$; $\Delta v = \cos\alpha(v_1 + v_2)$; $v_1 = v_2 = v$, отсюда $\Delta v = 2v\cos\alpha$. Тогда $F\Delta t = 2mv\cos\alpha$ — (1). Из рисунка видно, что $v_y = v\sin\left(\frac{\pi}{2} - 2\alpha\right) - gt = v\cos 2\alpha - gt$; $v_y = 0$ в верхней точке, следовательно, $v\cos 2\alpha = gt$, откуда $t = v\cos 2\alpha / g$. Из (2) найдем $v = \frac{F\Delta t}{2m\cos\alpha}$, тогда $t = \frac{F\Delta t \cos 2\alpha}{2mg\cos\alpha}$; $t = 0{,}51$ с.



2.18 Струя воды сечением S = 6 см^2 ударяется о стенку под углом α = 60° к нормали и упруго отскакивает от нее без потери скорости. Найти силу F, действующую на стенку, если известно, что скорость течения воды в струе v = 12 м/с.

Решение



За время Δt о стенку ударяется масса воды $m = lS\rho = Sv\Delta t\rho$ — (1), где S — поперечное сечение струи, ρ — плотность воды. По закону сохранения импульса $F\Delta t = m\Delta v$, откуда $F = \dfrac{m\Delta v}{\Delta t}$ — (2). Имеем $\Delta v = v_1 \cos\alpha - (-v_2 \cos\alpha) = \cos\alpha(v_1 + v_2)$

По условию $v_1 = v_2 = v$, отсюда $\Delta v = 2v\cos\alpha$ — (3). Подставляя (1) и (3) в (2), получим $F = \dfrac{Sv\Delta t\rho \cdot 2v\cos\alpha}{\Delta t} = 2Sv^2\rho\cos\alpha$; $F = 86$ Н.

2.19 Трамвай, трогаясь с места, движется с ускорением a = 0,5 м/с^2. Через время t = 12 с после начала движения мотор выключается и трамвай движется до остановки равнозамедленно. Коэффициент трения на всем пути k = 0,01. Найти наибольшую скорость v и время t движения трамвая. Каково его ускорение a при его равнозамедленном движении? Какое расстояние s пройдет трамвай за время движения?

Решение

Очевидно, что наибольшей скорости трамвай достигнет в момент времени $t_1 = 12$ с, его скорость: $v = at$; $v = 0{,}5 \cdot 12 = 6$ м/с. Пройденный путь при равноускоренном движении: $s_1 = \dfrac{a_1 t_1^2}{2}$ — (1), а при равнозамедленном $s_2 = vt_2 - \dfrac{a_2 t_2^2}{2}$ — (2). Согласно второму закону Ньютона $-F_{\text{тр}} = kmg = ma_2$; $a_2 = \dfrac{-kmg}{m} = kg$; $a_2 = -0{,}098$ м/с^2. На втором участке пути: $v = -a_2 t_2$, отсюда $t_2 = \dfrac{-v}{a_2}$; $t_2 = 61{,}2$ с.

Тогда время движения $t = t_1 + t_2$; $t = 73{,}2$ с. Из уравнения (1) $s_1 = 36$ м. Из уравнения (2) $s_2 = 183{,}7$ м. Весь путь $s = s_1 + s_2$; $s = 219{,}7$ м.

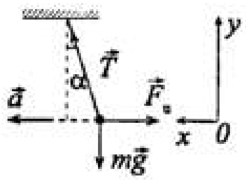
2.20 На автомобиль массой m = 1 т во время движения действует сила трения $F_{тр}$, равная 0,1 действующей на него силе тяжести mg. Какова должна быть сила тяги F, развиваемая мотором автомобиля, чтобы автомобиль двигался: а) равномерно; б) с ускорением a = 2 м/с?

Решение

а) Движение равномерное $a = 0$, следовательно уравнение движения в соответствии со вторым законом Ньютона: $F - F_{тр} = 0$, отсюда $F - F_{тр} = 0{,}1mg$; $F = 980$ Н. б) По второму закону Ньютона: $F - F_{тр} = ma$, отсюда $F = ma + F_{тр} = m\cdot(a + 0{,}1g)$; $F = 2{,}98$ кН.

2.21 Какой угол α с горизонтом составляет поверхность бензина в баке автомобиля, движущегося горизонтально с ускорением a = 2,44 м/с^2?

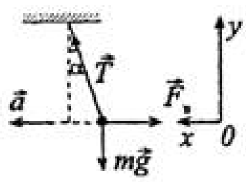
Решение



В неинерциальных системах отсчета (НИСО) второй закон Ньютона не выполняется. Запишем уравнение движения бензина в баке в НИСО $0 = m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_i$, где $F_i = -ma$. В проекции на ось x: $0 = N\sin\alpha - ma$. В проекции на ось y: $0 = mg - N\cos\alpha$, отсюда $mg = N\cos\alpha$; $N = \dfrac{mg}{\cos\alpha}$; $\dfrac{mg\sin\alpha}{\cos\alpha} = ma$, следовательно, $a = g\cdot tg\alpha$; $\alpha = arctg\dfrac{a}{g}$; $\alpha = arctg\dfrac{2{,}44}{9{,}8} \approx 14°$.

2.22 Шар на нити подвешен к потолку трамвайного вагона. Вагон тормозится, и его скорость за время t = 3 с равномерно уменьшается от v_1 = 18 км/ч до v_2 = 6 км/ч. На какой угол отклонится при этом нить с шаром?

Решение



Рассмотрим положение шара относительно системы отсчета, связанной с потолком вагона. Поскольку вагон движется с ускорением, то система является неинерциальной. Уравнение движения в векторной форме: $\vec{T} + m\vec{g} + \vec{F}_и = 0$ — (1), где $F_и = -ma$, тогда уравнение (1) в проекциях на ось x: $T\sin\alpha = ma$ — (2) и на ось y: $T\cos\alpha - mg = 0$ — (3). Разделив (2) на (3), получим $tg\alpha = \dfrac{a}{g}$, откуда $\alpha = arctg\dfrac{a}{g}$ или, учитывая, что $a = \dfrac{\Delta v}{t}$, $\alpha = arctg(\Delta v / gt)$. Подставляя числовые данные, получим $\alpha = 6°30'$.

2.23 Вагон тормозится, и его скорость за время t = 3,3 с равномерно уменьшается от v_1 = 47,5 км/ч до v_2 = 30 км/ч. Каким должен быть предельный коэффициент трения k между чемоданом и полкой, чтобы чемодан при торможении начал скользить по полке?

Решение

Решаем задачу в неинерциальной системе отсчета. Уравнение движения $0 = \vec{F}_{тр} + \vec{F}_i$ или в проекции на ось x: $0 = F_{тр} - ma$, где $a = (v_1 - v_2)/t$; $F_{тр} = kmg$. Тогда $kmg = \frac{m(v_1 - v_2)}{t}$; $k = \frac{v_1 - v_2}{gt}$. Подставляя числовые данные, получим: $k = 0{,}15$. Т.е. при $k \le 0{,}15$ чемодан начнет скользить по полке.

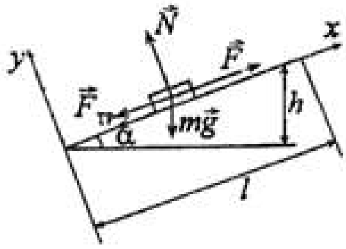
2.24 Канат лежит на столе так, что часть его свешивается со стола, и начинает скользить тогда, когда длина свешивающийся части составляет 1/4 его длины. Найти коэффициент трения k каната о стол.

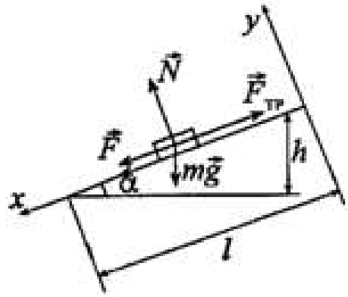
Решение

Обозначим силу тяжести, действующую на единицу длины каната, через $m_l g$. Тогда сила тяжести свешивающейся части каната равна $\frac{m_l g}{4}$. Эта сила тяжести уравновешивается силой трения $F_{тр}$, действующей на ту часть каната, которая лежит на столе: $F_{тр} = \frac{3km_l gl}{4}$. Таким образом, $\frac{m_l gl}{4} = \frac{3km_l gl}{4}$, откуда $k = 0{,}33$.

2.25 На автомобиль массой m = 1 т во время движения действует сила трения $F_{тр}$, равная 0,1 действующей на него силы тяжести mg . Найти силу тяги F, развиваемую мотором автомобиля, если автомобиль движется с постоянной скоростью: а) в гору с уклоном 1 м на каждые 25 м пути; б) под гору с тем же уклоном.

Решение

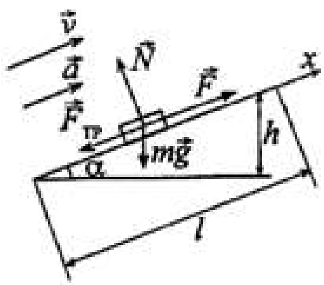




Уравнение движения автомобиля в векторной форме $m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_{тр} + \vec{F}$; $v = const$, следовательно $a = 0$. а) В проекции на ось x: $0 = -mg\sin\alpha - F_{тр} + F$, на ось y: $0 = N - mg\cos\alpha$, где $\sin\alpha = \dfrac{h}{l} = 0{,}04$, $\cos\alpha = 0{,}999$, откуда $N = mg\cos\alpha$. $F_{тр} = kN = kmg \times \cos\alpha$; $F = mg\sin\alpha + kmg\cos\alpha$; $F = mg(\sin\alpha + k\cos\alpha)$ или $F = 1{,}37$ кН. б) В проекции на ось x: $0 = F + mg\sin\alpha - F_{тр}$, на ось y: $N = mg\cos\alpha$. $F = F_{тр} - mg\sin\alpha$; $F = kmg\cos\alpha - mg \times \sin\alpha$; $F = mg(k\cos\alpha - \sin\alpha)$. $F = 590$ Н.

2.26 На автомобиль массой m = 1 т во время движения действует сила трения $F_{тр}$, равная 0,1 действующей на него силе тяжести mg . Какова должна быть сила тяги F, развиваемая мотором автомобиля, если автомобиль движется с ускорением a = 1 м/с^2 в гору с уклоном 1 м на каждые 25 м пути.

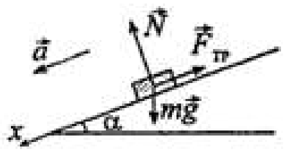
Решение



Зададим направление оси x вдоль наклонной плоскости и запишем второй закон Ньютона в проекции на эту ось: $F - mg\sin\alpha - F_{тр} = ma$ — (1), где $\sin\alpha = h/l$ — (2). Из уравнения (1) $F = ma + mg \times \sin\alpha + F_{тр}$ или, с учетом уравнения (2), сила тяги, развиваемая мотором автомобиля равна $F = m\left(a + \dfrac{hg}{l} + 0{,}1g\right)$; $F = 2{,}37$ кН.

2.27 Тело лежит на наклонной плоскости, составляющей с горизонтом угол α = 4° . При каком предельном коэффициенте трения к тело начнет скользить по наклонной плоскости? С каким ускорением a будет скользить тело по плоскости, если коэффициент трения k = 0,03 ? Какое время t потребуется для прохождения при этих условиях пути s = 100 м? Какую скорость v будет иметь тело в конце пути?

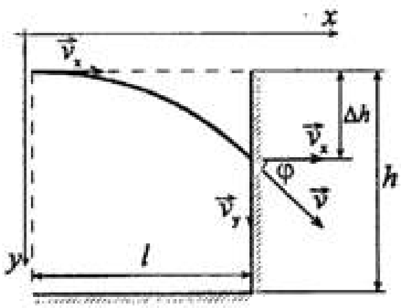
Решение



Для покоящегося тела по второму закону Ньютона в проекции на ось x имеем $mg\sin\alpha - F_{тр} = 0$, где $F_{Тт} \geq kmg$. Отсюда $mg\sin\alpha = kmg$; $k = \sin\alpha$; $k \leq 0{,}07$. При равноускоренном движении по второму закону Ньютона: $mg\sin\alpha - F_{тр} = ma$ или $\sin\alpha - kmg = ma$, откуда $a = g(\sin\alpha - k)$; $a = 0{,}39$ м/с². Пройденный путь $s = \dfrac{at^2}{2}$, откуда $t = \sqrt{\dfrac{2s}{a}}$; $t = 22{,}6$ с. Скорость $v = at$; $v = 8{,}8$ м/с.

2.28 Тело скользит по наклонной плоскости, составляющей с горизонтом угол α = 45° . Пройдя путь s = 36,4 см, тело приобретает скорость v = 2 м/с. Найти коэффициент трения k тела о плоскость.

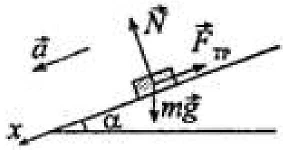
Решение



Перемещение мяча по вертикали $S_y = h = \dfrac{gt^2}{2}$ — (1), по горизонтали $S_x = l = v_x \times t$ — (2). $v_y = gt$; $v_x = l/t$. Из уравнения (1) получим $t = \sqrt{2\Delta h/g}$. Горизонтальная составляющая скорости $v_x = l\sqrt{g}/\sqrt{2\cdot\Delta h}$; $v_x = 11{,}1$ м/с. Вертикальная составляющая скорости $v_y = g\sqrt{2\Delta h/g}$; $v_y = \sqrt{2g\Delta h}$. Из рисунка видно, что $tg\varphi = \dfrac{v_x}{v_y} = \dfrac{l}{2\Delta h}$; $tg\varphi = 2{,}5$; $\varphi \approx 68°$.

2.29 Тело скользит по наклонной плоскости, составляющей с горизонтом угол $\alpha = 45°$. Зависимость пройденного пути s от времени t дается уравнением $s = Ct^2$, где $C = 1,73$ м/с^2. Найти коэффициент трения k тела о плоскость.

Решение

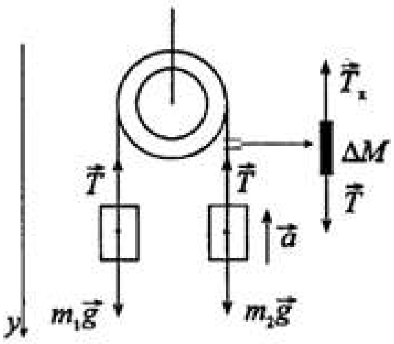


Ускорение можно найти как вторую производную пути по времени. $a = \frac{d^2 s}{dt^2} = 3,46$. По второму закону Ньютона $mg\sin\alpha - F_{тр} = ma$. Поскольку $F_{тр} = kmg\cos\alpha$, то $mg\sin\alpha - kmg\cos\alpha = ma$ откуда $k = \frac{mg\sin\alpha - ma}{mg\cos\alpha}$; $k = \frac{g\sin\alpha - a}{g\cos\alpha}$; $k = 0,5$.

2.30 Две гири с массами $m_1 = 2$ кг и $m_2 = 1$ кг соединены нитью и перекинуты через невесомый блок. Найти ускорение a, с которым движутся гири, и силу натяжения нити T. Трением в блоке пренебречь.

Решение

Предположим, что нить невесома и нерастяжима. Выберем элемент нити Δm и запишем уравнение движения в проекции на ось y: $\Delta ma = T - T_x$. Поскольку $\Delta m = 0$, то $T = T_x$, т. е. сила натяжения нити во всех точках ее одинакова. Ускорения движения грузов тоже одинаковы, т. к. из-за нерастяжимости нити за одно и то же время грузы проходят один путь, т. е. $S_1 = \frac{a_1 t^2}{2}$; $S_2 = \frac{a_2 t^2}{2}$; $S_1 = S_2$, следовательно, $a_1 = a_2$. Но направление векторов $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$



противоположны. Запишем второй закон Ньютона для первой и второй гири в проекциях на ось y:

$$\begin{cases} m_1 g - T = m_1 a & \text{—}(1); \\ m_2 g - T = -m_2 a & \text{—}(2). \end{cases}$$

Вычтем (2) из (1):

$a(m_1 + m_2) = g(m_1 - m_2)$, отсюда $a = \frac{g(m_1 - m_2)}{m_1 + m_2}$ — (3).

Подставим (3) в (1) $\frac{m_1 g(m_1 - m_2)}{m_1 + m_2} = m_1 g - T$, следовательно,

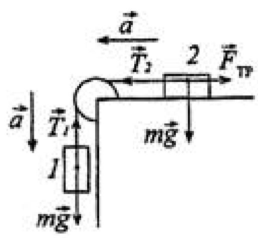
$T = m_1 g \cdot \left(1 - \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\right)$; $T = m_1 g \cdot \left(\frac{m_1 + m_2 - m_1 + m_2}{m_1 + m_2}\right)$;

$T = m_1 g \cdot \left(\frac{2m_2}{m_1 + m_2}\right) = \frac{2g m_1 m_2}{m_1 + m_2}$. Подставляя числовые данные, получим: $T = 13$ Н; $a = 3{,}27$ м/с^2.

2.31 Невесомым блок укреплен на конце стола. Гири 1 и 2 одинаковой массы $m_1 = m_2 = 1$ кг соединены нитью и перекинуты через блок. Коэффициент трения гири 2 о стол $k = 0{,}1$. Найти ускорение a, с которым движутся гири, и силу натяжения нити T. Трением в блоке пренебречь.

Решение

Запишем второй закон Ньютона для обоих тел в проекциях на направление их движения: $mg - T_1 = m_1 a$ — (1);



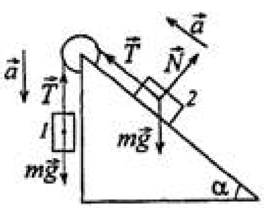
$T_2 - F_{тр} = m_2 a$ — (2). Имеем $T_1 = T_2 = T$ (см. задачу 2.30). Сложив (1) и (2), с учетом того, что $F_{тр} = km_2 g$, получим $m_1 g - kmg = a(m_1 + m_2)$, откуда найдем $a = g\frac{m_1 - km_2}{m_1 + m_2}$ — (3);

$a = 4{,}4$ м/с^2. Подставим (3) в (1) и выразим T:

$T = m_1(g - a)$; $T = m_1\left(g - g\frac{m_1 - km_2}{m_1 + m_2}\right)$; $T = m_1 g \times \left(1 - \frac{m_1 - km_2}{m_1 + m_2}\right)$; $T = m_1 g\left(\frac{m_1 + m_2 - m_1 + km_2}{m_1 + m_2}\right)$; $T = m_1 g \times \frac{m_2(1+k)}{m_1 + m_2}$; $T = g\frac{m_1 m_2(1+k)}{m_1 + m_2}$. Подставив числовые данные, получим: $T_1 = T_2 = \frac{m_1 m_2 (1+k) g}{m_1 + m_2} = 5{,}4$ Н.

2.32 Невесомый блок укреплен в вершине наклонной плоскости, составляющей с горизонтом угол α = 30°. Гири 1 и 2 одинаковой массы $m_l = m_2 = 1$ кг соединены нитью и перекинуты через блок. Найти ускорение a, с которым движутся гири, и силу натяжения нити T. Трением гири о наклонную плоскость и трением в блоке пренебречь.

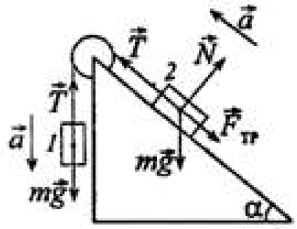
Решение



Пусть $m_1 = m_2 = m$. Запишем уравнение второго закона Ньютона для первой и второй гири в проекциях на направление их движения с учетом $T_1 = T_2 = T$ (см. задачу 2.30): $\begin{cases} mg - T = ma & —(1); \\ T - mg\sin\alpha = ma & —(2). \end{cases}$ Из (1) имеем: $T = m(g - a)$ — (3). Подставив (3) в (2), получим: $g(1 - \sin\alpha) = 2a$, откуда $a = g(1 - \sin\alpha)/2$. Подставив числовые значения, получим: $a = 2.45$ м/с^2 и $T = 7{,}35$ Н.

2.33 Невесомый блок укреплен в вершине наклонной плоскости, составляющей с горизонтом угол α = 30°. Гири 1 и 2 одинаковой массы $m_l = m_2$ = 1 кг соединены нитью и перекинуты через блок. Найти ускорение а, с которым движутся гири, и силу натяжения нити T. Коэффициент трения гири 2 о наклонную плоскость k = 0,1.

Решение



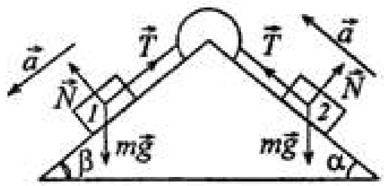
Пусть при данном значении k тело скользит. Уравнение второго закона Ньютона для первой гири останется неизменным, а в уравнении для второй появится сила трения: $F_{Тm} = kmg\cos\alpha$;

$$\begin{cases} mg - T = ma & —(1); \\ T - mg\sin\alpha - F_{тр} = ma & —(2). \end{cases}$$

Выразим из (1) T: $T = mg - ma$ — (3). Подставив (3) в (2), найдем a: $mg - ma - mg(\sin\alpha + k\cos\alpha) = ma$; $g(1 - \sin\alpha - k\cos\alpha) = 2a$; $a = g(1 - \sin\alpha - k\cos\alpha)/2$. Из (3) $T = m(g - a)$. Подставив числовые значения, получим: $a = 2{,}02$ м/с^2; $T = 1(9{,}8 - 2{,}02) = 7{,}78$ Н.

2.34 Невесомый блок укреплен в вершине двух наклонных плоскостей, составляющих с горизонтом углы α = 30° и β = 45°. Гири 1 и 2 одинаковой массы $m_1 = m_2$ = 1 кг соединены нитью и перекинуты через блок. Найти ускорение a, с которым движутся гири, и силу натяжения нити T. Трением гирь 1 и 2 о наклонные плоскости, а также трением в блоке пренебречь.

Решение



Пусть $m_1 = m_2 = m$. Тогда по второму закону Ньютона в проекциях на направления движения гирь имеем:

$$\begin{cases} mg\sin\beta - T = ma & —(1); \\ T - mg\sin\alpha = ma & —(2). \end{cases}$$

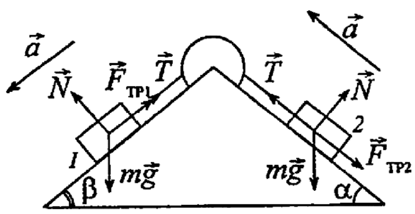
Сложив (1) и (2), получим: $mg(\sin\beta - \sin\alpha) = 2ma$, откуда $a = \dfrac{g(\sin\beta - \sin\alpha)}{2}$. Из (2):

$T = ma + mg\sin\alpha$; $\quad T = \dfrac{mg(\sin\beta - \sin\alpha)}{2} + mg\sin\alpha$;

$T = mg\dfrac{(\sin\beta + \sin\alpha)}{2}$. Подставив числовые значения, получим: $a = 1{,}03$ м/с^2 и $T = 5{,}9$ Н.

2.35 Невесомый блок укреплен в вершине двух наклонных плоскостей, составляющих с горизонтом углы $\alpha = 30°$ и $\beta = 45°$. Гири 1 и 2 одинаковой массы $m_1 = m_2 = 1$ кг соединены нитью и перекинуты через блок. Найти ускорение a, с которым движутся гири, и силу натяжения нити T. Коэффициенты трения гирь 1 и 2 о наклонные плоскости $k_1 = k_2 = 0{,}1$.

Решение



Пусть при данном значении k гири скользят. С учетом силы трения уравнение второго закона Ньютона в проекциях на направление их движения запишется в виде:

$$\begin{cases} m_1 g\sin\beta - T_1 - F_{тр} = m_1 a, \\ T_2 - m_2 g\sin\alpha - F_{тр} = m_2 a; \end{cases}$$

или $\begin{cases} m_1 g\sin\beta - T_1 - km_1 g\cos\beta = m_1 a & \text{— (1)}, \\ T_2 - m_2 g\sin\alpha - km_2 g\cos\alpha = m_2 a & \text{— (2)}. \end{cases}$ Так как $T_1 = T_2$, то сложив (1) и (2) получим:

$m_1 g\sin\beta - m_2 g\sin\alpha - km_1 g\cos\beta - km_2 g\cos\alpha = a(m_1 + m_2)$;

$m_1 g(\sin\beta - k\cos\alpha) - m_2 g(\sin\beta + k\cos\alpha) = a(m_1 + m_2)$,

откуда $a = g\dfrac{m_1(\sin\beta - k\cos\beta) - m_2(\sin\alpha + k\cos\alpha)}{m_1 + m_2}$ — (3).

Из (2) найдем: $T_2 = m_2 a + m_2 g\sin\alpha + km_2 g\cos\alpha$, подставив в это выражение (3), получим: $T_2 = m_2 g \times$

$\times\dfrac{m_1(\sin\beta - k\cos\beta) - m_2(\sin\alpha + k\cos\alpha)}{m_1 + m_2} + m_2 g(\sin\alpha\cos\alpha)$;

$$T_2 = m_2 g\frac{m_1(\sin\beta - k\cos\beta) - (\sin\alpha + k\cos\alpha)(m_2 - m_1 - m_2)}{m_1 + m_2};$$

$$T_2 = gm_1 m_2\frac{\sin\beta - k\cos\beta + \sin\alpha + k\cos\alpha}{m_1 + m_2};$$

$$T_2 = gm_1 m_2\frac{\sin\alpha + \sin\beta + k(\cos\alpha - \cos\beta)}{m_1 + m_2};$$

$T_2 = \dfrac{m_1 m_2(\sin\alpha + \sin\beta + k(\cos\alpha - \cos\beta))}{m_1 + m_2}g$. Подставляя числовые данные, получим: $T_1 = T_2 = 6$ Н. $a = 0{,}244$ м/с^2.

2.36 При подъеме груза массой m = 2 кг на высоту h = 1 м сила F совершает работу A = 78,5 Дж. С каким ускорением a поднимается груз?

Решение

По второму закону Ньютона в проекции на направление движения груза имеем $ma = F - mg$, откуда $F = ma + mg$. По условию работу A совершает сила F, следовательно, $A = Fh\cos 0 = Fh = mah + mgh$ — (1), т.е. работа A идет на увеличение потенциальной энергии груза и на сообщение ему ускорения. Из уравнения (1) найдем $a = \dfrac{A - mgh}{hm}$; $a = 29{,}4$ м/с^2.

2.37 Самолет поднимается и на высоте h = 5 км достигает скорости v = 360 км/ч. Во сколько раз работа A_1, совершаемая при подъеме против силы тяжести, больше работы A_2, идущей на увеличение скорости самолета?

Решение

Работа A_1 идет на увеличение потенциальной энергии самолета, а работа A_2 — на увеличение его кинетической энергии. Тогда при $A_1 = mgh$ и $A_2 = mv^2/2$ получим: $\dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{2mgh}{mv^2} = \dfrac{2gh}{v^2}$; $\dfrac{A_1}{A_2} = 9{,}8$.

2.38 Какую работу A надо совершить, чтобы заставить движущееся тело массой m = 2 кг: а) увеличить скорость с v_1 = 2 м/с до v_2 = 5 м/с; б) остановиться при начальной скорости v_0 = 8 м/с?

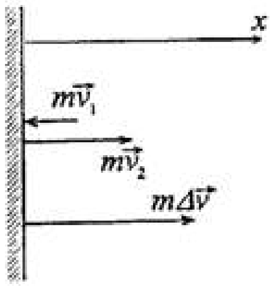
Решение

Совершенная работа пойдет на приращение кинетической энергии: а) $A_1 = \dfrac{mv_2^2}{2} - \dfrac{mv_1^2}{2}$; $A_1 = \dfrac{m\left(v_2^2 - v_1^2\right)}{2}$; $A_1 = 21$ Дж.

б) $A_2 = W_{к2} - W_{к1}$. Т.к. $W_{к2} = 0$, то $A_2 = -W_{к1} = -mv_0^2/2$; $A_2 = -64$ Дж. Знак «–» говорит о том, что работа совершается силой трения.

2.39 Мяч, летящий со скоростью $v_1 = 15$ м/с, отбрасывается ударом ракетки в противоположном направлении со скоростью $v_2 = 20$ м/с. Найти изменение импульса $m\Delta v$ мяча, если известно, что изменение его кинетической энергии $\Delta W = 8{,}75$ Дж.

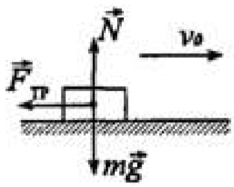
Решение



Изменение кинетической энергии мяча: $\Delta W = \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2} = \frac{m(v_2^2 - v_1^2)}{2}$. Отсюда $m = \frac{2\Delta W}{v_2^2 - v_1^2}$ — (1). Изменение импульса в проекции на ось x: $m\Delta v = m(v_2 - (-v_1)) = m(v_2 + v_1)$. С учетом (1): $m\Delta v = \frac{2\Delta W(v_1 + v_2)}{v_2^2 - v_1^2} = \frac{2\Delta W}{v_2 - v_1}$. Подставив числовые данные, получим: $m\Delta v = 3{,}5$ кг·м/с.

2.40 Камень, пущенный по поверхности льда со скоростью $v = 3$ м/с, прошел до остановки расстояние $s = 20{,}4$ м. Найти коэффициент трения k камня о лед.

Решение



Работа силы трения при скольжении камня по льду равна $A = F_{тр} s \cos\alpha$, где $F_{тр} = kmg$, $\cos\alpha = \cos 180° = -1$, т.е. $A = -kmgs$ — (1). С другой стороны, работа силы трения равна приращению кинетической энергии камня $A = W_2 - W_1$, поскольку $W_2 = 0$, то $A = -W_1 = -\frac{mv^2}{2}$ — (2). Приравнивая правые части уравнений (1) и (2), получим $k = \frac{v^2}{2gs}$; $k = 0{,}02$.

2.41 Вагон массой m = 20 т, двигаясь равнозамедленно с начальной скоростью v_0 = 54 км/ч, под действием силы трения $F_{тр}$ = 6 кН через некоторое время останавливается. Найти работу A сил трения и расстояние s, которое вагон пройдет до остановки.

Решение

Работа силы трения $A = -\frac{mv_0^2}{2}$ (см. задачу 2.40). Подставляя числовые данные, получим $A = -2{,}25$ МДж. По второму закону Ньютона: $F_{тр} = ma$, откуда $a = \frac{F_{тр}}{m}$ — (1). При равнозамедленном движении путь, пройденный до остановки: $s = \frac{at^2}{2}$, где $t = \frac{v_0}{a}$, тогда $s = \frac{v_0^2}{2a}$ — (2). Подставляя уравнение (1) в (2), получим $s = \frac{v_0^2 m}{2 \cdot F_{тр}}$; $s = 375$ м.

2.42 Шофер автомобиля, имеющего массу m = 1 т, начинает тормозить на расстоянии s = 25 м от препятствия на дороге. Сила трения в тормозных колодках автомобиля $F_{тр}$ = 3,84 кН. При какой предельной скорости v движения автомобиль успеет остановиться перед препятствием? Трением колес о дорогу пренебречь.

Решение

Задача аналогична 2.41. Воспользуемся полученной в предыдущей задаче формулой: $s = \frac{v_0^2 m}{2 \cdot F_{тр}}$, откуда $v = \sqrt{\frac{2sF_{тр}}{m}}$. Подставив числовые значения, получим: $v = 13{,}9$ м/с; $v = 50$ км/ч.

2.43 Трамвай движется с ускорением a = 49,0 см/с. Найти коэффициент трения k, если известно, что 50% мощности мотора идет на преодоление силы трения и 50% — на увеличение скорости движения.

Решение

Мощность мотора $N = F \cdot v$. По условию половина мощности идет на преодоление силы трения, т.е. $\frac{N}{2} = kmg \cdot v$, а вторая половина — на увеличение скорости движения, т.е. $\frac{N}{2} = ma \cdot v$. Отсюда $kmg \cdot v = ma \cdot v$, следовательно, $k = a / g$; $k \approx 0{,}05$.

2.44 Найти работу A, которую надо совершить, чтобы увеличить скорость движения тела массой $m = 1$т от $v_1 = 2$ м/с до $v_2 = 6$ м/с на пути $s = 10$ м. На всем пути действует сила трения $F_{тр} = 2$ Н.

Решение

Часть совершенной работы пойдет на приращение кинетической энергии, а другая часть — на преодоление силы трения. $A = \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2} + A_{тр}$, где $A_{тр} = F_{тр} \cdot s$, тогда $A = \frac{m(v_2^2 - v_1^2)}{2} + F_{тр} \cdot s$; $A = 16{,}02$ кДж.

2.45 На автомобиль массой $M = 1$ т во время движения действует сила трения $F_{тр}$, равная 0,1 действующей на него силе тяжести mg. Какую массу m бензина расходует двигатель автомобиля на то, чтобы на пути $s = 0{,}5$ км увеличить скорость от $v_1 = 10$ км/ч до $v_2 = 40$ км/ч? К.п.д. двигателя $\eta = 0{,}2$, удельная теплота сгорания бензина $q = 46$ МДж/кг.

Решение

Полезная работа, совершаемая двигателем, идет на преодоление силы трения и на приращение кинетической энергии. $A_п = F_{тр} \cdot s + \left(\frac{Mv_2^2}{2} - \frac{Mv_1^2}{2}\right)$ — (1). Затраченная работа равна затраченному количеству теплоты: $A_з = Q_з$; $Q_з = Q \cdot m$ — (2); К.п.д. двигателя $\eta = \frac{A_п}{A_з}$, откуда $A_з = \frac{A_п}{\eta}$ — (3). Подставив (3) в (2), получим: $\frac{A_п}{\eta} = q \cdot m$, отсюда $m = \frac{A_п}{q \cdot \eta}$. Подставив в данное выражение (1), получим $m = \frac{1}{q\eta}\left[F_{тр} \cdot s + \left(\frac{Mv_2^2}{2} - \frac{Mv_1^2}{2}\right)\right]$. Т.к. $F_{тр} = 0{,}1mg$, то $m = \frac{M}{2q\eta}\left[2 \cdot 0{,}1g \cdot s + v_2^2 - v_1^2\right]$. Подставляя числовые данные, получим: $m = 0{,}06$ кг.

2.46 Какую массу m бензина расходует двигатель автомобиля на пути $s = 100$ км, если при мощности двигателя $N = 11$ кВт скорость его движения $v = 30$ км/ч? К.п.д. двигателя $\eta = 0{,}22$, удельная теплота сгорания бензина $q = 46$ МДж/кг.

Решение

При перемещении автомобиля на расстояние s его двигатель совершает работу $A = \frac{Nt}{\eta} = \frac{Ns}{\eta v}$. При этом затрачивается масса бензина $m = \frac{A}{q} = \frac{Ns}{q\eta v}$; $m = 13$ кг.

2.47 Найти к.п.д. η двигателя автомобиля, если известно, что при скорости движения v = 40 км/ч двигатель потребляет объем V = 13,5 л бензина на пути s = 100 км и развивает мощность N = 12 кВт. Плотность бензина $p = 0{,}8\cdot10^3$ кг/м^3, удельная теплота сгорания бензина q = 46 МДж/кг.

Решение

К.п.д двигателя равен $\eta = \frac{A_п}{A_з}$ — (1). Мощность двигателя $N = \frac{A_п}{t}$, где $t = \frac{s}{v}$, тогда $A_п = \frac{Ns}{v}$ — (2); $A_з = qm$, где $m = \rho V$, отсюда $A_з = q\rho V$ — (3). Подставляя (2) и (3) в (1), получим: $\eta = \frac{Ns}{vq\rho V}$; $\eta = 0{,}22$.

2.48 Камень массой m = 1 кг брошен вертикально вверх с начальной скоростью v_0 = 9,8 м/с. Построить график зависимости от времени t кинетической $W_к$, потенциальной $W_п$ и полной W энергий камня для интервала $0 \le t \le 2$ с.

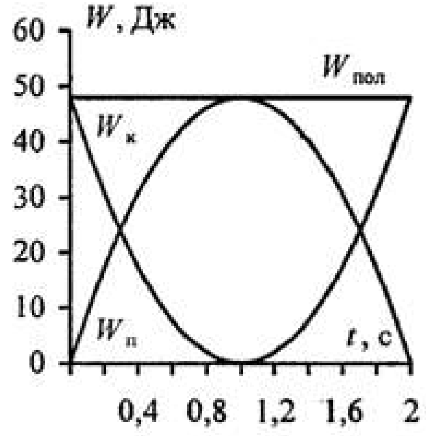
Решение

$$W_к = \frac{mv^2}{2};\quad W_п = mgh;\quad v = v_0 - gt;\quad h = \frac{-gt^2}{2} + v_0 t;$$

$$W_к = \frac{m(v_0 - gt)^2}{2};\quad W_п = mg\left(v_0 t - \frac{gt^2}{2}\right);\quad W_к = \frac{(9{,}8 - 9{,}8t)^2}{2};$$

$W = W_к + W_п = const$; $W_п = 9{,}8(9{,}8t - 4{,}9t^2) = 96t - 48t^2$. Характер зависимости кинетической, потенциальной и полной энергии камня от времени дан на графике.

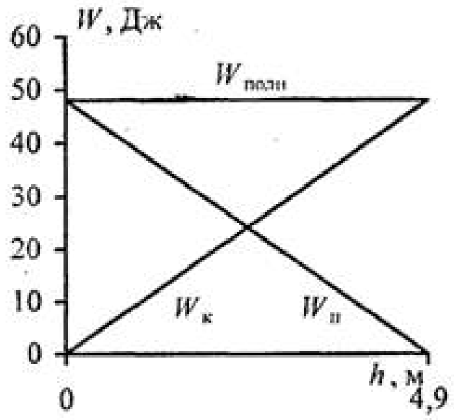
t, с	$W_к$, Дж	$W_п$, Дж
0	48	0
0,2	30,7	17,3
0,4	17,3	30,7
0,6	7,7	40,3
0,8	1,9	46.1
1	0	48
1,2	1,9	46.1
1,4	7,7	40.3
1,6	17,3	30,7
1,8	30,7	17,3
2	48	0



2.49 В условиях предыдущей задачи построить график зависимости от расстояния h кинетической $W_к$, потенциальной $W_п$ и полной W энергий камня.

Решение

Кинетическая энергия, которой обладал камень в момент броска, будет в дальнейшем убывать за счет увеличения потенциальной энергии. $W_к = \frac{mv_0^2}{2} - mgh$; $W_п = mgh$. Для построения графика подставим числовые данные: $W_п = 9{,}8h$. Максимальную высоту, на которую поднимется камень, найдем из соотношения: $\frac{mv^2}{2} = mgh$, отсюда $h = \frac{v^2}{2g}$; $h = 4{,}9$ м. Построим график при $0 \le h \le 4{,}9$.



h, м	$W_к$, Дж	$W_п$, Дж
0	48	0
2,7	21,6	26,4
4,9	0	48

f

2.50 Камень падает с некоторой высоты в течение времени t = 1,43 с. Найти кинетическую $W_к$ и потенциальную $W_п$ энергии камня в средней точке пути. Масса камня m = 2 кг.

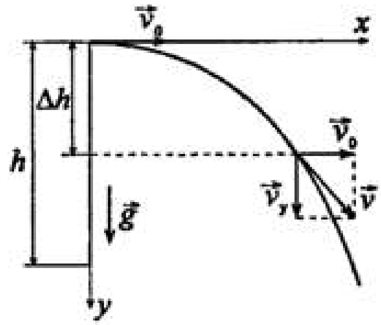
Решение

В верхней точке камень обладал потенциальной энергией $W_п = mgH$, где $H = \frac{gt^2}{2}$ (t — время падения до земли). Потенциальная энергия камня в средней точке пути $W_п = mgh$, где $h = \frac{H}{2}$. Таким образом $W_п = mg\frac{H}{2} = \frac{mg^2t^2}{4}$; $W_п = 98$ Дж. Кинетическую энергию камень приобрел за счет убыли потенциальной энергии. В средней точке пути $W_к = W_п = 98$ Дж, так как $mgH - mgh = mg\frac{H}{2} = W_к$.

2.51 С башни высотой h = 25 м горизонтально брошен камень со скоростью v_0 = 15 м/с. Найти кинетическую $W_к$ и потенциальную $W_п$ энергии камня через время t = 1 c после начала движения. Масса камня m = 0,2 кг.

Решение

В момент времени t кинетическая энергия камня $W_к = \frac{mv^2}{2}$, а его потенциальная энергия $W_п = mg(h - \Delta h)$. Поскольку $v_y = gt$, то $v^2 = v_0^2 + (gt)^2$. Тогда $W_к = \frac{m(v_0^2 + (gt)^2)}{2}$;

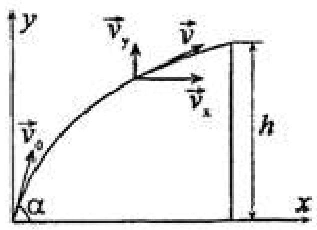


$W_к = 32{,}2$ Дж. Вертикальная составляющая перемещения камня $\Delta h = \frac{gt^2}{2}$, отсюда $W_п = mg\left(h - \frac{gt^2}{2}\right)$; $W_п = 39{,}4$ Дж.

2.52 Камень брошен со скоростью V_0 = 15 м/c под углом α = 60° к горизонту. Найти кинетическую $W_к$, потенциальную $W_п$ и полную W энергии камня: а) через время t = 1 c после начала движения; б) в высшей точке траектории. Масса камня m = 0,2 кг.

Решение

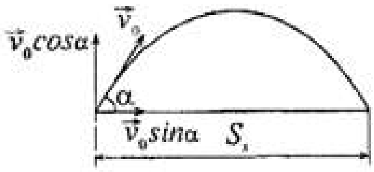
Полная скорость камня $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$, где $v_x = v_0 \cos\alpha$; $v_y = v_0 \sin\alpha - gt$. В верхней точке траектории $v_y = 0$,



следовательно, $v_0 \sin\alpha = gt$. Отсюда время подъема камня до верхней точки $t = \frac{v_0 \sin\alpha}{g}$; $t = 1{,}3$ с, следовательно в момент времени $t = 1$ с камень находится на подъеме. Его кинетическая энергия в этот момент $W_к = \frac{mv^2}{2} = \frac{m(v_0^2 \cos^2\alpha + (v_0 \sin\alpha - gt)^2)}{2}$; $W_к = 6{,}6$ Дж. По закону сохранения энергии $W_{к0} = W_к + W_п$, где $W_{к0}$ — кинетическая энергия камня в начальный момент времени. $W_{к0} = \frac{mv_0^2}{2}$. Тогда $W_п = \frac{mv_0^2}{2} - W_к$; $W_п = 15{,}9$ Дж. В верхней точке траектории кинетическая энергия камня $W_{к1} = \frac{m(v_0 \cos\alpha)^2}{2}$; $W_{к1} = 5{,}6$ Дж. Согласно закону сохранения энергии полная энергия камня останется неизменной, а его потенциальная энергия в верхней точке траектории $W_{п1} = W - W_{к1}$; $W_{п1} = 16{,}9$ Дж.

2.53 На толкание ядра, брошенного под углом $\alpha = 30°$ к горизонту, затрачена работа $A = 216$ Дж. Через какое время t и на каком расстоянии s_x от места бросания ядро упадет на землю? Масса ядра $m = 2$ кг.

Решение



Работа, затраченная на толкание ядра, пошла на сообщение ему кинетической энергии. $A = W_к = \frac{mv_0^2}{2}$, откуда $v_0 = \sqrt{\frac{2A}{m}}$ — (1). Время подъема ядра до верхней точки $t_1 = \frac{v_0 \sin\alpha}{g}$ (см. задачу 2.52). Полное время полета ядра $t = 2t_1 = \frac{2v_0 \sin\alpha}{g}$; подставив (1), получим: $t = \frac{2\sin\alpha\sqrt{2A}}{g\sqrt{m}}$; $t = 1{,}5$ с. Расстояние от места бросания, которое пролетит ядро $s_x = t\cos\alpha\sqrt{\frac{2A}{m}}$; $s_x = 19{,}1$ м.

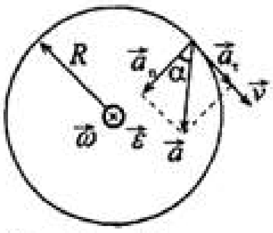
2.54 Тело массой $m = 10$ г движется по окружности радиусом $R = 6{,}4$ см. Найти тангенциальное ускорение a_τ тела, если известно, что к концу второго оборота после начала движения его кинетическая энергия $W_к = 0{,}8$ МДж.

Решение

Найдем угловое ускорение: $a_\tau = \varepsilon R$ — (1); $\varepsilon = \frac{\omega}{t}$ — (2). Угловая скорость $\omega = 2\pi n = \frac{2\pi N}{t}$, отсюда $t = \frac{2\pi N}{\omega}$ — (3). С другой стороны, $\omega = \frac{v}{R}$ — (4). Скорость v найдем из уравнения кинетической энергии: $W_к = \frac{mv^2}{2}$, отсюда $v = \sqrt{\frac{2W_к}{m}}$ — (5). Подставив уравнение (5) в (4), получим $\omega = \sqrt{\frac{2W_к}{mR^2}}$ — (6). Подставив уравнение (3) в (2), с учетом (6), найдем: $\varepsilon = \frac{\omega^2}{2\pi N} = \frac{2W_к}{mR\pi N}$. Тогда из (1): $a_\tau = \frac{W_к R}{mR^2\pi N} = \frac{W_к}{mR\pi N}$; $a_\tau \approx 0{,}2$ м/с^2.

2.55 Тело массой $m = 1$ кг скользит сначала по наклонной плоскости высотой $h = 1$ м и длиной склона $l = 10$ м, а затем по горизонтальной поверхности. Коэффициент трения на всем пути $k = 0{,}05$. Найти: а) кинетическую энергию $W_к$ тела у основания плоскости; б) скорость v тела у основания плоскости; в) расстояние S, пройденное телом по горизонтальной поверхности до остановки.

Решение



а) При равнопеременном вращательном движении угловая скорость $\omega = \omega_0 + \varepsilon t$. По условию $\omega_0 = 0$, тогда $\omega = \varepsilon t$, при $t = 1$ с угловая скорость $\omega = 3.14$ рад/с.

б) Линейная скорость $v = \omega R$, при $t = 1$ с имеем $v = 0{,}314$ м/с.

в) Тангенциальное ускорение $a_\tau = \varepsilon R$ постоянно во все время движения; при $t = 1$ с имеем $a_\tau = 0{,}314$ м/с^2.

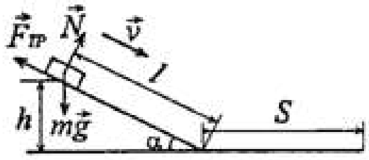
г) Нормальное ускорение $a_n = \omega^2 R = \varepsilon^2 t^2 R$, при $t = 1$ с имеем $a_n = 0{,}986$ м/с^2.

д) Полное ускорение $a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} = a_\tau\sqrt{1 + \varepsilon^2 t^4}$; при $t = 1$ с имеем $a = 1{,}03$ м/с^2.

е) $\sin\alpha = \dfrac{a_\tau}{a} = \dfrac{1}{\sqrt{1 + \varepsilon^2 t^4}}$, где α — угол между вектором полного ускорения и радиусом колеса. К концу первой секунды $\sin\alpha = \dfrac{a_\tau}{a_n} = \dfrac{0.314}{1{,}03} = 0{,}305$ и $\alpha = 17°46'$.

2.56 Тело скользит сначала по наклонной плоскости составляющей угол $\alpha = 8°$ с горизонтом, а затем по горизонтальной поверхности. Найти коэффициент трения на всем пути, если известно, что тело проходит по горизонтальной плоскости то же расстояние, что и по наклонной плоскости.

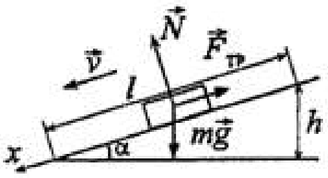
Решение



В начальный момент времени тело обладает потенциальной энергией $W_п = mgh$. Когда тело оказалось в нижней точке наклонной плоскости, часть его потенциальной энергии перешла в кинетическую энергию, а оставшаяся часть пошла на работу против сил трения. $W_п = W_к + A_{тр}$; $mgh = \frac{mv^2}{2} + F_{тр}s_1$ — (1). Преобразуя уравнение (1), получим: $mgs_1 \times \sin\alpha = \frac{mv^2}{2} + kmg\cos\alpha s_1$; $2gs_1(\sin\alpha - k\cos\alpha) = v^2$ — (2). На горизонтальном участке пути вся кинетическая энергия тела пошла на совершение работы против сил трения. $W_к = A_{тр}$; $\frac{mv^2}{2} = kmgs_2$, откуда $v^2 = 2kgs_2$ — (3). Решая совместно (2) и (3), получим: $2kgs_2 = 2gs_1(\sin\alpha - \cos\alpha)$; $k = \sin\alpha - k\cos\alpha$, отсюда $k(1+\cos\alpha) = \sin\alpha$; $k = \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}$; $k = \frac{0,125}{1,992} = 0,06$.

2.57 Тело массой m = 3 кг, имея начальную скорость $v_0 = 0$, скользит по наклонной плоскости высотой h = 0,5 м и длиной склона l = 1 м и приходит к основанию наклонной плоскости со скоростью v = 2,45 м/с. Найти коэффициент трения k тела о плоскость и количество теплоты Q, выделенное при трении.

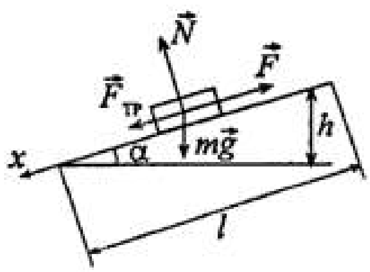
Решение



В начальный момент времени тело обладает потенциальной энергией $W_п = mgh$. Когда тело оказалось в нижней точке наклонной плоскости, часть его потенциальной энергии перешла в кинетическую энергию, а оставшаяся часть пошла на работу против сил трения. $W_п = W_k + A_{тр}$; $mgh = \dfrac{mv^2}{2} + F_{тр}s_1$ — (1). Преобразуя (1), получим: $kg\cos\alpha l = gh - \dfrac{v^2}{2} = \dfrac{2gh - v^2}{2}$, откуда $k = \dfrac{2gh - v^2}{2g\cos\alpha}$; $k = 0{,}22$. Количество выделившейся при трении теплоты равно $Q = F_{тр} \cdot l = kmg\cos\alpha \cdot l$; $Q = 5{,}7$ Дж.

2.58 Автомобиль массой m = 2 т движется в гору с уклоном 4 м на каждые 100 м пути. Коэффициент трения k = 0,08. Найти работу A, совершаемую двигателем автомобиля на пути S = 3 км, и мощность N развиваемую двигателем, если известно, что путь S = 3 км был пройден за время t = 4 мин.

Решение

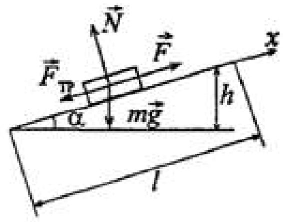


В случае равномерного движения автомобиля $a = 0$, тогда согласно второму закону Ньютона сила тяги двигателя $F = F_{тр} + mg\sin\alpha$ или $F = mg(k\cos\alpha + \sin\alpha)$, где $\sin\alpha = = h/l$; $\sin\alpha = 0{,}04$; $\cos\alpha = = 0{,}999$. Работа силы $\bar{F}$ на пути s: $A = Fs = mgs(k\cos\alpha + \sin\alpha)$; $A = 7$ МДж. Мощность двигателя $N = A/t$; $N = 29{,}2$ кВт.

2.59 Какую мощность N развивает двигатель автомобиля массой m = 1 т, если известно, что автомобиль едет с постоянной скоростью v = 36 км/ч: а) по горизонтальной дороге; б) в гору с уклоном 5 м на каждые 100 м пути; в) под гору с тем же уклоном? Коэффициент трения k = 0,07.

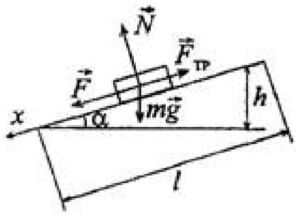
Решение

Требуется найти мощность, развиваемую двигателем автомобиля, т.е. мощность силы F. Выразим F для всех случаев из второго закона Ньютона. а) Т.к. $v = const$, то $F = F_{тр} = kmg$. При движении автомобиля по горизонтальной дороге мощность равна $N = Fv = kmgv = 6{,}9$ кВт.



б) При движении в гору сила тяги двигателя $F = mg\sin\alpha + F_{тр}$, где $F_{тр} = kmg\cos\alpha$; следовательно, $F = mg(k\cos\alpha + \sin\alpha)$, тогда мощность $N = mgv(k\cos\alpha + \sin\alpha)$; Угол наклона дороги найдем из соотношения: $\sin\alpha = \dfrac{h}{l} = \dfrac{5}{100} = 0{,}05$; $\alpha \approx 3°$; $\cos\alpha = 0{,}998$.

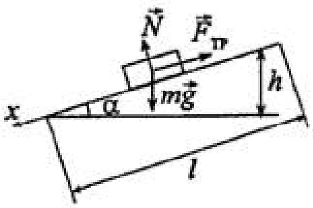
$N = 11{,}8$ кВт.



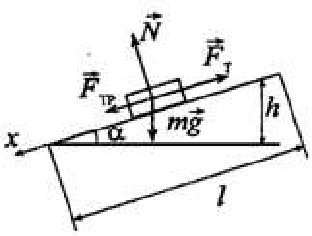
в) При движении под гору сила тяги двигателя $F = F_{тр} - mg\sin\alpha$; где $F_{тр} = kmg\cos\alpha$, тогда получим $F = kmg\cos\alpha - mg\sin\alpha$; $F = mg(k\cos\alpha - \sin\alpha)$, мощность $N = mgv(k\cos\alpha - \sin\alpha)$; $N \approx 2$ кВт.

2.60 Автомобиль массой m = 1 т движется при выключенном моторе с постоянной скоростью v = 54 км/ч под гору с уклоном 4 м на каждые 100 м пути. Какую мощность N должен развивать двигатель автомобиля, чтобы автомобиль двигался с той же скоростью в гору?

Решение



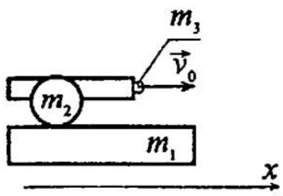
Уравнение движения автомобиля под гору $mg\sin\alpha - F_{тр} = 0$ или $F_{тр} = mg\sin\alpha$. С другой стороны, $F_{тр} = kmg\cos\alpha$, тогда $kmg\cos\alpha = mg\sin\alpha$, откуда $k = tg\alpha$.



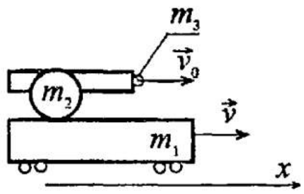
При движении автомобиля вверх по второму закону Ньютона сила тяги двигателя $F_т = F_{тр} + mg \times \sin\alpha$; $F_т = mg(k\cos\alpha + \sin\alpha)$. Тогда мощность, развиваемая двигателем: $N = F_т v = mgv \times (k\cos\alpha + \sin\alpha)$; $N = mgv \times \left(\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\cos\alpha + \sin\alpha\right)$; $N = 2m \times gv\sin\alpha = 2mgv\dfrac{h}{l}$; $N = 11{,}8$ кВт.

2.61 На рельсах стоит платформа массой m_1 = 10 т. На платформе закреплено орудие массой m_2 = 5 т, из которого производится выстрел вдоль рельсов. Масса снаряда m_3 = 100 кг; его начальная скорость относительно орудия V_0 = 500 м/с. Найти скорость u платформы в первый момент после выстрела, если: а) платформа стоит неподвижно; б) платформа двигалась со скоростью v = 18 км/ч и выстрел был произведен в направлении, противоположном направлению ее движения.

Решение

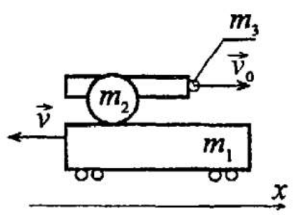


а) При неподвижной платформе начальная скорость снаряда относительно земли равна его скорости v_0 относительно орудия. Систему «платформа — орудие — снаряд» можно считать замкнутой в проекции на ось x при условии, что силой трения качения платформы можно пренебречь. Тогда в проекции на ось x импульс системы до выстрела $p_x = (m_1 + m_2 + m_3) \cdot v = 0$, т.к. $v = 0$. Импульс системы после выстрела $p'_x = m_3 v_0 + (m_1 + m_2) \cdot u$. По закону сохранения импульса $p_x = p'_x$ или $0 = m_3 v_0 + (m_1 + m_2) \cdot u$, откуда $u = -\dfrac{m_3 v_0}{m_1 + m_2}$; $u = -12$ км/ч. Знак «–» указывает, что платформа стала двигаться в направлении, противоположном направлению движения снаряда.



б) Если выстрел был произведен в направлении движения платформы, то начальная скорость снаряда относительно земли равна $v_0 + v$. На основании закона сохранения импульса имеем: $(m_1 + m_2 + m_3) \cdot v = m_3 (v_0 + v) + (m_1 + m_2) \cdot u$ — (2), откуда $u = \dfrac{(m_1 + m_2 + m_3) \cdot v - m_3 (v_0 - v)}{m_1 + m_2}$;

$u = 6$ км/ч.



в) Если выстрел был произведен в направлении, противоположном направлению движения платформы, то при $v_0 > 0$ имеем $v < 0$. Тогда уравнение (2) имеет вид: $-(m_1 + m_2 + m_3) \cdot v = m_3 (v_0 - v) + (m_1 + m_2) \cdot u$, откуда

$$u = -\frac{(m_1 + m_2 + m_3) \cdot v + m_3 (v_0 - v)}{m_1 + m_2};$$

$u = -30$ км/ч.

2.62 Из ружья массой m_1 = 5 кг вылетает пуля массой m = 5 г со скоростью v_2 = 600 м/c. Найти скорость v_1отдачи ружья.

Решение

Согласно закону сохранения импульса $m_1v_1 - m_2v_2 = 0$,

отсюда $v_1 = \frac{m_2v_2}{m_1}$; $v_1 = 0{,}6$ м/с.

2.63 Человек массой m_1 = 60 кг, бегущий со скоростью v_1 = 8 км/ч, догоняет тележку массой m_2 = 80 кг, движущуюся со скоростью v_2 = 2,9 км/ч, и вскакивает на нее. С какой скоростью u будет двигаться тележка? С какой скоростью u' будет двигаться тележка, если человек бежал ей навстречу?

Решение

Система «человек — тележка» замкнута в проекции на горизонтальную ось. а) Человек догоняет тележку. По закону сохранения импульса $m_1v_1 + m_2v_2 = (m_1 + m_2)\cdot u$, откуда $u = \frac{m_1v_1 + m_2v_2}{m_1 + m_2}$; $u = 5{,}14$ км/ч. б) Человек бежит навстречу тележке. По закону сохранения импульса $m_1v_1 - m_2v_2 = (m_1 + m_2)\cdot u'$, откуда $u' = \frac{m_1v_1 - m_2v_2}{m_1 + m_2}$; $u' = 1{,}71$ км/ч.

2.64 Снаряд массой m_1 = 100 кг, летящий горизонтально вдоль железнодорожного пути со скоростью v_1 = 500 м/с, попадает в вагон с песком, масса которого m_2 = 10 т, и застревает в нем. Какую скорость u получит вагон, если: а) вагон стоял неподвижно; б) вагон двигался со скоростью v_2 = 36 км/ч в том же направлении, что и снаряд; в) вагон двигался со скоростью v_2 = 36 км/ч в направлении, противоположном движению снаряда?

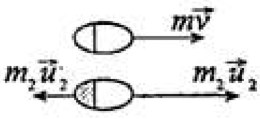
Решение

а) Будем считать удар абсолютно неупругим, тогда в проекции на горизонтальную ось по закону сохранения импульса: $m_1v_1 = (m_1 + m_2)u$, отсюда $u = \frac{m_1v_1}{m_1 + m_2}$; $u \approx 5$ м/с.

б) $m_1v_1 + m_2v_2 = (m_1 + m_2)u$, следовательно, $u = \frac{m_1v_1 + m_2v_2}{m_1 + m_2}$; $u \approx 15$ м/с. в) $m_1v_1 - m_2v_2 = (m_1 + m_2)u$, следовательно, $u = \frac{m_1v_1 - m_2v_2}{m_1 + m_2}$; $u \approx -5$ м/с, т. е. вагон продолжает двигаться в том же направлении, но с меньшей скоростью.

2.65 Граната, летящая со скоростью v = 10 м/с, разорвалась на два осколка. Больший осколок, масса которого составляла 0,6 массы всей гранаты, продолжал двигаться в прежнем направлении, но с увеличенной скоростью u_1 = 25 м/с. Найти скорость u_2 меньшего осколка.

Решение



При взрыве внутренние силы намного превышают внешние. Следовательно, можно считать, что система замкнута и закон сохранения импульса использовать в векторной форме. Импульс системы до разрыва $\vec{p} = m\vec{v}$. Импульс системы после разрыва $\vec{p}' = 0{,}6m\vec{u} + 0{,}4m\vec{u}_2$. В проекции на горизонтальную ось закон сохранения импульса: $mv = m_1u_1 + m_2u_2$ или $mv = 0{,}6m \cdot u_1 + 0.4m \cdot u_2$; $v = 0{,}6u_1 + 0.4u_2$, откуда $u_2 = \dfrac{v - 0{,}6u_1}{0{,}4} = -12{,}5$ м/с. Полученный результат от массы не зависит. Пусть масса всей гранаты $m = 1$ у.е., масса большего осколка $m_1 = 0{,}6$ у.е., масса меньшего осколка $m_2 = 0{,}4$ у.е. Тогда вектор импульса: всей гранаты — $mv = 10$ у.е.; большего осколка — $m_1u_1 = 15$ у.е.; меньшего осколка — $m_2u_2 = 5$ у.е. Направление векторов показано на рисунке.

2.66 Тело массой m_1 = 1 кг, движущееся горизонтально со скоростью v_1 = 1 м/с, догоняет второе тело массой m_2 = 0,5 кг и неупруго соударяется с ним. Какую скорость и получат тела, если: а) второе тело стояло неподвижно; б) второе тело двигалось со скоростью v_2 = 0,5 м/с в направлении, что и первое тело; в) второе тело двигалось со скоростью v_2 = 0,5 м/с в направлении, противоположном направлению движения первого тела.

Решение

В каждом случае запишем закон сохранения импульса и выразим скорость u. а) $m_1v_1 = (m_1 + m_2) \cdot u$; $u = \dfrac{m_1v_1}{m_1 + m_2}$; $u = 0{,}67$ м/с. б) $m_1v_1 + m_2v_2 = (m_1 + m_2) \cdot u$; $u = \dfrac{m_1v_1 + m_2v_2}{m_1 + m_2}$; $u = 0{,}87$ м/с. в) $m_1v_1 - m_2v_2 = (m_1 + m_2) \cdot u$; $u = \dfrac{m_1v_1 - m_2v_2}{m_1 + m_2}$; $u = 0{,}5$ м/с.

2.67 Конькобежец массой M = 70 кг, стоя на коньках на льду, бросает в горизонтальном направлении камень массой m = 3 кг со скоростью v = 8 м/с. На какое расстояние s откатится при этом конькобежец, если коэффициент трения коньков о лед k = 0,02?

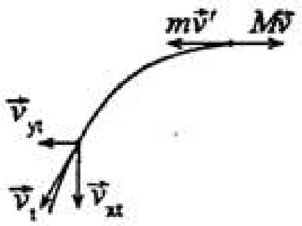
Решение

Движение конькобежца является равнозамедленным, пройденный им путь $s = v_0^2/2a$ — (1). По закону сохранения импульса $Mv_0 = mv$, откуда $v_0 = mv/M$ — (2). Ускорение a можно найти по второму закону Ньютона: $F_{тр} = ma$. Т.к. $F_{тр} = kmg$, то $kmg = ma$; $a = kg$ — (3). Подставив (2) и (3) в (1), получим $s = \dfrac{m^2v^2}{2M^2kg}$; $s = 0{,}3$ м.

2.68 Человек, стоящий на неподвижной тележке, бросает в горизонтальном направлении камень массой m = 2 кг. Тележка с человеком покатилась назад, и в первый момент бросания ее скорость была v = 0,1 м/с. Масса тележки с человеком M = 100 кг. Найти кинетическую энергию $W_к$ брошенного камня через время t = 0,5 с после начала движения.

Решение

Обозначим v' — скорость камня в начальный момент времени, v_t — его скорость в момент времени $t = 0{,}5$ с. По закону сохранения импульса $Mv = mv'$ — (1); $W_k = \dfrac{mv_t^2}{2}$ — (2);



$v_t^2 = v_{xt}^2 + v_{yt}^2$, где $v_{xt} = v'$; $v_{yt} = gt$. Из (1) $v' = \dfrac{Mv}{m_1}$, тогда

$v_t^2 = \dfrac{M^2v^2}{m^2} + g^2t^2 = \dfrac{M^2v^2 + m^2g^2t^2}{m^2}$ — (3). Подставив (3) в (2), получим $W_k = \dfrac{M^2v^2 + m^2g^2t^2}{2m}$; $W_k = 49$ Дж.

2.69 Тело массой m_1 = 2 кг движется навстречу второму телу массой m_2 = 1,5 кг и неупруго соударяется с ним. Скорости тел непосредственно перед ударом были v_1 = 1 м/с и v_2 = 2 м/с . Какое время t будут двигаться эти тела после удара, если коэффициент трения k = 0,05 ?

Решение

Будем считать удар абсолютно неупругим. По закону сохранения импульса $m_1v_1 - m_2v_2 = (m_1 + m_2)\cdot u$, отсюда $u = \frac{m_1v_1 - m_2v_2}{m_1 + m_2}$ — (1). С другой стороны, $u = at$ — (2), где ускорение a можно выразить из второго закона Ньютона $F_{тр} = (m_1 + m_2)\cdot a$; $k(m_1 + m_2)\cdot g = (m_1 + m_2)\cdot a$, откуда $a = kg$ — (3). Выразим из (2): $t = \frac{u}{a}$. Подставим в данное уравнение (1) и (3): $t = \frac{m_2v_2 - m_1v_1}{kg(m_1 + m_2)}$; $t = 0,58$ с.

2.70 Автомат выпускает пули с частотой n = 600 мин$^{-1}$. Масса каждой пули m = 4 г, ее начальная скорость v = 500 м/с. Найти среднюю силу отдачи F при стрельбе.

Решение

Среднюю силу отдачи можно найти по второму закону Ньютона $F = ma = m\frac{v}{t}$, где $t = \frac{1}{n}$ — время, за которое автомат выпускает одну пулю. По условию $n = 600$ мин$^{-1} = 10$ с$^{-1}$. Отсюда $F = mvn$; $F = 20$ Н.

2.71 На рельсах стоит платформа массой m_1 = 10 т. На платформе закреплено орудие массой m_2 = 5 т, из которого производится выстрел вдоль рельсов. Масса снаряда m_3 = 100 кг, его скорость относительно орудия v_0 = 500 м/с. На какое расстояние s откатится платформа при выстреле, если: а) платформа стояла неподвижно; б) платформа двигалась со скоростью v = 18 км/ч и выстрел был произведен в направлении ее движения; в) платформа двигалась со скоростью v = 18 км/ч и выстрел был произведен в направлении противоположном направлению ее движения? Коэффициент трения платформы о рельсы k = 0,002.

Решение

а) По закону сохранения импульса $m_3v_0 = (m_1 + m_2)\cdot u$, откуда $u = \dfrac{m_3v_0}{m_1 + m_2}$ — (1). По второму закону Ньютона $F_{тр} = (m_1 + m_2)\cdot a$ или $k(m_1 + m_2)\cdot g = (m_1 + m_2)\cdot a$, откуда $a = kg$ — (2). Расстояние, на которое откатится платформа, $s = ut - \dfrac{at^2}{2}$, где $u = at$ — скорость платформы в первый момент после выстрела. $t = \dfrac{u}{a}$, тогда $s = \dfrac{u^2}{a} - \dfrac{au^2}{2a^2} = \dfrac{u^2}{2a}$. Подставив (1) и (2), получим, $s = \dfrac{m_3^2v_0^2}{2(m_1 + m_2)^2 kg}$; $s = 284$ м.

б) По закону сохранения импульса $m_3v_0 - (m_1 + m_2)\times$ $\times u = (m_1 + m_2 + m_3)\cdot v$, откуда $u = \dfrac{m_3v_0 - (m_1 + m_2 + m_3)\cdot v}{m_1 + m_2}$; $u = -1{,}7$ м/с и будет направлено в обратную сторону относительно v_0 и v. Расстояние, на которое откатится платформа: $s = \dfrac{u^2}{2a} = \dfrac{u^2}{2kg}$; $s = 73{,}7$ м.

в) По закону сохранения импульса $(m_1 + m_2 + m_3)\cdot v =$ $= (m_1 + m_2)\cdot u - m_3v_0$, откуда $u = \dfrac{(m_1 + m_2 + m_3)\cdot v + m_3v_0}{m_1 + m_2}$; $u = 8{,}4$ м/с направление выбрано правильно. Пройденный платформой путь $s = \dfrac{u^2}{2kg}$; $s = 1800$ м.

2.72 Из орудия массой $m_1 = 5$ т вылетает снаряд массой $m_2 = 100$ кг. Кинетическая энергия снаряда при вылете $W_{к2} = 7{,}5$ МДж. Какую кинетическую энергию $W_{к1}$ получает орудие вследствие отдачи?

Решение

Согласно закону сохранения импульса $m_1v_1 = m_2v_2$ — (1). Кинетическая энергия орудия сразу после выстрела $W_{к1} = \frac{m_1v_1^2}{2}$ — (2). Кинетическая энергия снаряда $W_{к2} = \frac{m_1v_2^2}{2}$ — (3). Из (1) $v_1 = \frac{m_2v_2}{m_1}$; из (3) $v_2^2 = \frac{2W_{к2}}{m_2}$, тогда $v_1^2 = \frac{m_2^2 \cdot 2W_{к2}}{m_1^2 \cdot m_2} = \frac{2m_2W_{к2}}{m_1^2}$ — (4). Подставив (4) в (2), получим $W_{к1} = \frac{m_1 2m_2W_{к2}}{2m_1^2} = \frac{m_2}{m_1}W_{к1}$; $W_{к1} = 150$ кДж.

2.73 Тело массой $m_1 = 2$ кг движется со скоростью $v_1 = 3$ м/с и нагоняет тело массой $m_2 = 8$ кг, движущееся со скоростью $v_2 = 1$ м/с. Считая удар центральным, найти скорости u_1 и u_2 тел после удара, если удар а) неупругий; б) упругий.

Решение

Считаем, что движение происходит вдоль горизонтальной оси в одном направлении. а) По закону сохранения импульса $m_1v_1 + m_2v_2 = (m_1 + m_2) \cdot u$, где u — общая скорость двух тел после неупругого удара. Отсюда $u = \frac{m_1v_1 + m_2v_2}{m_1 + m_2}$; $u_1 = u_2 = u = 1{,}4$ м/с. б) Запишем закон сохранения импульса и закон сохранения энергии: $m_1v_1 + m_2v_2 = m_2u_2 + m_1u_1$ — (1); $\frac{m_1v_1^2}{2} + \frac{m_2v_2^2}{2} = \frac{m_1u_1^2}{2} + \frac{m_2u_2^2}{2}$ — (2). Из (2) получим $m_1v_1^2 + m_2v_2^2 = m_1u_1^2 + m_2u_2^2$ — (3). Преобразовав (1) и (3), решим систему уравнений: $\begin{cases} m_1(v_1 - u_1) = m_2(u_2 - v_2), \\ m_1(v_1^2 - u_1^2) = m_2(u_2^2 - v_2^2). \end{cases}$ Разделив первое уравнение на второе, получим: $\frac{v_1 - u_1}{v_1^2 - u_1^2} = \frac{u_2 - v_2}{u_2^2 - v_2^2}$, откуда $v_1 + u_1 = u_2 + v_2$ или $u_2 = v_1 + u_1 - v_2$ — (4). Тогда из (1) $u_1 = \frac{m_1v_1 + m_2v_2 - m_2(v_1 + u_1 - v_2)}{m_1}$; $u_1\left(1 + \frac{m_2}{m_1}\right) = v_1 + \frac{m_2}{m_1} \times (2v_2 - v_1)$; $u_1 = \frac{v_1 + m_2(2v_2 - v_1)/m_1}{1 + m_2/m_1}$ — (5). Подставляя числовые данные в (5) и (4), получим $u_1 = -0{,}2$ м/с; $u_2 = 1{,}8$ м/с.

2.74 Тело массой $m_1 = 2$ кг движется со скоростью $v_1 = 3$ м/с и нагоняет тело массой $m_2 = 8$ кг, движущееся со скоростью $v_2 = 1$ м/с. Найти соотношение между массами m_1 и m_2 тел, чтобы при упругом ударе первое тело остановилось?

Решение

Воспользовавшись формулой, полученной в предыдущей задаче, и приравняв скорость первого тела после удара u_1 к нулю, найдем соотношение масс m_1 и m_2. Имеем $u_1 = \frac{v_1 + m_2(2v_2 - v_1)/m_1}{1 + m_2/m_1} = 0$. Следовательно, $v_1 + \frac{m_2}{m_1} \times$ $\times (2v_2 - v_1) = 0$; $\frac{m_2}{m_1} = \frac{v_1}{v_1 - 2v_2}$, откуда $\frac{m_2}{m_1} = \frac{3}{3-2} = 3$ или $m_2 = 3m_1$.

2.75 Тело массой $m = 3$ кг движется со скоростью $v_1 = 4$ м/с и ударяется о неподвижное тело такой же массы. Считая удар центральным и неупругим, найти количество теплоты Q, выделившееся при ударе.

Решение

Первое тело до удара обладало кинетической энергией $W_к = \frac{m_1 v^2}{m_1 + m_2}$. После удара оба тела начали двигаться с общей скоростью $u = \frac{m_1 v}{m_1 + m_2}$. Кинетическая энергия обоих тел после удара стала $W'_к = \frac{(m_1 + m_2) \cdot u^2}{2}$; $W'_к = \frac{m_1^2 v^2}{2(m_1 + m_2)}$. Разность $W_{к1} - W'_к$ равна количеству теплоты Q, выделившемуся при ударе: $Q = (m_1 v^2 / 2) - \frac{m_1^2 v^2}{2(m_1 + m_2)}$; $Q = 12$ Дж.

2.76 Тело массой $m_1 = 5$ кг ударяется о неподвижное тело массой $m_2 = 2{,}5$ кг, которое после удара начинает двигаться с кинетической энергией $W'_{к2} = 5$ Дж. Считая удар центральным и упругим, найти кинетическую энергию $W_{к1}$ и $W'_{к1}$ первого тела до и после удара.

Решение

Система тел m_1 и m_2 замкнута в проекции на горизонтальную ось. В соответствии с условием движение происходит также вдоль горизонтальной оси. Согласно закону сохранения импульса в проекции на ось $m_1v_1 = m_1v_1' + m_2v_2'$ — (1), где v_1' и v_2' — скорости первого и второго тела после удара. Часть своей кинетической энергии первое тело в момент удара передает второму телу. $W_{к1} = W_{к1}' + W_{к2}'$ — (2); $\frac{m_1v_1^2}{2} = \frac{m_1(v_1')^2}{2} + W_{к2}'$ или $m_1v_1^2 = m_1(v_1')^2 + 2W_{к2}'$ — (3). Кинетическая энергия второго тела после удара $W_{к2}' = \frac{m_2(v_2')^2}{2}$, откуда $(v_2')^2 = \frac{2W_{к2}'}{m_2}$ — (4).

Подставив (4) в (1), получим $m_1v_1 = m_1v_1' + m_2\sqrt{\frac{2W_{к2}'}{m_2}} = m_1v_1' + \sqrt{2m_2W_{к2}'}$, отсюда $v_1 = \frac{m_1v_1' + \sqrt{2m_2W_{к2}'}}{m_1}$ — (5). Подставив (5) в (3), найдем скорость первого тела после удара.

$$m_1\frac{\left(m_1v_1' + \sqrt{2m_2W_{к2}'}\right)^2}{m_1^2} = m_1(v_1')^2 + 2W_{к2}'; \quad \left(m_1v_1' + \sqrt{2m_2W_{к2}'}\right)^2 = $$

$$= (m_1v_1')^2 + 2m_1W_{к2}'; \quad (m_1v_1')^2 + 2m_1v_1'\sqrt{2m_2W_{к2}'} + 2m_2W_{к2}' = $$

$$= (m_1v_1')^2 + 2m_1W_{к2}', \quad \text{откуда} \quad v_1' = \frac{2W_{к2}'(m_1 - m_2)}{2m_1\sqrt{2m_2W_{к2}'}} = $$

$$= \frac{\sqrt{W_{к2}'}(m_1 - m_2)}{m_1\sqrt{2m_2}}.$$ Поскольку $W_{к1}' = \frac{m_1(v_1')^2}{2}$, то

$$W_{к1}' = \frac{m_1W_{к2}'(m_1 - m_2)^2}{4m_1^2m_2} = \frac{W_{к2}'(m_1 - m_2)^2}{4m_1m_2}; \qquad W_{к1}' = 0{,}62 \text{ Дж}.$$

Тогда из (2) $W_{к1} = 5{,}62$ Дж.

2.77 Тело массой $m_1 = 5$ кг ударяется о неподвижное тело массой $m_2 = 2{,}5$ кг. Кинетическая энергия системы двух тел непосредственно после удара стала $W'_к = 5$ Дж. Считая удар центральным и неупругим, найти кинетическую энергию $W_{к1}$ первого тела до удара.

Решение

Движение осуществляется вдоль горизонтальной оси. Согласно закону сохранения импульса $m_1 v_1 = (m_1 + m_2)\cdot u$ — (1), где v_1 — скорость первого тела до удара, u — скорость системы двух тел после удара. Кинетическая энергия первого тела до удара $W_{к1} = \frac{m_1 v_1^2}{2}$ — (2). Из (1) $v_1 = \frac{(m_1 + m_2)\cdot u}{m_1}$. Найдем u из выражения для кинетической энергии системы двух тел после удара. $W_к = \frac{(m_1 + m_2)\cdot u^2}{2}$, откуда $u = \sqrt{\frac{2W_к}{m_1 + m_2}}$, тогда

$$v_1 = \frac{(m_1 + m_2)\sqrt{\frac{2W_к}{m_1 + m_2}}}{m_1}; \quad v_1 = \frac{\sqrt{2W_к(m_1 + m_2)}}{m_1} \quad — \quad (3).$$

Подставив (3) в (2), получим $W_{к1} = \frac{m_1 2W_к(m_1 + m_2)}{2m_1^2}$;

$W_{к1} = \frac{W_к(m_1 + m_2)}{m_1}$; $W_{к1} = 7{,}5$ Дж.

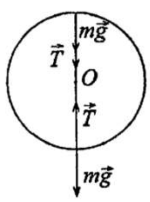
2.78 Два тела движутся навстречу друг другу и соударяются неупруго. Скорости тел до удара были $v_1 = 2$ м/с и $v_2 = 4$ м/с. Общая скорость тел после удара $u = 1$ м/с и по направлению совпадает с направлением скорости v_1. Во сколько раз кинетическая энергия $W_{к1}$ первого тела была больше кинетической энергии $W_{к2}$ второго тела?

Решение

Отношение кинетических энергий первого и второго тела до удара можно выразить следующим образом: $\frac{W_{к1}}{W_{к2}} = \frac{m_1 v_1^2}{2}\cdot\frac{2}{m_2 v_2^2} = \frac{m_1 v_1^2}{m_2 v_2^2}$ — (1). Согласно закону сохранения импульса $m_1 v_1 - m_2 v_2 = (m_1 + m_2)\cdot u$ или $m_1(v_1 - u) = m_2(u + v_2)$, откуда $\frac{m_1}{m_2} = \frac{u + v_2}{v_2 - u}$ — (2). Подставив (2) в (1), получим $\frac{W_{к1}}{W_{к2}} = \frac{v_1^2(u + v_2)}{v_2^2(v_1 - u)}$; $\frac{W_{к1}}{W_{к2}} = 1{,}25$.

2.79 Два шара с массами $m_1 = 0{,}2$ кг и $m_2 = 0{,}1$ кг подвешены на нитях одинаковой длины так, что они соприкасаются. Первый шар отклоняют на высоту $h_0 = 4{,}5$ см и отпускают. На какую высоту h поднимутся шары после удара, если удар: а) упругий; б) неупругий?

Решение

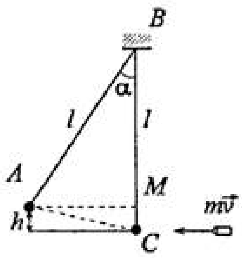


Систему шаров будем считать замкнутой. **а)** Упругий удар. Пусть v_1 — скорость первого шара в момент удара, v_1' и v_2' — скорости первого и второго шаров непосредственно после удара. Согласно закону сохранения импульса $m_1v_1 = m_1v_1' + m_2v_2'$ — (1). Если принять за нулевой уровень потенциальной энергии положение равновесия, то при отклонении первого шара он приобрел потенциальную энергию m_1gh_0, которая после удара распределилась между двумя шарами, сначала перейдя в кинетическую энергию, а затем, когда они отклонились на высоту h_1 — первый и h_2 — второй, — в потенциальную: $m_1gh_0 = m_1gh_1 + m_2gh_2$ — (2); $m_1gh_0 = \dfrac{m_1v_1^2}{2}$ — (3); $m_1gh_1 = \dfrac{m_1(v_1')^2}{2}$ — (4); $m_2gh_2 = \dfrac{m_2(v_2')^2}{2}$ — (5); Из уравнения (2) $m_1h_0 = m_1h_1 + m_2h_2$, откуда $h_2 = \dfrac{m_1}{m_2}(h_0 - h_1)$ — (6). Из уравнений (3) и (4) выразим скорости шаров: $v_1 = \sqrt{2gh_0}$; $v_1' = \sqrt{2gh_1}$; $v_2' = \sqrt{2gh_2}$. Подставив полученные выражения в (1), произведем преобразования: $m_1\sqrt{2gh_0} = m_1\sqrt{2gh_1} + m_2\sqrt{2gh_2}$; $m_1\sqrt{h_0} = m_1\sqrt{h_1} + m_2\sqrt{h_2}$ или с учетом (6); $m_1\sqrt{h_0} = m_1\sqrt{h_1} + m_2\sqrt{\dfrac{m_1}{m_2}(h_0 - h_1)}$; $m_1\left(\sqrt{h_0} - \sqrt{h_1}\right) = \sqrt{m_2m_1(h_0 - h_1)}$; $m_1^2\left(\sqrt{h_0} - \sqrt{h_1}\right)^2 = m_2m_1 \times (h_0 - h_1)$; $m_1^2\left(\sqrt{h_0} - \sqrt{h_1}\right)^2 = m_2m_1(h_0 - h_1)$; $m_1\left(\sqrt{h_0} - \sqrt{h_1}\right) = m_2\left(\sqrt{h_0} + \sqrt{h_1}\right)$; $\sqrt{h_0}(m_1 - m_2) = \sqrt{h_1}(m_1 + m_2)$; $\sqrt{h_1} = \dfrac{\sqrt{h_0}(m_1 - m_2)}{m_1 + m_2}$, отсюда $h_1 = h_0\left(\dfrac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\right)^2$; $h_1 = 0{,}005$ м.

Тогда из уравнения (6) $h_2 = 0{,}08$ м. б) Неупругий удар. Потенциальная энергия первого шара при прохождении положения равновесия перешла в кинетическую энергию. $m_1gh_0 = \dfrac{m_1v^2}{2}$ — (1), где v — скорость первого шара в нижней точке. После соударения шаров по закону сохранения импульса $m_1v = (m_1 + m_2)\cdot u$ — (2), где u — скорость системы двух шаров непосредственно после удара. Кинетическая энергия системы после отклонения шаров на высоту h перешла в потенциальную энергию. $\dfrac{(m_1 + m_2)\cdot u^2}{2} = (m_1 + m_2)\cdot gh$ — (3). Выразим из (1) v и подставим в (2) $v = \sqrt{2gh_0}$; $m_1\sqrt{2gh_0} = (m_1 + m_2)\cdot u$, откуда $u = \dfrac{m_1\sqrt{2gh_0}}{m_1 + m_2}$. Подставив полученное выражение в (3), получим $\dfrac{(m_1 + m_2)m_1^2 \cdot 2gh_0}{2(m_1 + m_2)} = (m_1 + m_2)\cdot gh$, отсюда $h = \dfrac{m_1^2h_0}{(m_1 + m_2)^2}$; $h = 0{,}02$ м.

.80 Пуля, летящая горизонтально, попадает в шар, подвешенный на невесомом жестком стержне, и застревает в нем. Масса пули в 1000 раз меньше массы шара. Расстояние от центра шара до точки подвеса стержня l = 1 м. Найти скорость v пули, если известно, что стержень с шаром отклонился от удара пули на угол α = 10°.

Решение

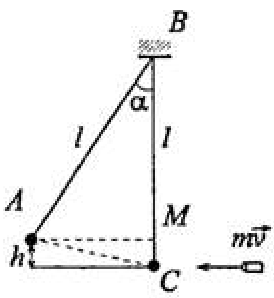


Силу сопротивления воздуха не учитываем, следовательно, систему «пуля — шар» можно считать замкнутой. Запишем закон сохранения импульса и закон сохранения энергии для данной системы: $mv = (m+M)\cdot u$ — (1), где u — скорость шара вместе с пулей после удара. В результате взаимодействия шара с пулей, он приобрел кинетическую энергию, которая после отклонения стержня на $\angle\alpha$ перешла в потенциальную энергию $\frac{(m+M)\cdot u^2}{2} = (m+M)\cdot gh$ — (2).

Из (1) выразим u: $u = \frac{mv}{m+M}$, или $u = \frac{mv}{1001m} = \frac{v}{1001}$. Из (2) получим: $\frac{u^2}{2} = gh$, $\frac{v^2}{2\cdot(1001)^2} = gh$. Найдем h: $BM = l\cos\alpha$, $h = l - BM$; $h = l - l\cos\alpha = l(1-\cos\alpha)$, тогда $v = 1001\sqrt{2gl(1-\cos\alpha)}$. $v \approx 550$ м/с.

2.81 Пуля, летящая горизонтально, попадает в шар, подвешенный на невесомом жестком стержне, и застревает в нем. Масса пули m_1 = 5 г, масса шара m_2 = 0,5 кг. Скорость пули v_1 = 500 м/с. При каком предельном расстоянии l от центра шара до точки подвеса стержня шар от удара пули поднимется до верхней точки окружности?

Решение



Запишем закон сохранения импульса и закон сохранения энергии для данной системы. $m_1v_1 = (m_1+m_2)\cdot v_2$ — (1); $\frac{(m_1+m_2)\cdot v_2^2}{2} = (m_1+m_2)gh$ — (2), где v_2 — скорость шара с пулей после удара. Высота, на которую поднимется шар $h = 2l$. Из (2) $\frac{v_2^2}{2} = 2gl$, откуда $l = \frac{v_2^2}{4g}$. Из (1) $v_2 = \frac{m_1v_1}{m_1+m_2}$, тогда $l = \frac{m_1^2v_1^2}{(m_1+m_2)^2\cdot 4g}$; $l = 0{,}64$ м.

2.82 Деревянным молотком, масса которого $m_1 = 0{,}5$ кг, ударяют о неподвижную стенку. Скорость молотка в момент удара $v_1 = 1$ м/с. Считая коэффициент восстановления при ударе молотка о стенку $k = 0{,}5$, найти количество теплоты Q, выделившееся при ударе. (Коэффициентом восстановления материала тела называют отношение скорости после удара к его скорости до удара.)

Решение

По условию $\frac{v_2}{v_1} = k$. Количество теплоты, выделившееся при ударе, равно убыли кинетической энергии молотка $Q = W_{к1} - W_{к2}$, где $W_{к1} = \frac{m_1 v_1^2}{2}$; $W_{к2} = \frac{m_1 v_2^2}{2}$. Т.к. $v_2 = kv_1$, то $Q = \frac{m_1 v_1^2}{2} - \frac{k^2 m_1 v_1^2}{2} = \frac{m_1 v_1^2 (1 - k^2)}{2}$; $Q = 0{,}188$ Дж.

2.83 Деревянным молотком, масса которого $m_1 = 0{,}5$ кг, ударяют о неподвижную стенку. Скорость молотка в момент удара $v_1 = 1$ м/с. Считая коэффициент восстановления при ударе молотка о стенку $k = 0{,}5$, найти импульс силы $F\Delta t$, полученный стенкой за время удара.

Решение

Согласно закону изменения импульса $F\Delta \bar{t} = m_1 \bar{v}_2 - m_1 \bar{v}_1$ в проекции на горизонтальную ось $F\Delta t = m_1 v_1 - (-m_1 v_2) = m_1 (v_1 + v_2)$. Учитывая, что $v_2 = kv_1$, $F\Delta t = m_1 (v_1 + kv_1) = m_1 v_1 (1 + k)$; $F\Delta t = 0{,}75$ Н·с.

2.84 Деревянный шарик массой $m = 0{,}1$ кг падает с высоты $h_1 = 2$ м. Коэффициент восстановления при ударе шарика о пол $k = 0{,}5$. Найти высоту h_2, на которую поднимется шарик после удара о пол, и количество теплоты Q, выделившееся при ударе.

Решение

Потенциальная энергия шарика mgh_1 в момент удара о пол переходит в кинетическую энергию: $mgh_1 = \frac{mv_1^2}{2}$ — (1), где v_1 — скорость шарика в момент удара. Когда шарик отскакивает от пола, он обладает кинетической энергией $\frac{mv_2^2}{2}$, которая переходит в потенциальную $mgh_2 = \frac{mv_1^2}{2}$. По условию $v_2 = kv_1$, тогда $mgh_2 = \frac{k^2 mv_1^2}{2}$ — (2). Из уравнения (1) $g = \frac{v_1^2}{2h_1}$, из уравнения (2) $g = \frac{k^2 v_1^2}{2h_2}$. Приравняв правые части уравнений, получим $\frac{v_1^2}{2h_1} = \frac{k^2 v_1^2}{2h_2}$, откуда $h_2 = k^2 h_1$; $h_2 = 0{,}25 \cdot 2 = 0{,}5$ м. Количество теплоты, выделившееся при ударе, равно убыли потенциальной энергии $Q = W_{п1} - W_{п2} = mgh_1 - mgh_2 = mg(h_1 - h_2)$; $Q = 1{,}47$ Дж.

2.85 Пластмассовый шарик, падая с высоты h_1 = 1 м несколько раз отскакивает от пола. Найти коэффициент восстановления k при ударе шарика о пол, если с момента падения до второго удара о пол прошло время t = 1,3 с.

Решение

Падая с высоты h_1, шарик подлетает к полу со скоростью v_1, а отскакивает от него со скоростью $v_2 = kv_1$. Согласно закону сохранения механической энергии $mgh_1 = \frac{mv_1^2}{2}$ и $mgh_2 = \frac{mv_2^2}{2}$, откуда $v_1 = \sqrt{2gh_1}$, а $v_2 = \sqrt{2gh_2}$. После почленного деления получим $\frac{v_2}{v_1} = \frac{kv_1}{v_1} = \frac{\sqrt{h_2}}{\sqrt{h_1}}$, т.е. $h_2 = k^2 h_1$. Промежуток времени с момента падения шарика до второго удара о пол $t = t_1 + 2t_2$, где t_1 — время падения шарика с высоты h_1 и t_2 — время падения шарика с высоты h_2. Так как $t_1 = \sqrt{\frac{2h_1}{g}}$ и $t_2 = \sqrt{\frac{2h_2}{g}} = k\sqrt{\frac{2h_1}{g}}$, то $t = \sqrt{\frac{2h_1}{g}}(1+2k)$; отсюда $k = \frac{t - \sqrt{2h_1/g}}{2\sqrt{2h_1/g}}$; $k = 0{,}94$.

2.86 Стальной шарик, падая с высоты h_1 = 1,5 м на стальную плиту, отскакивает от нее со скоростью $v_2 = 0{,}75 \cdot v_1$, где v_1 - скорость, с которой он подлетает к плите. На какую высоту h_2 он поднимется? Какое время t пройдет с момента падения до второго удара о плиту?

Решение

Рассуждая как в задаче 2.84, запишем $mgh_1 = \frac{mv_1^2}{2}$ — (1); $mgh_2 = \frac{mv_2^2}{2} = \frac{0{,}75^2 mv_1^2}{2}$ — (2). Из уравнения (1) имеем $gh_1 = \frac{v_1^2}{2}$ — (3). Из уравнения (2) $\frac{gh_2}{0{,}56} = \frac{v_1^2}{2}$ — (4). Тогда $\frac{gh_2}{0{,}56} = gh_1$, откуда $h_2 = 0{,}56h_1$; $h_2 = 0{,}56 \cdot 1{,}5 = 0{,}84$ м. Время t можно разложить на три составляющие: t_1 — время от начала падения до первого удара о плиту; t_2 — время от первого удара о плиту до подъема на высоту h_2; t_3 — время от начала падения с высоты h_2 до второго удара о плиту. $t = t_1 + t_2 + t_3$. Скорости шарика на этих участках: $v_1 = gt_1$, откуда $t_1 = \frac{\sqrt{2gh_1}}{g} = \sqrt{\frac{2h_1}{g}}$, с учетом (3); $v_2 = gt_2$, откуда $t_2 = 0{,}75t_1$, т.к. по условию $v_2 = 0{,}75v_1$; $v_3 = v_2 = gt_3$, следовательно, $t = t_1 + 2 \cdot 0{,}75t_1 = 2{,}5t_1 = 2{,}5\sqrt{\frac{2h_1}{g}}$; $t = 1{,}4$ с.

2.87 Металлический шарик, падая с высоты $h_1 = 1$ м на стальную плиту, отскакивает от нее на высоту $h_2 = 81$ см. Найти коэффициент восстановления k при ударе шарика о плиту.

Решение

Воспользуемся уравнением (3) из задачи 2.84 $h_2 = k^2 h_1$, отсюда $k = \sqrt{\frac{h_2}{h_1}}$; $k = 0{,}9$.

2.88 Стальной шарик массой $m = 20$ г, падая с высоты $h_1 = 1$ м на стальную плиту, отскакивает от нес на высоту $h_2 = 81$ см. Найти импульс силы $F\Delta t$, полученный плитой за время удара, и количество теплоты Q, выделившееся при ударе.

Решение

Рассуждая аналогично 2.84, запишем $mgh_1 = \frac{mv_1^2}{2}$ — (1); $mgh_2 = \frac{mv_2^2}{2}$ — (2). Тогда из (1) $v_1 = \sqrt{2gh_1}$ — (3), из (2) соответственно $v_2 = \sqrt{2gh_2}$ — (4). Согласно закону изменения импульса $F\Delta \vec{t} = m_1\vec{v}_2 - m_1\vec{v}_1$ или в проекции на горизонтальную ось: $F\Delta t = m\Delta v = m(v_1 - (-v_2)) = m(v_1 + v_2)$. Подставляя (3) в (4) получим $F\Delta t = m\left(\sqrt{2gh_1} + \sqrt{2gh_2}\right)$; $F\Delta t = 0{,}17$ Н·с. Количество выделившейся теплоты равно убыли потенциальной энергии $Q = mgh_1 - mgh_2 = mg \times (h_1 - h_2)$; $Q = 37{,}2$ мДж.

2.89 Движущееся тело массой m_1, ударяется о неподвижное тело массой m_2. Считая удар неупругим и центральным, найти, какая часть кинетической энергии $W_{к1}$ первого тела переходит при ударе в тепло. Задачу решить сначала в общем виде, а затем рассмотреть случаи: а) $m_1 = m_2$; б) $m_1 = 9m_2$.

Решение

Кинетическая энергия первого тела до удара $W_{к1} = \frac{m_1 v^2}{2}$; кинетическая энергия второго тела до удара $W_{к2} = 0$. После удара кинетические энергии обоих тел $W'_к = \frac{(m_1 + m_2)\cdot u^2}{2}$, где $u = \frac{m_1 v}{m_1 + m_2}$ — общая скорость тел. Следовательно, $W'_к = \frac{m_1^2 v^2}{2(m_1 + m_2)}$. Тогда кинетическая энергия, перешедшая при ударе в тепло: $W_{к1} - W'_к = \frac{m_1 v^2}{2} - \frac{m_1^2 v^2}{2(m_1 + m_2)} = \frac{m_1 v^2}{2}\left(1 - \frac{m_1}{m_1 + m_2}\right)$. Искомое отношение: $\frac{W_{к1} - W'_к}{W_{к1}} = 1 - \frac{m_1}{m_1 + m_2} = \frac{m_2}{m_1 + m_2}$. а) Если $m_1 = m_2$, то $\frac{W_{к1} - W'_к}{W_{к1}} = 0{,}5$; б) Если $m_1 = 9m_2$, то $\frac{W_{к1} - W'_к}{W_{к1}} = 0{,}1$.

2.90 Движущееся тело массой m_1, ударяется о неподвижное тело массой m_2. Считая удар упругим и центральным, найти, какую часть кинетической энергии $W_{к1}$ первое тело передает второму при ударе. Задачу решить сначала в общем виде, а затем рассмотреть случаи: а) $m_1 = m_2$; б) $m_1 = 9m_2$.

Решение

Кинетическая энергия первого тела до удара $W_{к1} = \frac{m_1 v^2}{2}$; кинетическая энергия второго тела до удара $W_{к2} = 0$. После удара второе тело приобрело кинетическую энергию $W'_{к2} = \frac{m_2 u^2}{2}$, где $u = \frac{2m_1 v}{m_1 + m_2}$. Таким образом, первое тело передало второму телу кинетическую энергию $W'_{к2} = \frac{m_2}{2}\left(\frac{2m_1 v}{m_1 + m_2}\right)^2$. Искомое отношение: $\frac{W'_{к2}}{W_{к1}} = \frac{4m_1 m_2}{(m_1 + m_2)^2}$. а) Если $m_1 = m_2$, то $\frac{W'_{к2}}{W_{к1}} = 1$; б) если $m_1 = 9m_2$, то $\frac{W'_{к2}}{W_{к1}} = 0{,}36$.

2.91 Движущееся тело массой m_1 ударяется о неподвижное тело массой m_2. Каким должно быть отношение масс m_1/m_2, чтобы при центральном упругом ударе скорость первого тела уменьшилась в 1,5 раза? С какой кинетической энергией $W'_{к2}$ начинает двигаться при этом второе тело, если первоначальная кинетическая энергия первого тела $W_{к1} = 1$ кДж?

Решение

Из условия следует, что движение происходит вдоль горизонтальной оси. Система тел m_1 и m_2 замкнута в проекции на горизонтальную ось. Запишем закон сохранения импульса и закон сохранения энергии для данного взаимодействия: $m_1 v_1 = m_1 u_1 + m_2 u_2$ — (1); $\frac{m_1 v_1^2}{2} = \frac{m_1 u_1^2}{2} + \frac{m_2 u_2^2}{2}$ — (2). Умножив (2) на 2 и учитывая, что $v_1 = 1{,}5u_1$, получим $m_1 \cdot 1{,}5u_1 = m_1 u_1 + m_2 u_2$; $m_1 \cdot 2{,}25u_1^2 = m_1 u_1^2 + m_2 u_2^2$ или $m_1 \cdot 0{,}5u_1 = m_2 u_2$ — (3); $m_1 \cdot 1{,}25u_1^2 = m_2 u_2^2$ — (4). Выразим u_2 из (3) $u_2 = \frac{0{,}5m_1 u_1}{m_2}$ — (5). Подставим это выражение в (4): $1{,}25m_1 u_1^2 = m_2\left(\frac{0{,}5m_1 u_1}{m_2}\right)^2$; $1{,}25 = \frac{0{,}25m_1}{m_2}$.

Отсюда $\frac{m_1}{m_2} = 5$. После столкновения первоначальная кинетическая энергия первого тела перераспределилась между первым и вторым телом, которые стали двигаться со скоростями u_1 и u_2 соответственно. $W_{к1} = W'_{к1} + W'_{к2}$, где $W'_{к1} = \frac{m_1 u_1^2}{2}$; $W'_{к2} = \frac{m_2 u_2^2}{2}$; $u_2^2 = \frac{1{,}25 m_1 u_1^2}{2}$. По условию $W_{к1} = \frac{m_1 v_1^2}{2} = \frac{m_1 \cdot 2{,}25 u_1^2}{m_2}$, откуда $u_1^2 = \frac{2W_{к1}}{2{,}25 m_1}$. Из (5) найдем $u_2^2 = \frac{1{,}25 m_1 \cdot 2W_{к1}}{m_2 \cdot 2{,}25 m_1} = \frac{2{,}5 W_{к1}}{2{,}25 m_2}$. Тогда $W'_{к2} = \frac{m_2 \cdot 2{,}5 \cdot W_{к1}}{2 \cdot 2{,}25 \cdot m_2} = \frac{0{,}5 \cdot W_{к1}}{0{,}9} = \frac{5}{9} W_{к1}$; $W'_{к2} = \frac{5}{9}$ кДж.

2.92 Нейтрон (масса m_0) ударяется о неподвижное ядро атома углерода ($m = 12m_0$). Считая удар центральным и упругим, найти, во сколько раз уменьшится кинетическая энергия $W_к$ нейтрона при ударе.

Решение

Кинетическая энергия нейтрона до и после удара выражается следующими соотношениями: $W_{к1} = \frac{m_0 v_1^2}{2}$ — (1); $W_{к2} = \frac{m_0 v_2^2}{2}$ — (2), откуда $\frac{W_{к1}}{W_{к2}} = \frac{v_1^2}{v_2^2}$. По закону сохранения энергии $W_{к1} = W_{к2} + W'_к$ — (3), где $W'_к$ — кинетическая энергия ядра атома углерода после взаимодействия, $W'_к = \frac{12 m_0 u^2}{2}$ — (4). Решая совместно уравнения (1) — (4), получим $m_0 v_1^2 = m_0 v_2^2 + 12 m_0 u^2$, откуда $v_1^2 = v_2^2 + 12u^2$ — (5). Согласно закону сохранения импульса $m_0 v_1 = m_0 v_2 + 12 m_0 u$, откуда $v_1 = v_2 + 12u$ или $u = \frac{v_1 - v_2}{12}$ — (6). Подставим (6) в (5) и произведем преобразования: $v_1^2 = v_2^2 + 12 \cdot \left(\frac{v_1 - v_2}{12}\right)^2$; $v_1^2 = v_2^2 + \frac{(v_1 - v_2)^2}{12}$; $v_1^2 - v_2^2 = \frac{(v_1 - v_2)^2}{12}$; $v_1 + v_2 = \frac{v_1 - v_2}{12}$; $12\left(\frac{v_1}{v_2} + 1\right) = \frac{v_1}{v_2} - 1$; $11 \frac{v_1}{v_2} = -13$. Отсюда $\frac{v_1^2}{v_2^2} = 1{,}4$, т.е. $\frac{W_{к1}}{W_{к2}} = 1{,}4$.

2.93 Нейтрон (масса m_0) ударяется о неподвижное ядро: а) атома углерода ($m = 12m_0$); б) атома урана ($m = 235m_0$). Считая удар центральным и упругим, найти, какую часть скорости v потеряет нейтрон при ударе.

Решение

а) Запишем закон сохранения импульса и закон сохранения энергии данной системы тел. $m_0 v = -m_0(v - \Delta v) + 12m_0 u$ — (1). Знак «–» указывает на изменение направления скорости нейтрона на противоположный. $\frac{m_0 v^2}{2} = \frac{m_0(v-\Delta v)^2}{2} + \frac{12m_0 u^2}{2}$ — (2). Скорость нейтрона после удара $v - \Delta v$; u — скорость ядра атома углерода после удара. Разделив (1) на m_0, получим $v = -(v - \Delta v) + 12u$, откуда $u = \frac{2(v - \Delta v)}{12}$. Подставим в уравнение (2) выражение для u и преобразуем его: $v^2 = (v - \Delta v)^2 + 12u^2$, $v^2 = (v - \Delta v)^2 + 12\left(\frac{2v - \Delta v}{12}\right)^2$, $v^2 - (v - \Delta v)^2 = \frac{(2v - \Delta v)^2}{12}$, $\Delta v(2v - \Delta v) = \frac{(2v - \Delta v)^2}{12}$, $12\Delta v = 2v - \Delta v$, $13\frac{\Delta v}{v} = 2$ и получаем $\frac{\Delta v}{v} = \frac{2}{13}$.

б) Рассуждая аналогично случаю а), запишем: $m_0 v = -m_0(v - \Delta v) + 235m_0 u$, $m_0 v^2/2 = m_0(v - \Delta v)^2/2 + \frac{235m_0 u^2}{2}$, $2v - \Delta v = 235u$ и $u = \frac{2v - \Delta v}{235}$. Подставляя в формулу (2) новые значения и преобразуя ее, получим: $v^2 = (v - \Delta v)^2 + 235u^2$, $v^2 - (v - \Delta v)^2 = \frac{(2v - \Delta v)^2}{235}$, $235\Delta v = 2v - \Delta v$; $235\Delta v = 2v - \Delta v$, $236\Delta v = 2v$ и $\frac{\Delta v}{v} = \frac{1}{118}$.

2.94 На какую часть уменьшится вес тела на экваторе вследствие вращения Земли вокруг оси?

Решение

На экваторе на тело действует сила тяготения $F=G\dfrac{mM}{R^2}$ — (1) (M — масса Земли, m — масса тела, R — радиус Земли, G — гравитационная постоянная) и сила реакции опоры N, при этом тело, участвуя в суточном вращении Земли, движется по окружности радиусом R. Составим уравнение на основании второго закона Ньютона $F-N=m\omega^2R$, где $\omega=\dfrac{2\pi}{T}$ — угловая скорость; T — период вращения Земли вокруг своей оси: $T=86400$ с. Тогда $F-N=m\cdot\left(\dfrac{2\pi}{T}\right)^2R$, откуда $N=F-$ $-\dfrac{4\pi^2mR}{T^2}$ — (2). По третьему закону Ньютона вес тела на экваторе $P_э=N$ — (3). Вес покоящегося тела для любой точки Земли численно равен силе тяжести: $P=mg$ — (4). Относительное изменение веса тела $\delta=\dfrac{P-P_э}{P}$ — (5). Решая совместно уравнения (1) — (3), получим $P_э=G\dfrac{mM}{R^2}-\dfrac{4\pi^2mR}{T^2}$ — (6). Подставляя (4) и (6) в (5), получим $\delta=1-\dfrac{GM}{gR^2}+\dfrac{4\pi^2R}{gT^2}$ — (7). Примем ускорение свободного падения $g=9{,}8$ м/с^2. Подставляя числовые данные в (7), получим $\delta=0{,}34\%$.

2.95 Какой продолжительности T должны были бы быть сутки на Земле, чтобы тела на экваторе не имели веса.

Решение

Вес тела на экваторе $P_э=G\dfrac{mM}{R^2}-\dfrac{4\pi^2mR}{T^2}$ (см. задачу 2.94). По условию $P_э=0$, тогда $\dfrac{GM}{R^2}=\dfrac{4\pi^2R}{T^2}$. Отсюда $T=\sqrt{\dfrac{4\pi^2R^3}{GM}}$. Подставляя числовые данные, получим $T=5056\text{ с}=1$ ч 24 мин.

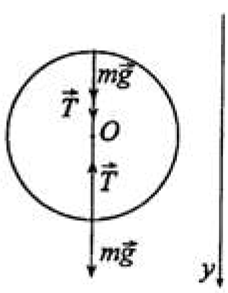
2.96 Трамвайный вагон массой m = 5 т идет по закруглению радиусом R = 128 м. Найти силу бокового давления F колес на рельсы при скорости движения v = 9 км/ч.

Решение

При равномерном движении по окружности $a_\tau = 0$ и $a = a_n$. Тогда второй закон Ньютона запишется в виде: $F = ma_n = m\frac{v^2}{R}$, отсюда $F = 245$ Н.

2.97 Ведерко с водой, привязанное к веревке длиной l = 60 см, равномерно вращается в вертикальной плоскости. Найти наименьшую скорость v вращения ведерка, при которой в высшей точке вода из него не выливается. Какова сила натяжения веревки T при этой скорости в высшей и низшей точках окружности? Масса ведерка с водой m = 2 кг.

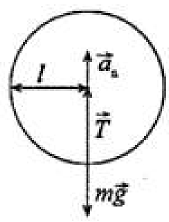
Решение



Поскольку вращение вокруг оси O является равномерным, то $a = a_n = \frac{v^2}{l}$. На воду в ведерке в высшей точке действует центробежная сила равная $m\frac{v^2}{l}$, направленная вверх и сила тяжести mg, направленная вниз. Вода не будет выливаться из ведерка при условии, что $m\frac{v^2}{l} = mg$ или $g = \frac{v^2}{l}$, откуда $v = \sqrt{lg}$; $v = 2{,}43$ м/с. В проекции на ось y уравнение движения ведра с водой в верхней точке: $ma = mg + T$, в нижней точке $ma = T - mg$. Учитывая, что $g = \frac{v^2}{l} = a_n$, получим: в верхней точке $T = 0$, в нижней точке $T = 2mg = 39{,}2$ Н.

2.98 Камень, привязанный к веревке длиной l = 50 см, равномерно вращается в вертикальной плоскости. При какой частоте вращения n веревка разорвется, если известно, что она разрывается при десятикратной силе тяжести, действующей на камень?

Решение

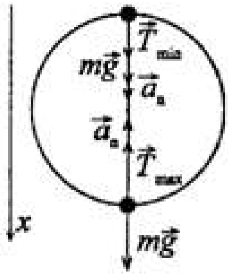


По второму закону Ньютона $T - mg = ma_n$ — (1), где $a_n = \frac{v^2}{l}$ — (2). Линейная скорость $v = \omega \cdot l$; $\omega = 2\pi n$, тогда $v = 2\pi nl$, откуда $n = \frac{v}{2\pi l}$ — (3). Из (1) $v = \sqrt{a_n l}$; Из (2) $a_n = \frac{T - mg}{m} = \frac{9mg}{m} = 9g$, тогда $v = 3\sqrt{lg}$ — (4). Подставив (4) в (3), получим $n = \frac{3\sqrt{lg}}{2\pi l} = \frac{3}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{l}}$; $n = 2{,}12$ об/с.

2.99 Камень, привязанный к веревке, равномерно вращается в вертикальной плоскости. Найти массу m камня, если известно, что разность между максимальной и минимальной силами натяжения веревки $\Delta T = 10$ Н.

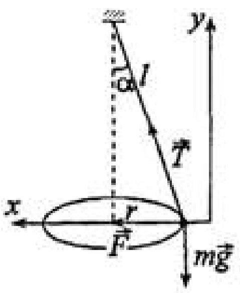
Решение

По второму закону Ньютона для верхней и нижней точек соответственно $\begin{cases} mg + T_{min} = ma_n & -(1), \\ mg - T_{max} = -ma_n & -(2). \end{cases}$ Сложив (1) и (2), получим $2mg - \Delta T = 0$; $2mg = \Delta T$, отсюда $m = \dfrac{\Delta T}{2g}$; $m \approx 0{,}5$ кг.



2.100 Гирька, привязанная к нити длиной $l = 30$ см, описывает в горизонтальной плоскости окружность радиусом $R = 15$ см. С какой частотой n вращается гирька?

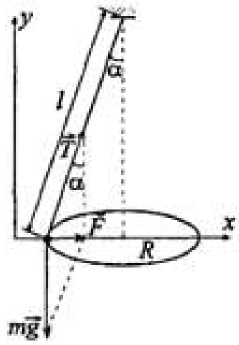
Решение



В горизонтальной плоскости на гирьку действует сила: $F = T\sin\alpha$, где $\sin\alpha = \dfrac{R}{l}$. Тогда по второму закону Ньютона $T\sin\alpha = ma_n$ ($a_\tau = 0$, т.к. движение равномерное) или $TR/l = ma_n$. По оси y: $T\cos\alpha - mg = 0$, $T = \dfrac{mg}{\cos\alpha}$, $\cos\alpha = \sqrt{1 - R^2/l^2}$. Тогда $mgR/l\cos\alpha = ma_n$ или $a_n = \dfrac{gR}{l\cos\alpha} = \dfrac{gR}{l\sqrt{1-R^2/l^2}} = \dfrac{gR}{\sqrt{l^2 - R^2}}$, но $a_n = \omega^2 R$; $\omega = 2\pi n$, следовательно, $a_n = 4\pi^2 n^2 R$, откуда $n = (1/2\pi) \times \sqrt{a_n/R}$ или $n = 1/2\pi\sqrt{g/\sqrt{l^2 - R^2}}$; $n = 59$ об/мин.

2.101 Гирька массой m = 50 г, привязанная к нити длиной l = 25 см, описывает в горизонтальной плоскости окружность. Частота вращения гирьки n = 2 об/с. Найти силу натяжения нити T.

Решение

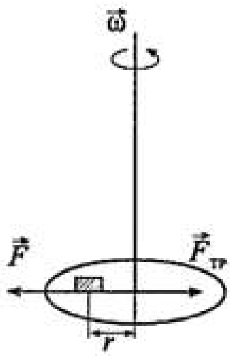


В горизонтальной плоскости на гирьку действует сила $F = T\sin\alpha$. Тогда по второму закону Ньютона $T\sin\alpha = ma_n$, где $\sin\alpha = \frac{R}{l}$. Учитывая, что $a_n = \omega^2 R = (2\pi n)^2 R$, запишем: $m(2\pi n)^2 R = T\frac{R}{l}$, откуда $T = ml(2\pi n)^2$; $T = 1{,}96$ Н.

2.102 Диск вращается вокруг вертикальной оси с частотой n = 30 об/мин. На расстоянии r = 20 см от оси вращения на диске лежит тело. Каким должен быть коэффициент трения k между телом и диском, чтобы тело не скатилось с диска?

Решение

Решаем задачу в неинерциальной системе отсчета, в системе диска, тогда при вращении диска на тело вдоль нормальной оси действует центробежная сила $\vec{F}$ и сила трения $F_{тр}$. Тело не будет соскальзывать с диска, если $F_{тр} \geq F$, т.е. $kmg \geq m\frac{v^2}{r}$ или $k \geq \frac{v^2}{rg}$. Т.к. $v = \omega \times \times r = 2\pi nr$, то $k \geq \frac{4\pi^2 n^2 r}{g}$; $k \geq 0{,}2$.



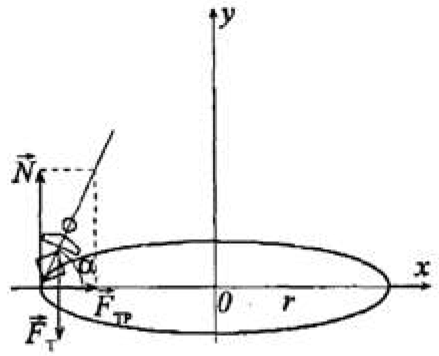
2.103 Самолет, летящий со скоростью v = 900 км/ч, делает «мертвую петлю». Каким должен быть радиус «мертвой петли» R, чтобы наибольшая сила F, прижимающая летчика к сидению, была равна: а) пятикратной силе тяжести, действующей на летчика; б) десятикратной силе тяжести, действующей на летчика?

Решение

Искомая сила $F = ma_n = \frac{mv^2}{R}$. а) $5mg = \frac{mv^2}{R}$, отсюда $R = \frac{v^2}{5g}$; $R \approx 1600$ м. б) $10mg = \frac{mv^2}{R}$, отсюда $R = \frac{v^2}{10g}$; $R \approx 711$ м.

2.104 Мотоциклист едет по горизонтальной дороге со скоростью v = 72 км/ч, делая поворот радиусом R = 100 м. На какой угол α при этом он должен наклониться, чтобы не упасть при повороте?

Решение

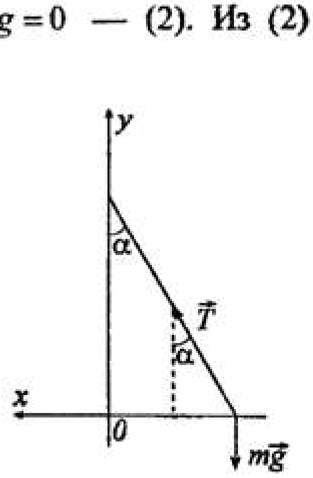


Силы, действующие на мотоциклиста: сила тяжести $\vec{F}_т = m\vec{g}$, сила реакции опоры $\vec{N}$ и сила, которая может обеспечить движение мотоциклиста по окружности, — сила трения $\vec{F}_{тр}$. Согласно законам статики, для того, чтобы мотоциклист не потерял равновесия, необходимо, чтобы равнодействующая сил $\vec{N}$ и $\vec{F}_{тр}$ была направлена по прямой, проходящей через центр тяжести. Тогда $tg\alpha = \frac{N}{F_{тр}} = \frac{1}{k}$. Запишем основной закон механики в проекциях на оси x и y: $ma_n = F_{тр}$ — (1), $0 = N - mg$ — (2), $F_{тр} = kN = kmg$ — (3). Решая совместно уравнения (1) — (3), учитывая, что $a_n = \frac{v^2}{R}$, получим $\frac{v^2}{R} = kg$ — (4). Выразив k из (4), найдем $tg\alpha = \frac{gR}{v^2}$, откуда $\alpha = 22°$.

2.105 К потолку трамвайного вагона подвешен на нити шар. Вагон идет со скоростью v = 9 км/ч по закруглению радиусом R = 36,4 м. На какой угол α отклонится при этом нить с шаром?

Решение

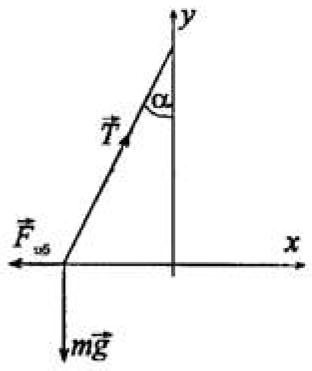
Запишем основной закон механики в проекциях на оси x и y: $T\sin\alpha = m\frac{v^2}{R}$ — (1), $T\cos\alpha - mg = 0$ — (2). Из (2) $T = \frac{mg}{\cos\alpha}$, тогда $mg\,tg\alpha = m\frac{v^2}{R}$, откуда $tg\alpha = \frac{v^2}{gR}$; $tg\alpha = 0{,}018$; $\alpha \approx 1°$.



2.106 Длина стержней центробежного регулятора l = 12,5 см. С какой частотой n должен вращаться центробежный регулятор, чтобы грузы отклонялись от вертикали на угол, равный: а) α = 60°; б) α = 30°?

Решение

Запишем второй закон Ньютона в проекциях на оси x и y: $T\sin\alpha = ma_n$ — (1); $mg - T\cos\alpha = 0$ — (2). Из (2) $T = \frac{mg}{\cos\alpha}$, тогда (1) запишем в виде $mg\cdot tg\alpha = ma_n$, откуда $a_n = g\,tg\alpha$ — (3). С другой стороны, нормальное ускорение $a_n = \omega^2 R$, где $R = l\sin\alpha$, т. е. $a_n = \omega^2 l\sin\alpha = 4\pi^2 n^2\cdot l\sin\alpha$ — (4).



Решая совместно (3) и (4), получим $n = \sqrt{\frac{a_n}{4\pi^2 l\sin\alpha}}$;

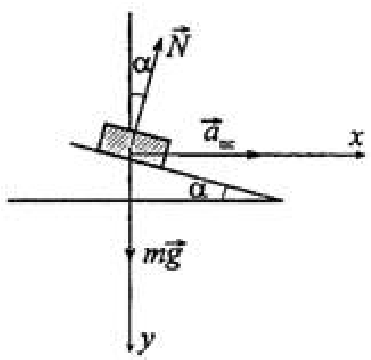
$n = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g\,tg\alpha}{l\sin\alpha}}$; $n = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{l\cos\alpha}}$.

а) $n = 2$ об/с;

б) $n = 1{,}5$ об/с.

2.107 Шоссе имеет вираж с уклоном α = 10° при радиусе закругления дороги R = 100 м. На какую скорость v рассчитан вираж?

Решение



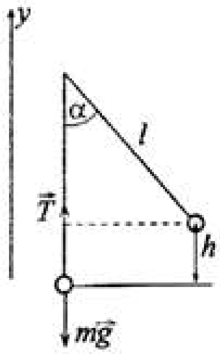
Данную задачу решаем без учета силы трения. Запишем второй закон Ньютона в проекциях на оси x и y: $N\sin\alpha = ma_n$; $mg - N\times$ $\times\cos\alpha = 0$. Нормальное ускорение $a_n = \frac{v^2}{R}$; $mg = N\cos\alpha$;

$N = \frac{mg}{\cos\alpha}$; $mg\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = m\frac{v^2}{R}$;

$g\cdot tg\alpha = \frac{v^2}{R}$; $v^2 = gR\,tg\alpha$, отсюда $v = \sqrt{gR\,tg\alpha}$; $v = 13{,}5$ м/с= =47,3км/ч.

2.108 Груз массой m = 1 кг, подвешенный на нити, отклоняют на угол α = 30° и отпускают. Найти силу натяжения нити T в момент прохождения грузом положения равновесия.

Решение

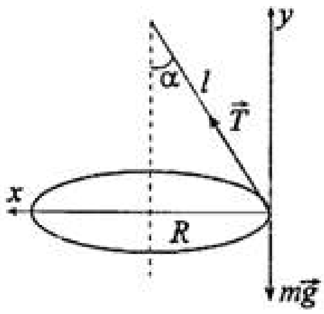


В момент прохождения грузом положения равновесия согласно второму закону Ньютона в проекции на ось y $ma_n = T - mg$ или $m\frac{v^2}{l} = T - mg$, откуда $T = mg + \frac{mv^2}{l}$, где l — длина нити. Кроме того, $mgh = \frac{mv^2}{2}$, откуда $v = \sqrt{2gh}$. Но $h = l - l\cos\alpha = l(1-\cos\alpha)$. Тогда $v = \sqrt{2gl(1-\cos\alpha)}$, а $\frac{mv^2}{l} = \frac{m}{l}2gh = \frac{m}{l}2gl(1-\cos\alpha) = 2mg(1-\cos\alpha)$ и сила натяжения $T = mg(1+2(1-\cos\alpha)) = 12{,}4$ Н.

2.109 Мальчик массой m = 45 кг вращается на «гигантских шагах» с частотой n = 16 об/мин. Длина канатов l = 5 м. Какой угол α с вертикалью составляют канаты «гигантских шагов»? Каковы сила натяжения канатов T и скорость v вращения мальчика?

Решение

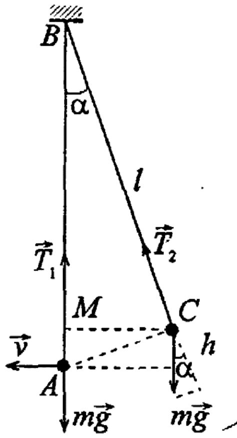
Запишем второй закон Ньютона в проекциях на оси x: $T\cos\alpha - mg = 0$ — (1) и y: $T\sin\alpha = ma_n$ — (2). Нормальное ускорение $a_n = \omega^2 R$, где $\omega = 2\pi n$, следовательно, $a_n = 4\pi^2 n^2 R$. Из рисунка видно, что $R = l\sin\alpha$ — (3),



тогда $a_n = 4\pi^2 n^2 l\sin\alpha$. Подставим выражение для a_n в (2): $T\sin\alpha = m\cdot 4\pi^2 n^2 l\sin\alpha$ или $T = 4\pi^2 n^2 lm$, $T = 632$ Н. $T\cos\alpha = mg$ из (1), откуда $\cos\alpha = \frac{mg}{T}$, $\cos\alpha = 0{,}7$, $\alpha \approx 45°30'$. Скорость найдем из выражения $v = \omega R = 2\pi nl\sin\alpha$, с учетом $\omega = 2\pi n$ и (3): $v \approx 6$ м/с.

2.110 Груз массой $m = 1$ кг, подвешенный на невесомом стержне длиной $l = 0,5$ м, совершает колебания в вертикальной плоскости. При каком угле отклонения α стержня от вертикали кинетическая энергия груза в его нижнем положении $W_к = 2,45$ Дж? Во сколько раз при таком угле отклонения сила натяжения стержня T_1 в нижнем положении больше силы натяжения стержня T_2 в верхнем положении?

Решение

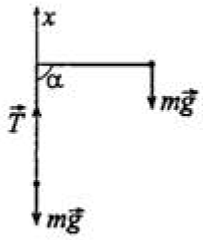


Во время колебаний груза кинетическая энергия, которой он обладает в нижней точке, переходит в потенциальную в верхнем положении. $W_к = \frac{mv^2}{2} = mgh$ — (1). Найдем h: $h = AB - MB$, $h = l - l\cos\alpha$, $h = l(1-\cos\alpha)$. Подставим значение h в (1): $mgl(1-\cos\alpha) = W_к$, $1 - \cos\alpha = \frac{W_к}{mgl}$, $\cos\alpha = 1 - \frac{2,45}{1\cdot 9,8\cdot 0,5} = 0,5$, $\alpha = 60°$. Запишем второй закон Ньютона для верхнего и нижнего положения груза: $\begin{cases} T_2 - mg\cos\alpha = ma_n & —(2), \\ T_1 - mg = ma_n & —(3); \end{cases}$ выразим из (2) и (3) T_2 и T_1: $\begin{cases} T_2 = m(a_n + g\cos\alpha) & —(4), \\ T_1 = m(a_n + g) & —(5); \end{cases}$ но $a_n = \frac{v^2}{l}$, а $v^2 = \frac{2W_к}{ml}$ $v^2 = \frac{2W_к}{ml}$, следовательно, $a_n = \frac{2W_к}{ml}$. Подставив это выражение в (4) и (5), получим следующие уравнения: $T_1 = m\cdot\left(\frac{2W_к}{ml} + g\right) = m\cdot\left(\frac{2W_к + gml}{ml}\right)$ и $T_2 = m\cdot\left(\frac{2W_к}{ml} + g\cos\alpha\right) = m\cdot\frac{2W_к + mlg\cos\alpha}{ml}$. Разделим первое уравнение на второе: $\frac{T_1}{T_2} = \frac{2W_к + mlg}{2W_к + mlg\cos\alpha}$, $T_1/T_2 = 1,3$.

2.111 Груз массой m, подвешенный на невесомом стержне, отклоняют на угол $\alpha = 90°$ и отпускают. Найти силу натяжения T стержня в момент прохождения грузом положения равновесия.

Решение

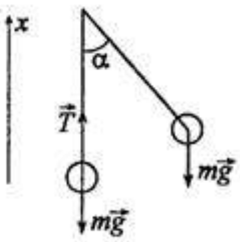
По второму закону Ньютона в момент прохождения положения равновесия: $T - mg = ma_n$ — (1), но $a_n = \frac{v^2}{l}$. Выразим из (1) T, подставив выражение для a_n: $T = mg + \frac{mv^2}{l}$. В результате преобразования потенциальной энергии в кинетическую $mgl = \frac{mv^2}{2}$, откуда $v^2 = 2gl$, тогда $T = mg + \frac{m2gl}{l} = 3mg$.



2.112 Груз массой $m = 150$ кг подвешен на стальной проволоке, выдерживающей силу натяжения $T = 2{,}94$ кН. На какой наибольший угол α можно отклонить проволоку с грузом, чтобы она не разорвалась при прохождении грузом положения равновесия?

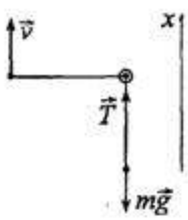
Решение

Воспользуемся формулой, полученной в задаче 1.108: $T = mg(1 + 2(1 - \cos\alpha))$. Выразим из нее $\cos\alpha$: $T = mg + 2mg - 2mg\cos\alpha$, $\cos\alpha = \frac{3mg - T}{2mg}$. Подставив исходные данные, получим: $\cos\alpha = 0{,}5$, следовательно, $\alpha = 60°$.



2.113 Камень массой $m = 0{,}5$ кг привязан к веревке длиной $l = 50$ см, равномерно вращается в вертикальной плоскости. Сила натяжения веревки в нижней точке окружности $T = 44$ Н. На какую высоту h поднимется камень, если веревка обрывается в тот момент, когда скорость направлена вертикально вверх?

Решение



Для камня в нижнем положении запишем второй закон Ньютона: $T - mg = ma_n$, где $a_n = \frac{v^2}{l}$, $T - mg = m\frac{v^2}{l}$, $v = \sqrt{\frac{l(T - mg)}{m}}$. Примем за нулевой уровень потенциальной энергии положение камня в момент обрыва веревки. В этот момент камень обладает кинетической энергией $\frac{mv^2}{2}$, которая по мере подъема камня переходит в потенциальную. На высоте h вся кинетическая энергия перейдет в потенциальную, т.е. $\frac{mv^2}{2} = mgh$, откуда $h = \frac{v^2}{2g} = \frac{l(T - mg)}{2mg}$; $h = 2$ м.

2.114 Вода течет по трубе диаметром d = 0,2 м, расположенной в горизонтальной плоскости и имеющей закругление радиусом R = 20,0 м. Найти боковое давление воды p, вызванное центробежной силой. Через поперечное сечение трубы за единицу времени протекает масса воды m_1 = 300 т/ч.

Решение

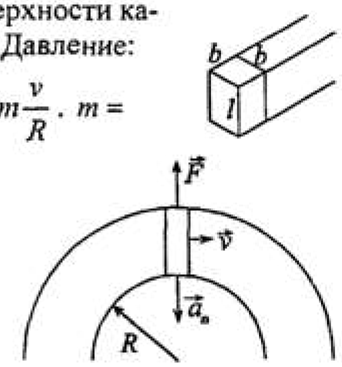
Боковое давление воды $P = \frac{F_{цб}}{ld}$ — (1), где $F_{цб}$ — центробежная сила, l — длина той части трубы, на которую производится давление, по модулю $F_{цб} = \frac{mv^2}{R}$ — (2), где $m = \rho lS$ — (3) — масса воды в объеме Sl (S — площадь поперечного сечения трубы, ρ — плотность воды). Скорость течения воды $v = \frac{m_1}{\rho S}$ — (4). Подставляя (2) — (4) в (1), получим $P = \frac{m_1^2}{R\rho dS}$; $P = 56{,}0$ Па.

2.115 Вода течет по каналу шириной b = 0,5 м, расположенному в горизонтальной плоскости и имеющему закругление радиусом R = 10 м. Скорость течения воды v = 5 м/с. Найти боковое давление воды P, вызванное центробежной силой.

Решение

Рассмотрим участок боковой поверхности канала, площадь которого: $S = b \cdot l$. Давление: $P = \frac{F_{цб}}{S}$, где $F_{цб}$ по модулю $F = m\frac{v}{R}$. $m = \rho V = \rho \cdot l \cdot b^2$ — масса воды в данном объеме. $F = \frac{\rho l b^2 v^2}{R}$;

$P = \frac{\rho l b^2 v^2}{Rbl} = \frac{\rho b v^2}{R}$; $P = 1{,}25$ кПа.



2.116 Найти работу A, которую надо совершить, чтобы сжать пружину на l = 20 см, если известно, что сила F пропорциональна сжатию l и жесткость пружины k = 2,94 кН/м.

Решение

Работа, совершаемая при сжатии пружины, определяется формулой $A = -\int_0^l F dl$ — (1), где l — сжатие. По условию сила пропорциональна сжатию, т.е. $F = -kl$ — (2). Подставляя (2) в (1), получим $A = \int_0^l kl dl = \frac{kl^2}{2}$; $A = 58{,}8$ Дж.

2.117 Найти наибольший прогиб h рессоры от груза массой m, положенного на ее середину, если статический прогиб рессоры от того же груза $h_0 = 2$ см. Каким будет наибольший прогиб, если тот же груз падает на середину рессоры с высоты $H = 1$ м без начальной скорости?

Решение

При статическом прогибе $mg = kh_0$; отсюда $k = mg/h_0$. При падении этого груза с высоты H имеем $mg(H+h) = \frac{kh^2}{2} = \frac{mgh^2}{2h_0}$, или $h^2 - 2h_0h - 2h_0H = 0$. Решая это уравнение, находим $h = h_0 \pm \sqrt{h_0^2 + 2h_0H}$. Если $H = 0$, то $h = 2h_0 = 4$ см; если $H = 1$ м, то $h = 22{,}1$ см.

2.118 Акробат прыгает в сетку с высоты $H = 8$ м. На какой предельной высоте h над полом надо натянуть сетку, чтобы акробат не ударился о пол при прыжке? Известно, что сетка прогибается на $h_0 = 0{,}5$ м, если акробат прыгает в нее с высоты $H_0 = 1$ м.

Решение

По закону сохранения энергии потенциальная энергия должна полностью перейти в энергию упругого взаимодействия $mg(H+h) = k\frac{h^2}{2}$; $mg(H_0+h_0) = k\frac{h_0^2}{2}$;

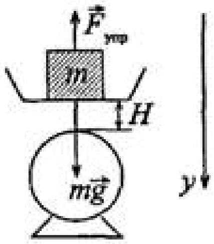
Разделив первое уравнение на второе, получим: $\frac{H+h}{H_0+h_0} = \frac{h^2}{h_0^2}$; $\frac{H}{H_0+h_0} + \frac{h}{H_0+h_0} = \frac{h^2}{h_0^2}$; $\frac{h^2(H_0+h_0) - hh_0^2}{h_0^2(H_0+h_0)} = \frac{H}{H_0+h_0}$; $(H_0+h_0)h^2 - h_0^2 \cdot h - Hh_0^2 = 0$, решим данное квадратное уравнение: $D = h_0^4 + 4Hh_0^2(H_0+h_0)$;

$h = \frac{h_0^2 \pm \sqrt{h_0^4 + 4Hh_0^2(H_0+h_0)}}{2(H_0+h_0)}$; $h_1 = 1{,}23$ м ; $h_2 = -1{,}07$ м — противоречит условию задачи.

2.119 Груз положили на чашку весов. Сколько делений покажет стрелка весов при первоначальном отбросе, если после успокоения качаний она показывает 5 делений?

Решение

По закону сохранения энергии $W_{п1} = W_{п2}$. Потенциальная энергия гравитационного и упругого взаимодействия $W_{п1} = mgH$; $W_{п2} = \frac{kx^2}{2}$, следовательно, $mgH = \frac{kx^2}{2}$ — (1). После установления равновесия $m\vec{g} + \vec{F}_{упр} = 0$, где $F_{упр} = -kx$ — закон Гука.



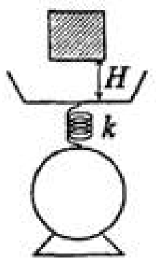
В проекциях на ось у: $mg + kx = 0$, откуда $k = \frac{mg}{x}$ (2).

Подставив (2) в (1), получим $mgH = \frac{mg}{x} \cdot \frac{x^2}{2}$; $H = \frac{x}{2}$; $x = 2H$, отсюда $x = 2 \cdot 5 = 10$ делений.

2.120 Груз массой m = 1 кг падает на чашку весов с высоты H = 10 см. Каковы показания весов F в момент удара, если после успокоения качаний чашка весов опускается на h = 0,5 см?

Решение

По закону сохранения энергии в момент удара $W_{п1} = W_{п2}$, где $W_{п1} = mgH$, а $W_{п2} = \frac{kx_1^2}{2}$. Отсюда $mgH = \frac{kx_1^2}{2}$; $x_1 = \sqrt{\frac{2mgH}{k}}$ — деформация пружины весов в момент удара. После успокоения качаний наступает равновесие $mg = F_2$, где $F_2 = kx_2$, по закону Гука, причем $x_2 = h$.



Тогда $mg = kh$; $k = \frac{mg}{h}$. Показания весов в момент удара $F = mg + F_1$, где $F_1 = kx_1 = k\sqrt{\frac{2mgH}{k}}$ — по закону Гука

Тогда $F = mg + k\sqrt{\frac{2mgH}{k}}$; $F = mg + \sqrt{2mgHk}$; $F = mg + \sqrt{2mgH\frac{mg}{h}}$; $F = mg + mg\sqrt{\frac{2H}{h}}$; $F = mg\left(1 + \sqrt{\frac{2H}{h}}\right)$, откуда $F - 72.5$ Н.

2.121 С какой скоростью v двигался вагон массой m = 20 т, если при ударе о стенку каждый буфер сжался на l = 10 см? Жесткость пружины каждого буфера k = 1 МН/м.

Решение

За счет кинетической энергии движущегося поезда была совершена работа по сжатию буферов. Воспользуемся формулой, полученной в задаче 2.116. Работа по сжатию первого буфера: $A_1 = k\frac{l^2}{2}$, второго $A_2 = k\frac{l^2}{2}$; $A = A_1 + A_2$ или $A = 2k\frac{l^2}{2} = kl^2$. Тогда $\frac{mv^2}{2} = kl^2$, $v = l\sqrt{\frac{2k}{m}}$; $v = 1$ м/с.

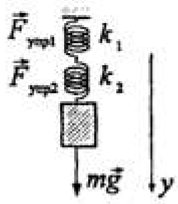
2.122 Мальчик, стреляя из рогатки, натянул резиновый шнур так, что его длина стала больше на Δl= 10 см. С какой скоростью v полетел камень массой m = 20 г? Жесткость шнура k = 1 кН/м.

Решение

В результате совершенной работы по растяжению шнура камень приобрел кинетическую энергию. С учетом формулы, полученной в задаче 2.116, имеем: $\frac{mv^2}{2} = k\frac{\Delta l^2}{2}$. Откуда $v = \Delta l\sqrt{\frac{k}{m}}$, $v = 22{,}3$ м/с.

2.123 К нижнему концу пружины, подвешенной вертикально, присоединена другая пружина, к концу которой прикреплен груз. Жесткости пружин равны k_1 и k_2. Пренебрегая массой пружин по сравнению с массой груза, найти отношение $W_{п1}/W_{п2}$ потенциальных энергий этих пружин.

Решение



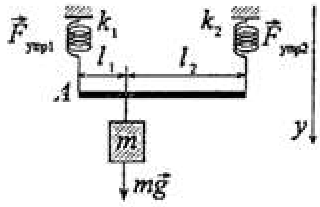
Потенциальная энергия взаимодействия для каждой отдельно взятой пружины $W_{п1} = \frac{k_1x_1^2}{2}$ — (1); $W_{п2} = \frac{k_2x_2^2}{2}$ — (2). Условия равновесия пружин в проекциях на ось y: $\begin{cases} mg - F_{упр1} = 0, \\ mg - F_{упр2} = 0, \end{cases}$ где по закону Гука $F_{упр} = -kx$, отсюда $\begin{cases} mg = k_1x_1 \\ mg = k_2x_2 \end{cases}$ и $k_1x_1 = k_2x_2$ — (3). Из (3) выразим: $x_1 = \frac{k_2x_2}{k_1}$; $x_2 = \frac{k_2^2x_2^2}{k_1^2}$. Разделив (1) на (2), получим $\frac{W_{п1}}{W_{п2}} = \frac{k_1x_1^2}{2}\cdot\frac{2}{k_2x_2^2}$; $\frac{W_{п1}}{W_{п2}} = \frac{k_1x_1^2}{k_2x_2^2}$; $\frac{W_{п1}}{W_{п2}} = \frac{k_1k_2^2x_2^2/k_1^2}{k_2x_2^2}$;

$\frac{W_{п1}}{W_{п2}} = \frac{k_2^2x_2^2}{k_1k_2x_2^2}$; $\frac{W_{п1}}{W_{п2}} = \frac{k_2}{k_1}$.

2.124 На двух параллельных пружинах одинаковой длины весит невесомый стержень длиной L = 10 см. Жесткости пружин k_1 = 2 Н/м и k_2 = 3 Н/м. В каком месте стержня надо подвесить груз, чтобы стержень оставался горизонтальным?

Решение

Чтобы система находилась в равновесии, т.е. чтобы стержень был в горизонтальном положении, необходимо выполнение двух условий: $m\vec{g}+\vec{F}_{упр1}+\vec{F}_{упр2}=0$ — (1)



и $\vec{M}_1+\vec{M}_2+\vec{M}_3=0$ — (2). В проекции на ось y уравнение (1) имеет вид: $mg-k_1x-k_2x=0$ или $mg=k_1x+k_2x=(k_1+k_2)x$ — (3). Моменты сил относительно точки A: $M_1=0$; $M_2=mgl_1$; $M_3=k_2xL$. Тогда из уравнения (2) $mgl_1-k_2xL=0$, из уравнения (3) $x=\dfrac{mg}{k_1+k_2}$. Следовательно, $mgl_1-\dfrac{k_2mgL}{k_1+k_2}=0$; $l_1=\dfrac{k_2L}{k_1+k_2}$. $L=l_1+l_2$; $l_2=L-l_1=L\cdot\left(1-\dfrac{k_2}{k_1+k_2}\right)$; $l_1=6$ см; $l_2=4$ см.

2.125 Резиновый мяч массой m = 0,1 кг летит горизонтально с некоторой скоростью и ударяется о неподвижную вертикальную стенку. За время Δt = 0,01 с мяч сжимается на Δl = 1,37 см; такое же время Δt затрачивается на восстановление первоначальной формы мяча. Найти среднюю силу F, действующую на стенку за время удара.

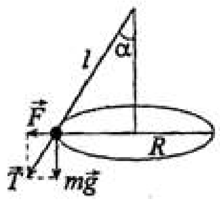
Решение

Запишем второй закон Ньютона в виде: $F=m\Delta v/\Delta t$, но $\Delta v=\dfrac{\Delta l}{\Delta t}$, тогда $F=\dfrac{m\Delta l}{\Delta t^2}$; $F=13{,}7$ Н.

2.126 Гиря массой m = 0,5 кг, привязанная к резиновому шнуру длиной l_0, описывает в горизонтальной плоскости окружность. Частота вращения гири n = 2 об/с. Угол отклонения шнура от вертикали α = 30°. Жесткость шнура k = 0,6 кН/м. Найти длину l_0 нерастянутого резинового шнура.

Решение

Сила натяжения шнура $T=\dfrac{mg}{\cos\alpha}=5{,}7$ Н вызывает растяжение шнура на Δl, причем $T=k\Delta l$; отсюда $\Delta l=\dfrac{T}{k}=9{,}5$ мм. Из рисунка видно, что $\dfrac{l}{R}=\dfrac{T}{F}$ — (1). Но

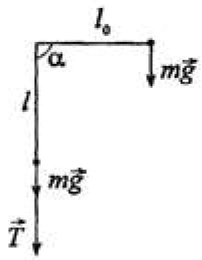


$F=T\sin\alpha=\dfrac{mv^2}{R}=4\pi^2n^2mR$ — (2). Из (1) и (2) имеем $l=\dfrac{T}{4\pi^2n^2m}=7{,}25$ см. Таким образом, длина нерастянутого резинового шнура $l_0=l-\Delta l=6{,}3$ см.

2.127 Гирю массой m = 0,5 кг, привязанную к резиновому шнуру длиной l_0 = 9,5 см, отклоняют на угол α = 90° и отпускают. Найти длину l резинового шнура в момент прохождения грузом положения равновесия. Жесткость шнура k = 1 кН/м.

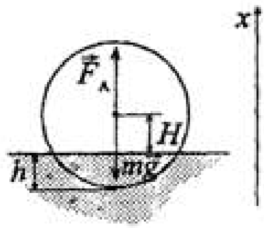
Решение

Сила натяжения шнура T совершает работу по растяжению шнура на Δl. $T = k\Delta l$. Решая аналогичную задачу для нерастяжимого шнура (см. задачу 2.111), мы получили, что при прохождении положения равновесия $T = 3mg$. Тогда $3mg = k\Delta l$; $l - l_0 = \frac{3mg}{k}$; $l = \frac{3mg}{k} + l_0$; $l \approx 11$ см.



2.128 Мяч радиусом R = 10 см плавает в воде так, что его центр масс находится на H = 9 см выше поверхности воды. Какую работу надо совершить, чтобы погрузить мяч в воду до диаметральной плоскости?

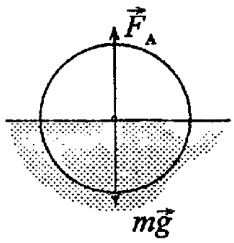
Решение

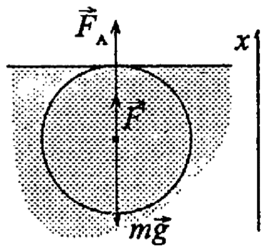


Мяч плавает, если сила тяжести, действующая на него, уравновешивается силой Архимеда, т.е. $mg = F_A$, или $mg = \rho_0 V_0 g$ — (1), где V_0 — объем шарового сегмента высотой h, находящегося в воде при равновесии, ρ_0 — плотность воды, m — масса мяча. Очевидно, что $H + h = R$, т.е. радиусу мяча. Если теперь погрузить мяч в воду на глубину x, то сила Архимеда превысит силу тяжести, действующую на мяч, и результирующая сила, выталкивающая мяч из воды, будет $F_x = F'_A - mg$ — (2). Против этой силы F_x и должна быть совершена работа. Сила Архимеда $F'_A = \rho_0 V g$ — (3), где V — объем шарового сегмента высотой $h + x$. Из (1) — (3) имеем $F_x = \rho_0 V g - \rho_0 V_0 g = \rho_0 g(V - V_0) = \rho_0 g V_x$, где V_x — объем шарового слоя высотой x. Шаровой сегмент высотой l имеет объем шарового слоя $V_x = V - V_0 = \frac{\pi(x+h)^2}{3}[3R - (x+h)] - \frac{\pi h^2}{3}(3R - h)$. Тогда $F_x = \rho_0 g V_x = \frac{\pi\rho_0 g}{3}\left[3R(x+h)^2 - (x+h)^3 - h^2(3R - h)\right]$ — (4). Работа, которую надо совершить при погружении мяча до диаметральной плоскости, будет $A = \int_0^H Fxdx$ — (5). Подставляя (4) в (5), интегрируя и учитывая, что $H + h = R$, получим, после подстановки данных задачи, $A = 0{,}74$ Дж.

2.129 Шар радиусом R = 6 см удерживается внешней силой под водой так, что его верхняя точка касается поверхности воды. Какую работу A произведет выталкивающая сила, если отпустить шар и предоставить ему свободно плавать? Плотность материала шара $\rho = 0{,}5 \cdot 10^3$ кг/м^3.

Решение





Определим положение шара при свободном плавании, в этом случае сила тяжести $m\vec{g}$ уравновешивается силой Архимеда F_A. Следовательно, $mg = F_A$; $m = V_ш \rho$; $\frac{3}{4}\pi R^3 \rho g = \rho_в V_0 g$, где $\rho_в = 10^3$ кг/м^3 — плотность воды, V_0 — объем погруженной части шара. Отсюда $V_0 = \frac{\rho}{\rho_в}\left(\frac{4}{3}\pi R^3\right)$ или $V_0 = \frac{1}{2}\left(\frac{4}{3}\pi R^3\right)$, следовательно, $V_0 = \frac{1}{2}V_ш$, т.е. шар погружен в воду до диаметральной плоскости. В первоначальном положении на шар действует сила $F = F_A - mg$. В предыдущей задаче была получена формула, выражающая зависимость выталкивающей силы от глубины погружения x, если при свободном плавании в воде находился шаровой сегмент высотой h. Учитывая, что в данном случае $h = R$, имеем $F = \frac{\pi \rho_0 g}{3}\left[3R(x+R)^2 - (x+R)^3 - 2R^3\right]$.

Если отпустить мяч и предоставить ему свободно плавать, то в этом случае работа выталкивающей силы:

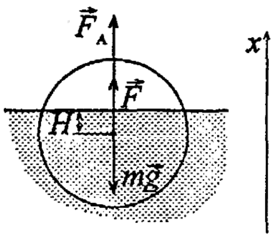
$$A = \int_0^R F dx = \frac{\pi \rho_0 g}{3}\int_0^R \left[3R(x+R)^2 - (x+R)^3 - 2R^3\right];$$

$$A = \frac{\pi \rho_0 g}{3}\left[3R\frac{(x+R)^3}{3}\Bigg|_0^R - \frac{(x+R)^4}{4}\Bigg|_0^R - 2R^3 x\Big|_0^R\right];$$

$$A = \frac{\pi \rho_0 g}{3}\left[7R^4 - \frac{15}{4}R^4 - 2R^4\right];\ A = \frac{5\pi \rho_0 g}{3 \cdot 4}R^4;\ A = 0.17\ \text{Дж}.$$

2.130 Шар диаметром $D = 30$ см плавает в воде. Какую работу A надо совершить, чтобы погрузить шар в воду на $H = 5$ см глубже? Плотность материала шара $\rho = 0{,}5\cdot 10^3$ кг/м^3.

Решение



Определим положение шара при свободном плавании, в этом случае сила тяжести $m\vec{g}$ уравновешивается силой Архимеда $\vec{F}_A$, т.е. $mg = F_A$. Масса шара $m = V_ш\rho = \frac{3}{4}\pi R^3\rho$; сила Архимеда $F_A = \rho_в V_0 g$. Тогда $\frac{3}{4}\pi R^3\rho g = \rho_в V_0 g$, где $\rho_в = 10^3$ кг/м^3 — плотность воды, V_0 — объем погруженной части шара. Отсюда $V_0 = \frac{\rho}{\rho_в}\left(\frac{4}{3}\pi R^3\right)$ или $V_0 = \frac{1}{2}\left(\frac{4}{3}\pi R^3\right)$, следовательно, $V_0 = \frac{1}{2}V_ш$, т.е. шар погружен в воду до диаметральной плоскости. Если теперь погрузить шар в воду на глубину x, то сила Архимеда превысит силу тяжести, действующую на шар, и результирующая сила, выталкивающая шар из воды, будет $F_x = F'_A - mg$. Против этой силы F_x и должна быть совершена работа. Сила Архимеда $F'_A = \rho_0 Vg$ — (3), где V — объем шарового сегмента высотой $R + x$. Тогда $F = \rho_0 Vg - \rho_0 V_0 g = \rho_0 g(V - V_0)$. $V - V_0 = V_x$ — объем шарового слоя высотой x. $V_x = \frac{\pi(R+x)^2}{3}\times$ $\times(3R-(R+x)) - \frac{2}{3}\pi R^3$; $V_x = \frac{\pi}{3}\left((R+x)^2(2R-x) - 2R^3\right)$; $V_x = \frac{\pi}{3}\left(3R^2x - x^3\right)$. Работа, затрачиваемая при погружении шара на $H = 5$ см глубже: $A = \int_0^H F dx$; $A = \frac{\pi\rho_0 g}{3}\times$ $\times\int_0^H \left(3R^2x - x^3\right)dx$; $A = \frac{\pi\rho_0 g}{3}\left(3R^2\frac{H^2}{2} - \frac{H^4}{4}\right)$; $A = 0{,}84$ Дж.

2.131 Льдина площадью поперечного сечения $S = 1$ м^2 и высотой $h = 0{,}4$ м плавает в воде. Какую работу A надо совершить, чтобы полностью погрузить льдину в воду?

Решение

Обозначим ρ — плотность льда, ρ_0 — плотность воды. При свободном плавании на льдину действуют две силы, уравновешивающие друг друга: сила тяжести и сила Архимеда (рис.1), т.е. $mg = F_A$ — (1). Найдем высоту h_2 той части льдины, которая находится в воде при свободном плавании. Т. к. $m = \rho V = \rho Sh$, а $F_A = \rho_0 V_0 g = \rho_0 S h_2 g$, то, подставив эти выражения в (1), получим: $h_2 = \dfrac{\rho h}{\rho_0} = 0{,}36$ м — (2). Если теперь погрузить

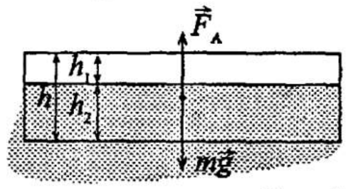


Рис. 1

льдину в воду на глубину x (рис.2), то сила Архимеда превысит силу тяжести и результирующей силой будет выталкивающая сила $F = F'_A - mg$. Против нее и надо совершать работу. $F'_A = \rho_0 g S(h_2 + x)$, тогда $F = \rho_0 g S(h_2 + x) - \rho Shg$; преобразовав выражение с учетом (2), получим $F = Sg\left(\rho_0\left(\dfrac{\rho h}{\rho_0} + x\right) - \rho h\right) = Sg\rho_0 x$.

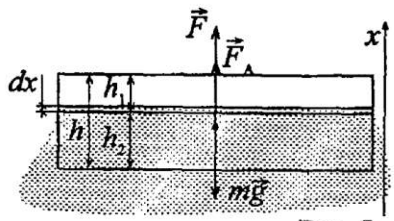


Рис. 2

Работа, совершаемая при погружении льдины на глубину x: будет равна $A = \int\limits_0^{h_1} F dx$; $A = Sg\rho_0 \int\limits_0^{h_1} x dx = Sg\rho_0 \dfrac{h_1^2}{2}$;

$h_1 = h - h_2 = h - \dfrac{\rho h}{\rho_0} = \dfrac{h(\rho_0 - \rho)}{\rho_0}$, в результате получим:

$$A = Sg\rho_0 \frac{h^2(\rho_0 - \rho)^2}{2\rho_0^2} = \frac{Sgh^2(\rho_0 - \rho)^2}{2\rho_0};\ A = 7{,}84\ \text{Дж}.$$

2.132 Найти силу гравитационного взаимодействия F между двумя протонами, находящимися на расстоянии $r = 10^{-16}$ м друг от друга. Масса протона $m = 1{,}67 \cdot 10^{-27}$ кг.

Решение

Сила гравитационного взаимодействия выражается формулой $F = G\frac{m^2}{r^2}$. Подставляя числовые данные, получим $F = 1{,}86 \cdot 10^{-44}$ Н.

2.133 Два медных шарика с диаметрами $D_1 = 4$ см и $D_2 = 6$ см находятся в соприкосновении друг с другом. Найти гравитационную потенциальную энергию $W_п$ этой системы.

Решение

Потенциальная энергия гравитационного взаимодействия: $W_п = -G\frac{m_1 m_2}{r}$ — (1), где r — расстояние между центрами масс шаров. Знак «–» говорит о том, что при сближении тел потенциальная энергия убывает, а при $R = \infty$ потенциальная энергия равна нулю. $r = \frac{D_1}{2} + \frac{D_2}{2} = \frac{D_1 + D_2}{2}$; $m_1 = v_1 \rho$; $m_2 = v_2 \rho$. Объем шара $V = \frac{4}{3}\pi R^3$, тогда $m_1 = \frac{4}{3}\pi\left(\frac{D_1}{2}\right)^3 \rho$; $m_2 = \frac{4}{3}\pi\left(\frac{D_2}{2}\right)^3 \rho$. Подставив полученные выражения в уравнение (1), получим: $W_п = -G\frac{2 \cdot 16\pi^2 (D_1/2)^3 (D_2/2)^3 \cdot \rho^2}{9(D_1 + D_2)}$. Учитывая, что плотность меди $\rho = 8{,}6 \cdot 10^3$ кг/м^3, найдем: $W_п = -3{,}8 \cdot 10^{-10}$ Дж.

2.134 Вычислить гравитационную постоянную G, зная радиус земного шара R, среднюю плотность земли ρ и ускорение свободного падения g у поверхности Земли.

Решение

В соответствии с законом всемирного тяготения, тело массой m, находящееся у поверхности Земли, притягивается ею с силой $P = G\frac{mM}{R^2}$, где M — масса Земли, R — ее радиус. С другой стороны, $P = mg$. Приравнивая эти величины, найдем, что $g = G\frac{M}{R^2}$. Взяв из таблицы 5 значения R, ρ, g и зная что $M = V\rho = \frac{4}{3}\pi R^3 \cdot \rho$, выразим $G = \frac{gR^2 \cdot 3}{4\pi R^3 \rho} = \frac{3g}{4\pi R\rho}$; $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ Н·м^2/кг^2.

2.135 Принимая ускорение свободного падения у Земли $g = 9{,}8$ м/с^2 и пользуясь данными таблицы 5, составить таблицу значений средних плотностей планет Солнечной системы.

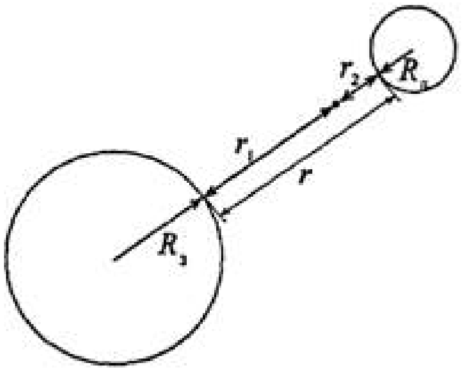
Решение

В задаче 2.134 мы получили формулу для вычисления гравитационной постоянной $G = 3g/4\pi R\rho$. Изменив значения g, R и ρ (g', R' и ρ'), получим то же значение гравитационной постоянной $G = 3g'/4\pi R'\rho'$. Приравняв правые части уравнений, выразим среднюю плотность планеты: $\frac{3g}{4\pi R\rho} = \frac{3g'}{4\pi R'\rho'}$; $\frac{g}{R\rho} = \frac{g'}{R'\rho'}$; $\rho' = \frac{R\rho g'}{gR'}$. Используя данные таблиц 4 и 5 и полученную формулу, составим таблицу:

Планета	ρ, 10^3 кг/м^3	Планета	ρ, 10^3 кг/м^3
Меркурий	5,50	Юпитер	1,32
Венера	4,80	Сатурн	0,71
Земля	5,50	Уран	1,26
Марс	3,90	Нептун	1,6

2.136 Космическая ракета летит на Луну. В какой точке прямой, соединяющей центры масс Луны и Земли, ракета будет притягиваться Землей и Луной с одинаковой силой?

Решение



Введем следующие обозначения: m — масса ракеты, $M_З$ — масса Земли, $M_Л$ — масса Луны, $R_З$ — радиус Земли, $R_Л$ — радиус Луны, r_1 — расстояние от поверхности Земли до искомой точки и r_2 — расстояние от поверхности Луны до искомой точки. Сила притяжения между ракетой и Землей: $F_1 = G\frac{mM_З}{(r_1 + R_З)^2}$. Сила притяжения между ракетой и Луной: $F_2 = G\frac{mM_Л}{(r_2 + R_Л)^2}$. Ракета будет притягиваться Землей и Луной с одинаковой силой, когда $F_1 = F_2$, т.е. $G\frac{mM_З}{(r_1 + R_З)^2} = G\frac{mM_Л}{(r_2 + R_Л)^2}$;

$\frac{M_З}{(r_1+R_З)^2}=\frac{M_Л}{(r_2+R_Л)^2}$ — (1). $r_1+r_2=r$ — расстояние от Земли до Луны, $r_2=r-r_1$. Подставляя это выражение в уравнение (1) и извлекая квадратный корень из обеих частей уравнения, получим: $\frac{\sqrt{M_З}}{r_1+R_З}=\frac{\sqrt{M_Л}}{r-r_1+R}$, откуда

$r_1+R_З=\sqrt{\frac{M_З}{M_Л}}(r-r_1+R_Л)$;

$r_1\left(1+\sqrt{\frac{M_З}{M_Л}}\right)=\sqrt{\frac{M_З}{M_Л}}(r+R_Л)-R_З$ — (2); $1+\sqrt{\frac{M_З}{M_Л}}=$ $=\frac{\sqrt{M_Л}+\sqrt{M_З}}{\sqrt{M_Л}}$ — (3). Выразим r_1 из (2) с учетом (3):

$r_1=\frac{\sqrt{M_З}(r+R_Л)-\sqrt{M_Л}\cdot R_З}{\sqrt{M_Л}+\sqrt{M_З}}$. Подставляя табличные величины, получим: $r_1=3{,}43\cdot10^5$ км.

2.137 Сравнить ускорение свободного падения у поверхности Луны $g_Л$ с ускорением свободного падения у поверхности Земли $g_З$.

Решение

В соответствии с законом всемирного тяготения, тело массой m, находящееся у поверхности Земли, притягивается ею с силой $P=G\frac{mM}{R^2}$, где M — масса Земли, R — ее радиус. С другой стороны, $P=mg$. Приравнивая эти величины, найдем, что $g=G\frac{M}{R^2}$. Тогда ускорение свободного падения у поверхности Земли: $g_З=G\frac{M_З}{R_З^2}$, где $M_З$ и $R_З$ — масса и радиус Земли. Ускорение свободного падения у поверхности Луны: $g_Л=G\frac{M_Л}{R_Л^2}$, где $M_Л$ и $R_Л$ — масса и радиус Луны. Отсюда $\frac{g_Л}{g_З}=\frac{M_ЛR_З^2}{R_Л^2M_З}$; $g_Л=0{,}165g_З$.

2.138 Как изменится период колебания T математического маятника при перенесении его с Земли на Луну?

Решение

Период колебания математического маятника: $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$.

На Земле $T_З = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g_З}}$; на Луне $T_Л = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$. Отношение $\frac{T_Л}{T_З} = \sqrt{\frac{g_З}{g_Л}}$; значение $\frac{g_Л}{g_З} = 0{,}165$ было найдено в задаче 2.137. Тогда $\frac{T_Л}{T_З} = 2{,}46$; $T_Л = 2{,}46 \cdot T_З$, т.е. при перенесении математического маятника с Земли на Луну период его колебаний увеличится в 2,46 раза.

2.139 Найти первую космическую скорость v_1, т.е. скорость, которую надо сообщить телу у поверхности Земли, чтобы оно начало двигаться по круговой орбите в качестве ее спутника.

Решение

Сила гравитационного взаимодействия между телом и Землей $F = \frac{GmM}{r^2}$, где m — масса тела, M — масса Земли и r — расстояние между ними. У поверхности Земли r равно радиусу Земли R и $F = mg$. Тогда $F = mg = \frac{GmM}{R^2}$. При движении тела вокруг Земли по круговой орбите сила гравитационного взаимодействия является центростремительной силой. Таким образом, $F = \frac{mv_1^2}{R}$; отсюда первая космическая скорость $v_1 = \sqrt{\frac{GM}{R}} = \sqrt{gR} = 7{,}9$ км/с.

2.140 Найти вторую космическую скорость v_2, т.е. скорость, которую надо сообщить телу у поверхности Земли, чтобы оно преодолело земное тяготение и навсегда удалилось от Земли.

Решение

Для того чтобы тело удалилось от Земли, необходимо, чтобы кинетическая энергия тела была достаточна для преодоления гравитационной потенциальной энергии, т.е. $\frac{mv^2}{2} \ge \frac{GmM}{R}$. У поверхности Земли $\frac{GM}{R^2} = g$, т.к. $F = mg = \frac{GmM}{R^2}$; поэтому $\frac{mv_2^2}{2} \ge mgR$, откуда вторая космическая скорость $v_2 \ge \sqrt{2gR} = 11{,}2$ км/с.

2.141 Принимая ускорение свободного падения у Земли равным $g = 9{,}80$ м/с^2 и пользуясь данными табл. 5, составить таблицу значений первой и второй космических скоростей у поверхности планет Солнечной системы.

Решение

В двух предыдущих задачах были выведены формулы для нахождения первой и второй космических скоростей: $v_1 = \sqrt{gR}$; $v_2 = \sqrt{2gR}$, где R — радиус планеты, g — ускорение свободного падения вблизи поверхности. Причем $g = kg_3$, коэффициенты k, как и радиусы планет, приведены в таблице 4 приложения. Исходя из этого, составляем таблицу:

Планета	v_1, км/с	v_2, км/с	Планета	v_1, км/с	v_2, км/с
Меркурий	3,0	4,25	Юпитер	42,6	60,4
Венера	7,2	10,2	Сатурн	25,7	36,4
Земля	7,9	11,2	Уран	15,2	21,5
Марс	3,57	5,05	Нептун	16,6	23,5

2.142 Найти линейную скорость v движения Земли по круговой орбите.

Решение

Линейная скорость движения по окружности $v = \omega R$, где ω — частота вращения, R — расстояние до Солнца. $\omega = \frac{2\pi}{T}$, где T — период обращения Земли вокруг Солнца. Отсюда $v = \frac{2\pi R}{T}$, $v = 30$ км/с.

2.143 С какой линейной скоростью v будет двигаться искусственный спутник Земли по круговой орбите: а) у поверхности Земли; б) на высоте h = 200 км и h = 7000 км от поверхности Земли? Найти период обращения T спутника Земли при этих условиях.

Решение

а) Сила притяжения Земли создает центростремительное ускорение спутника, равное $\frac{v^2}{R}$, где R — радиус орбиты, а v — скорость спутника. Если орбита проходит вблизи поверхности Земли, то спутник, как и любое другое тело у поверхности Земли, будет иметь ускорение, направленное к центру Земли $g = \frac{v_1^2}{R_З}$, где $R_З$ — радиус Земли. Отсюда скорость спутника вблизи Земли: $v_1 = \sqrt{gR_З}$; $v = 7{,}91$ м/с. При движении по круговой орбите радиуса $R < R_З$ ускорение свободного падения убывает в отношении, обратном отношению квадратов расстояний от центра. Ускорение g_R на расстоянии R от центра Земли найдем по формуле: $g_R = g\frac{R_З^2}{R^2}$. Тогда скорость движения спутника по круговой орбите радиуса R найдется из уравнения $g_R = g\frac{R_З^2}{R^2} = \frac{v^2}{R}$, откуда $v = \sqrt{g\frac{R_З^2}{R}}$; $R = h + R_З$, отсюда $v = \sqrt{g\frac{R_З^2}{(R_З + h)}}$ — (1). При $h = 200$ км $v_2 = 7{,}79$ км/с. При $h = 7000$ км $v_3 = 5{,}46$ км/с. Период обращения спутника $T = \frac{2\pi}{\omega}$, $\omega = \frac{v}{R}$, отсюда $T = \frac{2\pi R}{v}$ — (2). $T_1 = \frac{2\pi R_З}{v_1}$; $T_1 = 1$ ч 25 мин; $T_2 = \frac{2\pi(R_З + h_1)}{v_2}$ — (3); $T_2 = 1$ ч 28 мин; $T_3 = \frac{2\pi(R_З + h_2)}{v_3}$; $T_3 = 4$ ч 16 мин.

2.144 Найти зависимость периода обращения T искусственного спутника, вращающегося по круговой орбите у поверхности центрального тела, от средней плотности этого тела. По данным, полученным при решении задачи 2.135, составить таблицу значений периодов обращений искусственных спутников вокруг планет Солнечной системы.

Решение

Вблизи поверхности планеты спутник ведет себя так же, как и любое тело, на которое не действуют никакие силы, кроме сил гравитации. Свяжем ускорение свободного падения со средней плотностью планеты. В соответствии с законом всемирного тяготения, тело массой m, находящееся у поверхности планеты, притягивается ею с силой $P = G\frac{mM}{R^2}$, где M — масса планеты, R — ее радиус. С другой стороны, $P = mg$. Приравнивая эти величины, найдем, что $g = G\frac{M}{R^2}$. Зная, что $M = V \cdot \rho = \frac{4}{3}\pi R^3 \cdot \rho$, выразим $g = \frac{4}{3}G\pi R\rho$ — (1). Воспользуемся уравнением (2) из предыдущей задачи для периода обращения спутника вблизи поверхности планеты: $T = 2\pi R / v$ — (2). Ускорение $g = v^2 / R$, откуда $v = \sqrt{gR}$. Подставим эту формулу в (2). $T = \frac{2\pi R}{\sqrt{gR}} = \frac{2\pi R}{\sqrt{4G\pi R\rho R/3}} = \sqrt{\frac{3\pi}{G\rho}}$. Взяв из таблицы, приведенной в задаче 2.135, значения средних плотностей планет ρ, вычислим значения периода обращения спутника и заполним таблицу:

Планета	T, ч	Планета	T, ч
Меркурий	1,41	Юпитер	2,86
Венера	1,50	Сатурн	3,90
Земля	1,41	Уран	2,94
Марс	1,66	Нептун	2,61

2.145 Найти центростремительное ускорение $a_ц$, с которым движется по круговой орбите искусственный спутник Земли, находящийся на высоте h = 200 км от поверхности Земли.

Решение

В задаче 2.143 была получена формула для вычисления линейной скорости искусственного спутника Земли, движущегося по круговой орбите на высоте h от ее поверхности: $v=\sqrt{g\frac{R_3^2}{R}}$ — (1), где R_3 — радиус Земли, R — расстояние от спутника до центра Земли, т.е. $R=R_3+h$. Центростремительное ускорение $a_n=\frac{v^2}{R}$ или, с учетом уравнения (1), $a_n=\frac{gR_3^2}{R^2}=\frac{gR_3^2}{(R_3+h)^2}$; $a_n=9{,}2$ м/с^2.

2.146 Планета Марс имеет два спутника — Фобос и Деймос. Первый находится на расстоянии r = $0{,}95\cdot10^4$ км от центра масс Марса, второй на расстоянии r = $2{,}4\cdot10^4$ км. Найти период обращения T_1 и T_2 этих спутников вокруг Марса.

Решение

Воспользуемся уравнением (3) и уравнением (1) из задачи 2.143: $T=\frac{2\pi(R_М+r)}{v}$ — (3), где $R_М$ — радиус Марса, v — линейная скорость спутника; $v=\sqrt{g\frac{R_М^2}{R_М+r}}$ — (1). Подставив (1) в (3), получим $T=\frac{2\pi(R_М+r)\sqrt{(R_М+r)}}{\sqrt{gR_М^2}}$;

$T=\frac{2\pi(R_М+r)^{\frac{2}{3}}}{\sqrt{gR_М^2}}$; $T_1=\frac{2\pi(R_М+r_1)}{\sqrt{gR_М^2}}$; $T_1=7{,}8$ ч. Для периода обращения второго спутника, рассуждая аналогично, получим $T_2=31{,}2$ ч.

2.147 Искусственный спутник Земли движется по круговой орбите в плоскости экватора с запада на восток. На какой высоте h от поверхности Земли должен находиться этот спутник, чтобы он был неподвижен по отношению к наблюдателю, который находится на Земле?

Решение

Для того чтобы спутник был неподвижен относительно наблюдателя на Земле, необходимо, чтобы его период обращения был равен периоду обращения Земли, т. е. 24 часам. Воспользуемся уравнениями (1) и (3), полученными в задаче 2.143: $v=\sqrt{g\frac{R_3}{(R_3+h)}}$; $T=\frac{2\pi(R_3+h)}{v}$, откуда $T=\frac{2\pi(R_3+h)\sqrt{R_3+h}}{\sqrt{gR_3^2}}$ — (1). Выразим из (1) h:

$T^2=\frac{4\pi^2(R_3+h)^3}{gR_3^2}$; $R_3+h=\sqrt[3]{\frac{gT^2R_3^2}{4\pi^2}}$; $h=\sqrt[3]{\frac{gT^2R_3^2}{4\pi^2}}-R_3$.

Подставив числовые значения, получим: $h=6{,}38\cdot10^6=$ $=35890$ км.

2.148 Искусственный спутник Луны движется по круговой орбите на высоте $h = 20$ км от поверхности Луны. Найти линейную скорость v движения этого спутника, а также период его обращения T вокруг Луны.

Решение

Воспользуемся уравнением (3) и уравнением (1) из задачи 2.143: $v = \sqrt{g\frac{R^2}{R+r}}$, $T = \frac{2\pi(R+r)}{v}$, где R — радиус Луны, см. таблицу 5 приложения; $g = 0{,}165g_з$ (из задачи 2.137). Подставляя числовые данные, получим $v = 1{,}7$ км/с и $T = 1$ ч 50 мин.

2.149 Найти первую и вторую космические скорости для Луны (см. условия 2.139 и 2.140).

Решение

В задачах 2.139 и 2.140 были выведены уравнения для нахождения первой и второй космических скоростей для Земли. $v_1 = \sqrt{gR}$; $v_2 = \sqrt{2gR}$. Подставив в них радиус Луны (таблица 5) и учитывая, что ускорение свободного падения на Луне связано с земным соотношением $g_Л = 0{,}165g_З$, найдем искомые значения скоростей: $v_1 = \sqrt{0{,}165g_З \cdot R_Л}$; $v_1 = 1{,}7$ км/с и $v_2 = \sqrt{2 \cdot 0{,}165g_З \cdot R_Л}$; $v_2 = 2{,}4$ км/с.

2.150 Найти зависимость ускорения свободного падения g от высоты h над поверхностью Земли. На какой высоте h ускорение свободного падения g_h составит 0,25 ускорения свободного падения g у поверхности Земли.

Решение

У поверхности Земли имеем $F = mg = \frac{GmM}{R^2}$ — (1), где R — радиус Земли. На высоте h от поверхности Земли $mg_h = \frac{GmM}{(R+h)^2}$ — (2). Из уравнений (1) и (2) получим $\frac{g_h}{g} = \frac{R^2}{(R+h)^2}$ — (3). Уравнение (3) дает зависимость $\frac{g_h}{g}$ от высоты h. Обозначим $\frac{g_h}{g} = n$; тогда из (3) имеем уравнение $h^2 + 2Rh + \left(R^2 - \frac{R^2}{n}\right) = 0$. Решая это уравнение, находим $h = -R \pm \frac{R}{\sqrt{n}}$. Т. к. h должно быть больше нуля, то надо взять решение со знаком плюс, т.е. $g_h = 0{,}25g$ на высоте, равной радиусу Земли.

2.151 На какой высоте h от поверхности Земли ускорение свободного падения $g_h = 1$ м/с^2?

Решение

В предыдущей задаче получена зависимость отношения $\frac{g_h}{g}$ от высоты h. $\frac{g_h}{g} = \frac{R^2}{(R+h)^2}$, где R — радиус Земли.

Выразим отсюда h: $(R+h)^2 = \frac{gR^2}{g_h}$; $h = R\sqrt{\frac{g}{g_h}} - R$.

Подставив числовые значения, получим $h = 13590$ км.

2.152 Во сколько раз кинетическая энергия $W_к$ искусственного спутника Земли, движущегося по круговой орбите, меньше его гравитационной потенциальной энергии $W_п$?

Решение

Запишем выражения для $W_к$ и $W_п$. $W_к = \frac{mv^2}{2}$ — (1); $W_п = -G\frac{mM}{r}$ — (2). Здесь v — линейная скорость спутника; m — масса спутника; M — масса Земли; r — радиус орбиты спутника. Воспользуемся уравнением (1) из задачи 2.143: $v = \sqrt{\frac{gR^2}{R+h}}$ — (3), где R — радиус Земли, а $R+h=r$ — (4). Подставив (3) в (1), с учетом (4) получим $W_к = \frac{mgR^2}{2r}$. Взяв $W_п$ по модулю, найдем отношение энергий $\frac{W_п}{W_к} = \frac{GmM\,2r}{rmgR^2} = \frac{2GM}{gR^2}$. Подставим числовые данные $\frac{W_п}{W_к} \approx 2$.

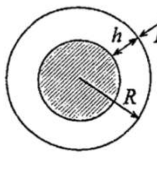
2.153 Найти изменение ускорения свободного падения при опускании тела на глубину h. На какой глубине ускорение свободного падения g_h составляет 0,25 ускорения свободного падения g у поверхности Земли? Плотность Земли считать постоянной. Указание: учесть, что тело, находящееся на глубине h над поверхностью Земли, не испытывает со стороны вышележащего слоя толщиной h никакого притяжения, так как притяжения отдельных частей слоя взаимно компенсируются.

Решение

Пусть m — масса тела, находящегося на расстоянии h от поверхности Земли и на расстоянии r от ее центра масс. Учитывая указание, данное в условии задачи, можем написать: $F_h = mg_h = GmM_r / r^2$ — (1), где M_r — масса шара радиусом r и с плотностью, равной плотности Земли ρ. Так как $M_r = \frac{4\pi r^3\rho}{3}$, то $mg_h = \frac{4Gm\pi R\rho}{3}$. У поверхности Земли $F = mg = \frac{GmM}{R^2} = \frac{4Gm\pi R\rho}{3}$ — (2). Из (1) и (2) получим $\frac{g_h}{g} = \frac{r}{R} = \frac{(R-h)}{R}$ — (3). Обозначим $\frac{g_h}{g} = n$, тогда из (3) имеем $h = R(1-n)$. Если $n = 0{,}25$, то $h = 0{,}75R$.

2.154 Каково соотношение между высотой H горы и глубиной h шахты, если период колебания маятника на вершине горы и на дне шахты один и тот же.

Решение



Период колебания математического маятника $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$. Т.к. периоды колебаний равны, то равны и ускорения свободного падения $T_h = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g_h}}$ и $T_H = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g_H}}$, отсюда $g_h = h_H$. Сила тяжести $F = mg$, с другой стороны, по закону всемирного тяготения $F = G\frac{mM}{r^2}$. Приравняем правые части уравнений: $mg = G\frac{mM}{r^2}$, отсюда $g = \frac{GM}{r^2}$, где G — гравитационная постоянная, M — масса Земли. Тело, находящееся на глубине h под землей, не испытывает со стороны вышележащего шарового слоя толщиной h никакого притяжения, т.к. притяжения отдельных частей слоя взаимно компенсируются. Масса заштрихованной части Земли: $M_1 = \rho V_1$; $V_1 = \frac{4}{3}\pi r_1^3$; $r_1 = R - h$. Тогда $g_h = \frac{GM_1}{r_1^2} = G\frac{4\pi(R-h)^3\rho}{3(R-h)^2}$ — (1). Отдельно преобразуем выражения, входящие в уравнение (1): $(R-h)^3 = (R^3 - 3R^2h + 3Rh^2 - h^3)$; $(R-h)^3 = R^3\left(1 - 3\frac{h}{R} + 3\frac{h^2}{R^2} - \frac{h^3}{R^3}\right)$; Поскольку $h << R$, то $(R-h)^3 \approx R^3\left(1 - 3\frac{h}{R^3}\right)$. Аналогично $(R-h)^2 = (R^2 - 2Rh + h^2)$, откуда $(R-h)^2 \approx R^2\left(1 - \frac{2h}{R}\right)$. Тогда из (1) $g_h = G\frac{3\pi R(1-3h/R)\rho}{4(1-2h/R)}$ — (2). На высоте H имеем $g_h = G\frac{M}{r_2^2}$, где $M = \rho\frac{4}{3}\pi R^3$; $r_2 = R + H$, т.е. $g_H = G\frac{4\pi R^3\rho}{3(R+H)^2}$ — (3). Поскольку $H << R$, то $(R+H)^2 = \left[R\left(1+\frac{H}{R}\right)\right]^2$; $(R+H)^2 = R^2\left(1 + 2\frac{H}{R} + \frac{H^2}{R^2}\right)$; $(R+H)^2 \approx R^2\left(1 + 2\frac{H}{R}\right)$. Из (3) $g_H = G\frac{4\pi\rho R}{3(1+2H/R)}$ — (4). Поскольку $g_h = g_H$, то, приравняв правые части (2) и (4), получим $G\frac{4\pi R(1-3h/R)\rho}{3(1-2h/R)} = G\frac{4\pi\rho R}{3(1+2H/R)}$, откуда $\frac{1-3h/R}{1-2h/R} = \frac{1}{1+2H/R}$ — (5). Воспользуемся выражением для суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии $S_n = \frac{1}{1-q}$. При $q << 1$; $\frac{1}{1-q} = 1 + q$; $\frac{1}{1+q} = 1 - q$. Тогда уравнение (5) можно записать в виде $\left(1 - 3\frac{h}{R}\right)\left(1 + \frac{2h}{R}\right) = 1 - 2\frac{H}{R}$ или $1 - 3\frac{h}{R} + \frac{2h}{R} - 6\frac{h^2}{R^2} = 1 - 2\frac{H}{R}$. Слагаемым $6\frac{h^2}{R^2}$, ввиду его малости, можно пренебречь. Тогда $1 - \frac{h}{R} = 1 - \frac{2H}{R}$; отсюда $h = 2H$.

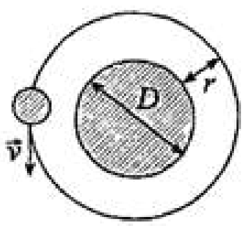
2.155 Найти период обращения T вокруг Солнца искусственной планеты, если известно, что большая полуось R_1 ее эллиптической орбиты превышает большую полуось R_2 земной орбиты на $\Delta R = 0{,}24 \cdot 10^8$ км.

Решение

По третьему закону Кеплера $\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{R_1^3}{R_2^3}$. Так как нас интересует период обращения планеты Солнечной системы, то целесообразно в качестве планеты с известными значениями T_2 и R_2 взять Землю. Для нашего случая $T_2 = 12$ мес, $R_2 = 1{,}5 \cdot 10^8$ км. По условию $R_1 = 1.74 \cdot 10^8$ км. Тогда из (1) имеем $T_1 = T_2\sqrt{\left(\frac{R_1}{R_2}\right)^3} = 15$ мес; $T_1 = 450$ сут.

2.156 Орбита искусственной планеты близка к круговой. Найти линейную скорость v ее движения и период T ее обращения вокруг Солнца, считая известными диаметр Солнца D и его среднюю плотность ρ. Среднее расстояние планеты от Солнца $r = 1{,}71 \cdot 10^8$ км.

Решение



По второму закону Ньютона сила тяготения $F_т = ma_n$. По закону всемирного тяготения $F_т = G\frac{mM}{(D/2+r)^2}$. Т. к. левые части уравнений равны, приравняем и правые части этих уравнений: $ma_n = G\frac{mM}{(D/2+r)^2}$, отсюда $a_n = \frac{GM}{(D/2+r)^2}$. Масса Солнца $M = \frac{4}{3}\pi\left(\frac{D}{2}\right)^3 \rho = \frac{1}{6}\pi D^3 \rho$, тогда $a_n = \frac{G\pi D^3 \rho}{6(D/2+r)^2}$. С другой стороны центростремительное ускорение $a_n = \frac{v^2}{R+r} = \frac{v^2}{D/2+r}$, т. е. $\frac{v^2}{D/2+r} = \frac{G\pi D^3 \rho}{6(D/2+r)^2}$;

$$v^2 = \frac{G\pi D^3 \rho}{6(D/2+r)} = \frac{G\pi D^3 \rho}{3D+6R};\ v = \sqrt{\frac{G\pi D^3 \rho}{3D+6R}};\ v = 2{,}78 \cdot 10^4 \text{ м/с}.$$

$$T = \frac{2\pi(D/2+r)}{v} = \frac{2\pi(D+2r)}{2v} = \frac{\pi(D+2r)}{v};\ T = 450 \text{ суток}.$$

2.157 Большая полуось R_1 эллиптической орбиты первого в мире спутника Земли меньше большой полуоси R_2 орбиты второго спутника на ΔR = 800 км. Период обращения вокруг Земли первого спутника в начале его движения был T_1 = 96,2 мин. Найти большую полуось R_2 орбиты второго искусственного спутника Земли и период T_2 его обращения вокруг Земли.

Решение

Найдем большую полуось орбиты Луны $R_Л = \langle R \rangle + R_З = 390370$ км. Зная период обращения Луны, применим третий закон Кеплера: $\frac{T_Л^2}{T_1^2} = \frac{R_Л^3}{R_1^3}$; $R_1 = R_Л \cdot \sqrt[3]{\frac{T_1^2}{T_Л^2}}$.

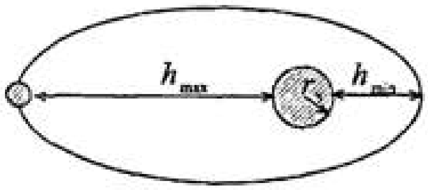
По условию $R_2 = R_1 + \Delta R = R_Л \cdot \sqrt[3]{\frac{T_1^2}{T_Л^2}} + \Delta R$; $R_2 = 7{,}88 \cdot 10^3$ м.

Узнав радиус, можно еще раз применить третий закон Кеплера: $\frac{T_Л^2}{T_2^2} = \frac{R_Л^3}{R_2^3}$; $T_2^2 = \frac{T_Л^2 R_2^3}{R_Л^3}$, отсюда $T_2 = T_Л \sqrt{\frac{R_2^3}{R_Л^3}}$;

$T_2 = 6457{,}21$ сек $= 107{,}62$ мин.

2.158 Минимальное удаление от поверхности Земли космического корабля-спутника «Восток-2» составляло h_{min} = 183 км, а максимальное удаление - h_{max} = 244 км. Найти период обращения T спутника вокруг Земли.

Решение

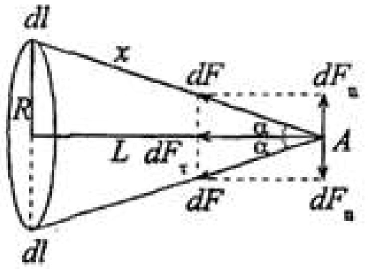


Найдем большую полуось орбиты «Востока» $R = \frac{h_{max} + h_{min}}{2} + R_З = 6583{,}5$ км.

Большая полуось орбиты Луны $R_Л = 390370$ км. Зная период обращения Луны, применим третий закон Кеплера $\frac{T_Л^2}{T^2} = \frac{R_Л^3}{R^3}$, отсюда $T = T_Л \sqrt{\frac{R^3}{R_Л^3}}$; $T = 87{,}8$ мин.

2.159 Имеется кольцо радиусом R. Радиус проволоки равен r, плотность материала равна ρ. Найти силу F, с которой это кольцо притягивает материальную точку массой m, находящуюся на оси кольца на расстоянии L от его центра.

Решение

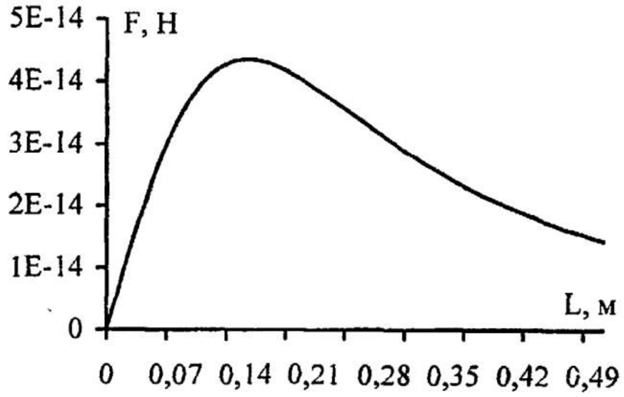


Возьмем элемент кольца dl. Сила гравитационного взаимодействия между элементом кольца dl и массой m, помещенной в точке A, будет $dF = G\dfrac{m\rho\pi r^2}{x^2}dl$. Сила dF направлена по линии x, соединяющей элемент кольца dl с массой m. Для нахождения силы гравитационного взаимодействия всего кольца и массы m надо векторно сложить все силы dF. Силу dF можно разложить на две составляющие dF_n и dF_τ. Составляющие dF_n двух диаметрально расположенных элементов взаимно уничтожаются, поэтому $F = \int dF_\tau$. Но $dF_\tau = dF\cos\alpha = \dfrac{dFl}{x}$ и

$$F = \int \frac{L}{x}dF = G\frac{m\rho\pi r^2 L}{x^3}\int_0^{2\pi R} dl = G\frac{m\rho\pi r^2 L\cdot 2\pi R}{x^3}$$ — (1). Учитывая, что $x = \sqrt{R^2+L^2}$, имеем $F = \dfrac{2\pi^2 Gm\rho r^2 RL}{\left(R^2+L^2\right)^{3/2}}$ — (2).

2.160 Имеется кольцо радиусом R = 20 см из медной проволоки. Найти силу F, с которой это кольцо притягивает материальную точку массой m = 2 г, находящуюся на оси кольца на расстоянии L = 0, 5, 10, 15, 20 и 50 см от его центра. Составить таблицу значений F и представить графически зависимость $F = F(L)$. На каком расстоянии L_{max} от центра кольца сила имеет максимальное значение F_{max} и каково это значение? Радиус проволоки r = 1 мм.

Решение



Из формулы (2) задачи 2.159 видно, что если $L=0$, то $F=0$. Нетрудно убедиться, что функция F с увеличением L сначала растет, а затем убывает. Найдем максимум функции F. Выразим переменные величины x и L через угол α: $x=\frac{R}{sin\,\alpha}$, $L=x\,cos\,a=\frac{R}{sin\,\alpha}cos\,\alpha$. Тогда формула (2) из предыдущей задачи примет следующий вид: $F=\frac{2\pi^2 Gm\rho r^2}{R}cos\,\alpha\,sin^2\alpha=B\,cos\,\alpha\,sin^2\alpha$. Для нахождения максимума функции F возьмем производную $\frac{dF}{d\alpha}$ и приравняем ее нулю: $\frac{dF}{d\alpha}=B\left(2\,cos^2\alpha\,sin\,\alpha-sin^3\alpha\right)=0$ или $tg^2\alpha=2$. Тогда расстояние L, на котором сила максимальна, равно $L=\frac{R}{sin\alpha}cos\,\alpha=\frac{R}{tg\alpha}=\frac{R}{\sqrt{2}}$. На графике изображен характер зависимости $F=f(L)$; $L_{max}=0{,}14$ м; $F_{max}=4{,}35\cdot10^{-14}$ Н.

L, м	0	0,05	0,1	0,15	0,2	0,5
F, 10^{-14} Н	0	2,58	4,04	4,34	3,99	1,44

2.161 Сила взаимодействия между кольцом и материальной точкой, находящейся на оси кольца, имеет максимальное значение F_{max}, когда точка находится на расстоянии L_{max} от центра кольца. Во сколько раз сила взаимодействия F между кольцом и материальной точкой, находящейся на расстоянии $L = 0{,}5L_{max}$ от центра кольца, меньше максимальной силы F_{max} ?

Решение

Используем формулу из задачи 1.159: $F = \frac{2\pi^2 Gm\rho r^2 RL}{\left(R^2 + L^2\right)^{\frac{3}{2}}}$ и выражение $F = F_{max}$ при $L_{max} = \frac{R}{\sqrt{2}}$ из задачи 1.60. По условию $L = 0{,}5L_{max}$, соответственно получим $F = \frac{2\pi^2 Gm\rho r^2 R \cdot R / 2\sqrt{2}}{\left(R^2 + R^2/8\right)^{\frac{3}{2}}}$. Произведя дальнейшие преобразования, получим $F = \frac{2\pi^2 Gm\rho r^2 R^2}{2\sqrt{2}(3R/2)^3 \cdot 1/2\sqrt{2}}$;

$F = \frac{2\pi^2 Gm\rho r^2 R^2}{2\sqrt{2}(3R/2)^3 \cdot 1/2\sqrt{2}}$; $F = \frac{16\pi^2 Gm\rho r^2 R^2}{27R^3}$. Тогда

$F_{max} = \frac{2\pi^2 Gm\rho r^2 R \cdot R/\sqrt{2}}{\left(R^2 + R^2/2\right)^{\frac{3}{2}}}$; $F_{max} = \frac{4\pi^2 Gm\rho r^2 R^2}{3\sqrt{3}R^3}$. Отсюда

выразим отношение сил: $\frac{F_{max}}{F} = \frac{4\pi^2 Gm\rho r^2}{3\sqrt{3}R} \cdot \frac{27R}{16\pi^2 Gm\rho r^2}$;

§ 3. Вращательное движение твердых тел

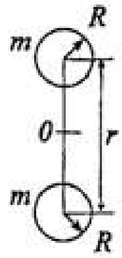
3.1 Найти момент инерции J и момент импульса L земного шара относительно оси вращения.

Решение

Момент инерции шара $J = \frac{2}{5}MR^2$, подставляя значение массы и радиуса Земли, получим $J = 97{,}36 \cdot 10^{36}$ кг·м². Момент импульса $L = J\omega$, где $\omega = \frac{2\pi}{T}$, следовательно, $L = \frac{J2\pi}{T}$. Период обращения Земли $T = 24$ часа. Подставляя числовые данные, получим $L = 7 \cdot 10^{33}$ кг·м²/с.

3.2 Два шара одинакового радиуса R = 5 см закреплены на концах невесомого стержня. Расстояние между шарами r = 0,5 м. Масса каждого шара m = 1 кг. Найти: а) момент инерции J_1 системы относительно оси, проходящей через середину стержня перпендикулярно к нему; б) момент инерции J_2 системы относительно той же оси, считая шары материальными точками, массы которых сосредоточены в их центрах; в) относительную ошибку $\delta = (J_1 - J_2)/J_2$, которую мы допускаем при вычислении момента инерции системы, заменяя величину J_1 величиной J_2.

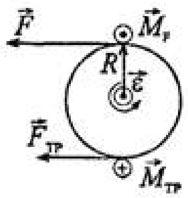
Решение



Момент инерции шара: $J_0 = \frac{2}{5}mR^2$. По теореме Штейнера $J_0 + md^2$, где $d = r/2$. Найдем момент инерции каждого шара $J_1 = J_0 + m \cdot \left(\frac{r}{2}\right)^2 = \frac{2}{5}mR^2 + \frac{mr^2}{4} = m \cdot \left(\frac{2R^2}{5} + \frac{r^2}{4}\right)$. Используя свойство аддитивности момента инерции, получим $J_c = \sum_{i=1}^{n} J_i$, где J_c — момент инерции системы, J_i — момент инерции элементов, входящих в систему, найдем момент инерции системы. Т. к. шары одинаковые, то $J_{1c} = 2J_1 = 2m \cdot \left(\frac{2R^2}{5} + \frac{r^2}{4}\right) = 0{,}127$ кг·м². Момент инерции материальной точки $J_2 = m\frac{r^2}{4}$, тогда момент инерции системы $J_{2c} = 2m\frac{r^2}{4} = \frac{mr^2}{2} = 0{,}125$ кг·м². Относительная ошибка $\delta = \frac{J_1 - J_2}{J_2} = 1{,}6\%$.

3.3 К ободу однородного диска радиусом R = 0,2 м приложена касательная сила F = 98,1 Н. При вращении на диск действует момент сил трения $M_{тр}$ = 98,1 Н·м. Найти массу m дисков, если известно, что диск вращается с угловым ускорением ε = 100 рад/с^2.

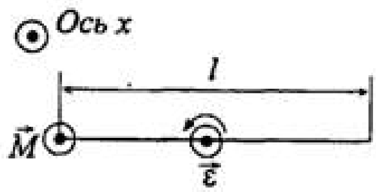
Решение



Уравнение вращательного движения диска в векторной форме $J\vec{\varepsilon} = \vec{M}_F + \vec{M}_{тр}$ — (1), $\vec{M}_F$ — момент силы $\vec{F}$, $\vec{M}_{тр}$ — момент силы трения. Выберем ось x в направлении вектора углового ускорения $\vec{\varepsilon}$ (на нас, перпендикулярно плоскости чертежа). Тогда уравнение (1) в проекции на ось x $J_\varepsilon = M_F - M_{тр}$ — (2), т.к. вектор $\vec{M}_F$ направлен вдоль $\vec{\varepsilon}$, а $\vec{M}_{тр}$ имеет противоположное направление. Момент инерции диска $J = \frac{1}{2}mR^2$ — (3); $M_F = F \cdot R$ — (4). Перепишем (2) с учетом (3) и (4): $\frac{1}{2}mR^2\varepsilon = FR - M_{тр}$, отсюда $m = \frac{2(FR - M_{тр})}{\varepsilon R^2} = 7{,}36$ кг.

3.4 Однородный стержень длиной l = 1 м и массой m = 0,5 кг вращается в вертикальной плоскости вокруг горизонтальной оси, проходящей через середину стержня. С каким угловым ускорением ε вращается стержень, если на него действует момент сил M = 98,1 мН·м?

Решение



Запишем уравнение вращательного движения стержня в проекции на ось x: $M = J\varepsilon$, откуда $\varepsilon = \frac{M}{J}$, где момент инерции стержня относительно оси, проходящей через середину, $J = \frac{1}{12}Ml^2$. Тогда $\varepsilon = \frac{M}{J} = \frac{12M}{ml^2} = 2{,}35$ рад/с^2.

3.5 Однородный диск радиусом R = 0,2 м и массой m = 0,5 кг вращается вокруг оси, проходящей через его центр перпендикулярно к его плоскости. Зависимость угловой скорости ω вращения диска от времени t дается уравнением $\omega=A+Bt$, где B = 8 рад/с^2. Найти касательную силу F, приложенную к ободу диска. Трением пренебречь.

Решение

Воспользуемся рисунком к задаче 3.3. Относительно оси x момент касательной силы приложенной к ободу диска $M = F \cdot R$ — (1). Уравнение вращательного движения в проекции на ось x: $M = J \cdot \varepsilon$, где момент инерции диска $J = \frac{mR^2}{2}$, т.е. $M = \frac{mR^2 \varepsilon}{2}$ — (2). Угловое ускорение $\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = B$ — (3). Решая совместно (1) — (3), найдем $F = \frac{BmR}{2}$; $F = 4$ Н.

3.6 Маховик, момент инерции которого J = 63,6 кг·м^2 вращается с угловой скоростью ω = 31,4 рад/с. Найти момент сил торможения M, под действием которого маховик останавливается через время t = 20 с. Маховик считать однородным диском.

Решение

Момент сил торможения $M = J\varepsilon$, где угловое ускорение $\varepsilon = \frac{\omega}{t}$, т.к. вращение равнозамедленное и конечная угловая скорость $\omega = 0$. Тогда $M = \frac{J\omega}{t}$; $M \approx 100$ Н.

3.7 К ободу колеса радиусом 0,5 м и массой m = 50 кг приложена касательная сила F = 98,1 Н. Найти угловое ускорение ε колеса. Через какое время t после начала действия силы колесо будет иметь частоту вращения n = 100 об/с? Колесо считать однородным диском. Трением пренебречь.

Решение

Данную задачу решим в скалярной форме относительно оси, проходящей через центр масс диска и совпадающей по направлению с вектором $\vec{\varepsilon}$. Момент касательной силы, приложенный к ободу диска $M = F \cdot R$ — (1). Кроме того, $M = J \cdot \varepsilon$, где момент инерции диска $J = \frac{mR^2}{2}$, т.е. $M = \frac{mR^2 \varepsilon}{2}$ — (2). Приравнивая правые части уравнений (1) и (2), получим $\varepsilon = \frac{2F}{mR}$; $\varepsilon = 7{,}8$ рад/с^2. Угловую скорость ω можно выразить двумя способами: $\omega = 2\pi n$ и $\omega = \varepsilon t$, отсюда $t = \frac{2\pi n}{\varepsilon}$; $t = 1$ мин 20 с.

3.8 Маховик радиусом R = 0,2 м и массой m = 10 кг соединен с мотором при помощи приводного ремня. Сила натяжения ремня, идущего без скольжения, T = 14,7 Н. Какую частоту вращения n будет иметь маховик через время t = 10 с после начала движения? Маховик считать однородным диском. Трением пренебречь.

Решение

Данную задачу решим в скалярной форме относительно оси, проходящей через центр масс диска и совпадающей по направлению с вектором $\vec{\varepsilon}$. Момент силы натяжения ремня $M = T \cdot R$ — (1), кроме того, $M = J \cdot \varepsilon$ — (2), где момент инерции диска $J = \dfrac{mR^2}{2}$ — (3), $\varepsilon = \dfrac{\omega}{t} = \dfrac{2\pi n}{t}$ — (4).

Решая совместно (1) — (4), найдем $n = \dfrac{Tt}{\pi mR}$; $n = 23{,}4$ об/с.

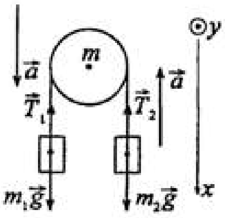
3.9 Маховое колесо, момент инерции которого J = 245 кг·м^2, вращается с частотой n = 20 об/с. Через время t = 1 мин после того, как на колесо перестал действовать момент сил M, оно остановилось. Найти момент сил трения $M_{тр}$ и число оборотов N, которое сделало колесо до полной остановки после прекращения действия сил. Колесо считать однородным диском.

Решение

Поскольку вращение колеса является равнозамедленным, то количество оборотов, которое оно сделало до полной остановки $N = nt/2$; $N = 600$ об. Момент сил трения $M = J \cdot \varepsilon$. Поскольку $\varepsilon = \dfrac{\omega}{t} = \dfrac{2\pi n}{t}$, то $M = \dfrac{2J\pi n}{t} = 513$ Н·м.

3.10 Две гири с массами m_1 = 2 кг и m_2 = 1 кг соединены нитью, перекинутой через блок массой m = 1 кг. Найти ускорение a, с которым движутся гири, и силы натяжения T_1 и T_2 нитей, к которым подвешены гири. Блок считать однородным диском. Трением пренебречь.

Решение

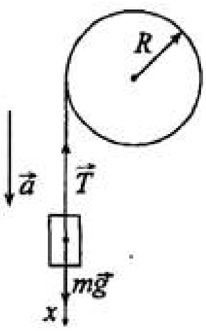


Запишем в векторной форме уравнения поступательного движения первой и второй гири: $m_1\vec{a} = m_1\vec{g} + \vec{T}_1$; $m_2\vec{a} = \vec{T}_2 + m_2\vec{g}$ и уравнение вращательного движения диска $J \cdot \vec{\varepsilon} = \vec{M}_1 + \vec{M}_2$, где M_1 — момент силы натяжения нити T_1, M_2 — момент силы натяжения нити T_2. Спроектируем первые два уравнения на ось x, а последнее на ось y и добавим уравнение кинематической связи. Получим систему 4 уравнений: $m_1 a = m_1 g - T_1$ — (1); $-m_2 a = m_2 g - T_2$ — (2); $J\varepsilon = RT_1 - RT_2$ — (3); $a = \varepsilon R$.

Подставим (4) в (3): $J\dfrac{a}{R} = R(T_1 - T_2)$ — (5). Вычтем (2) из (1), подставим в полученное выражение (5) и найдем $a = \dfrac{(m_1 - m_2)g}{m_1 + m_2 + m/2} = 2{,}8$ м/с^2 — (6). Подставляя (6) в (1) и (2), получим $T_1 = m_1(g - a)$; $T_1 = 14$ Н. $T_2 = m_2(g + a)$; $T_2 = 12{,}6$ Н.

3.11 На барабан массой m_0 = 9 кг намотан шнур, к концу которого привязан груз массой m = 2 кг. Найти ускорение a груза. Барабан считать однородным цилиндром. Трением пренебречь.

Решение

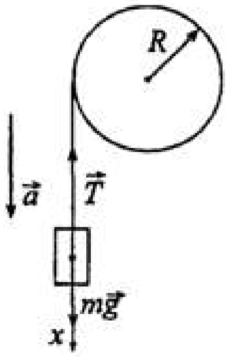


Без учета сил трения и сопротивления среды систему «груз — цилиндр» можно считать замкнутой и применить закон сохранения энергии. В начальный момент времени груз обладает потенциальной энергией mgh, которая при опускании груза уменьшается, переходя в кинетическую энергию поступательного движения груза и в кинетическую энергию вращения барабана $mgh = \frac{mv^2}{2} + \frac{J\omega^2}{2}$ — (1), где момент инерции барабана $J = \frac{m_0R^2}{2}$ — (2); $\omega = \frac{v}{R}$ — (3), где R — радиус барабана. Уравнение (1) с учетом (2) и (3) можно записать как $mgh = \frac{v^2}{2}\left(m + \frac{m_0}{2}\right)$ — (4). Груз опускается под действием постоянной силы, следовательно, его движение равноускоренное, тогда $h = \frac{at^2}{2}$ — (5); $v = at$ — (6). Подставляя (5) и (6) в (4), получим $a = \frac{2mg}{m_0 + 2m}$; $a = 3$ м/с^2.

3.12 На барабан радиусом R = 0,5 м намотан шнур, к концу которого привязан груз массой m = 10 кг. Найти момент инерции J барабана, если известно, что груз опускается с ускорением a = 2,04 м/с^2.

Решение

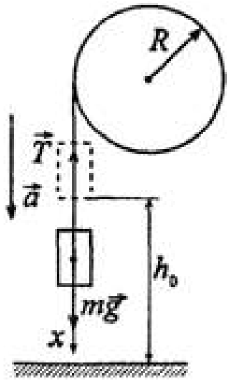
Сила натяжения шнура $\vec{T}$ создает вращающий момент $M = TR$ — (1). С другой стороны, $M = J\varepsilon$ — (2). Ускорение, с которым опускается груз, равно тангенциальному ускорению вращения барабана. Тогда $\varepsilon = \frac{a}{R}$ — (3). Решая совместно (1) — (3) получим: $J = \frac{TR^2}{a}$ — (4). Силу натяжения шнура $\vec{T}$ найдем из второго закона Ньютона в проекциях на ось x. $mg - T = ma$, откуда $T = m(g - a)$. Тогда уравнение (4) примет вид: $J = \frac{mR^2(g-a)}{a}$; $J = 9{,}5$ кг·м^2.



3.13 На барабан радиусом R = 20 см, момент инерции которого J = 0,1 кг·м^2, намотан шнур, к концу которого привязан груз массой m = 0,5 кг. До начала вращения барабана высота груза над полом h_0 = 1 м. Через какое время t груз опустится до пола? Найти кинетическую энергию $W_к$ груза в момент удара о пол и силу натяжения нити T. Трением пренебречь.

Решение

При опускании груза его потенциальная энергия переходит в кинетическую энергию поступательного движения и кинетическую энергию вращательного движения: $mgh_0 = \frac{mv^2}{2} + \frac{J\omega^2}{2}$ — (1), где $\omega = \frac{v}{R}$, откуда $mgh_0 = \frac{mv^2}{2} + \frac{Jv^2}{2R^2} = \frac{R^2v^2m + Jv^2}{2R^2}$ или $mgh_0 = \frac{v^2(mR^2 + J)}{2R^2}$; $v = \sqrt{\frac{2R^2mgh_0}{mR^2 + J}}$ — (2).

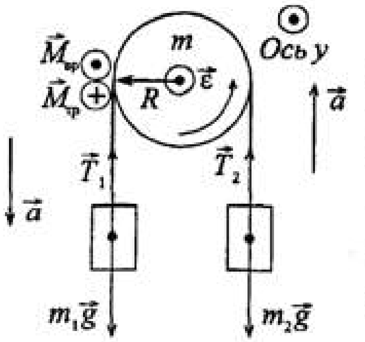


Движение равноускоренное, поэтому $h_0 = \frac{at^2}{2}$ — (3); $a = \varepsilon R$; $\varepsilon = \frac{\omega}{t}$; $h_0 = \frac{\omega R t^2}{t2} = \frac{vRt}{2R} = \frac{vt}{2}$ — (4). Выразим t из (4) и подставим в (2): $t = \frac{2h_0}{v} = \sqrt{\frac{4h_0(mR^2 + J)}{2R^2mgh_0}} = \sqrt{\frac{2(mR^2 + J)}{R^2mg}}$; $t = 1{,}1$ с. Кинетическая энергия $W_к = \frac{mv^2}{2}$,

подставив уравнение (2), получим $W_к = \frac{m2R^2mgh_0}{2(mR^2 + J)} = \frac{m^2gh_0R^2}{mR^2 + J}$; $W_к = 0{,}82$ Дж. По второму закону Ньютона $mg - T = ma$, откуда $T = m(g - a)$. Из (3): $a = \frac{2h_0}{t^2}$, тогда $T = m(g - 2h_0/t^2)$; $T = 4{,}1$ Н.

3.14 Две гири с разными массами соединены нитью, перекинутой через блок, момент инерции которого $J = 50$ кг·м^2 и радиус $R = 20$ см. Момент сил трения вращающегося блока $M_{тр} = 98{,}1$ Н·м. Найти разность сил натяжения нити T_1 - T_2 по обе стороны блока, если известно, что блок вращается с угловым ускорением $\varepsilon = 2{,}36$ рад/с^2. Блок считать однородным диском.

Решение

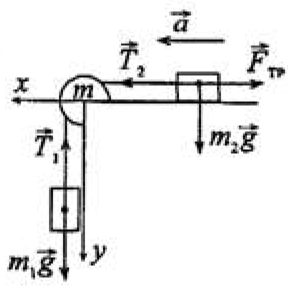


Согласно основному закону динамики вращательного движения (в проекции на ось y) при $J = const$ $\sum M = J\varepsilon$. Разность сил $(T_1 - T_2)$ создает вращательный момент $M_{вр}$, тогда $(T_1 - T_2) - M_{тр} = J\varepsilon$, следовательно, $T_1 - T_2 = (J\varepsilon + M_{тр})/R$; $T_1 - T_2 = 1{,}08$ кН.

3.15 Блок массой $m = 1$ кг укреплен на конце стола (см. рис. и задачу 2.31). Гири 1 и 2 одинаковой массы $m_1 = m_2 = 1$ кг соединены нитью, перекинутой через блок. Коэффициент трения гири 2 о стол $k = 0{,}1$. Найти ускорение а, с которым движутся гири, и силы натяжения T_1 и T_2 нитей. Блок считать однородным диском. Трением в блоке пренебречь.

Решение

Запишем второй закон Ньютона в проекциях на ось x и y: $\begin{cases} m_1 a = m_1 g - T_1 & —(1), \\ m_2 a = T_2 - F_{тр} & —(2), \end{cases}$ где $F_{тр} = k m_2 \times$ $\times g$ — (3). Разность сил $(T_1 - T_2)$ создает момент вращения, следовательно, $(T_1 - T_2)R = \frac{Ja}{R}$, где $J = \frac{mR^2}{2}$,



откуда $T_1 - T_2 = \frac{ma}{2}$ — (4). Из уравнений (1) — (3) найдем $T_1 = m_1(g - a)$ — (5); $T_2 = m_2(a + kg)$ — (6). Пусть $m_1 = m_2 = m'$. Тогда $T_1 - T_2 = m'(g - 2a - kg) = m'g(1-k) -$ $- 2m'a$, подставив (1), получим $mg(1-k) = \frac{ma}{2} + 2m'a =$ $= \frac{a(m + 4m')}{2}$, откуда $a = \frac{2m'g(1-k)}{m + 4m'}$; $a = 3{,}5$ м/с^2. Тогда из уравнения (5) $T_1 = 6{,}3$ Н; $T_2 = 4{,}5$ Н.

3.16 Диск массой $m = 2$ кг катится без скольжения по горизонтальный плоскости со скоростью $v = 4$ м/с. Найти кинетическую энергию $W_к$ диска.

Решение

В задаче рассматривается так называемое «плоское движение». Полная кинетическая энергия диска складывается из кинетической энергии поступательного движения точки центра масс и кинетической энергии вращения относительно оси, проходящей через центр масс: $W_к = \frac{mv^2}{2} + \frac{J\omega^2}{2}$. Поскольку $J = \frac{mR^2}{2}$ и $\omega = \frac{v}{R}$, где m — масса диска, R — радиус диска, то $W_к = \frac{3mv^2}{4}$; $W_к = 24$ Дж.

3.17 Шар диаметром $D = 6$ см и массой $m = 0{,}25$ кг катится без скольжения по горизонтальной плоскости с частотой вращения $n = 4$ об/с. Найти кинетическую энергию $W_к$ шара.

Решение

Кинетическая энергия шара складывается из кинетической энергии поступательного движения и кинетической энергии вращения: $W_к = \frac{mv^2}{2} + \frac{J\omega^2}{2}$, где $J = \frac{2mR^2}{5}$; $\omega = 2\pi n$, следовательно, $W_к = \frac{4\pi^2 mR^2 n^2}{2} + \frac{2mR^2 4\pi^2 n^2}{5 \cdot 2} = \frac{7\pi^2 D^2 mn^2}{10}$; $W_к = 0{,}1$ Дж.

3.18 Обруч и диск одинаковой массы $m_1 = m_2$ катятся без скольжения с одной и той же скоростью v. Кинетическая энергия обруча $W_{к1} = 4$ кгс·м. Найти кинетическую энергию $W_{к2}$ диска.

Решение

Пусть $m_1 = m_2 = m$. Кинетическая энергия обруча и диска складывается из кинетической энергии поступательного движения и кинетической энергии вращения $W_{к1} = \frac{mv^2}{2} + \frac{J_1\omega_1^2}{2}$ — (1), $W_{к2} = \frac{mv^2}{2} + \frac{J_2\omega_2^2}{2}$ — (2). Момент инерции обруча $J_1 = mR_1^2$. Угловая скорость $\omega_1 = \frac{v}{R_1}$. Момент инерции диска $J_2 = \frac{1}{2}mR_2^2$; частота $\omega_2 = \frac{v}{R_2}$. Произведем следующие преобразования: $J_1\omega_1^2 = mR_1^2 \frac{v^2}{R_1^2} = mv^2$, $J_2\omega_2^2 = \frac{1}{2}mR_2^2 \frac{v^2}{R_2^2} = \frac{mv^2}{2}$. Тогда, с учетом уравнений (1) и (2), можно записать $W_{к1} = mv^2$, $W_{к2} = \frac{3mv^2}{4}$ или $W_{к2} = \frac{3W_{к1}}{4}$. Переведем числовые значения в единицы системы СИ: $W_{к1} = 39{,}24$ Дж, тогда $W_{к2} = 29{,}43$ Дж.

3.19 Шар массой m = 1 кг катится без скольжения, ударяется о стенку и откатывается от нее. Скорость шара до удара о стенку v = 10 см/с, после удара u = 8 см/с. Найти количество теплоты Q, выделившееся при ударе шара о стенку.

Решение

Будем считать, что движение происходит в горизонтальной плоскости, тогда количество теплоты Q равно убыли кинетической энергии $Q = W_{к1} - W_{к2}$. Здесь $W_{к1}$ — кинетическая энергия шара до удара, она складывается из кинетической энергии поступательного движения и кинетической энергии вращения. $W_{к1} = \frac{mv^2}{2} + \frac{J\omega_1^2}{2}$, где $J = \frac{2}{5}mR^2$; $\omega_1 = \frac{v}{R}$. Аналогично для $W_{к2}$ — кинетическая энергия шара после удара: $W_{к2} = \frac{mu^2}{2} + \frac{J\omega_2^2}{2}$, где $\omega_2 = \frac{u}{R}$. Преобразуем предварительно выражения $J\omega_1^2$ и $J\omega_2^2$: $J\omega_1^2 = \frac{2}{5}mR^2\frac{v^2}{R^2} = \frac{2}{5}mv^2$; $J\omega_2^2 = \frac{2}{5}mu^2$. Тогда $W_{к1} = \frac{mv^2}{2} + \frac{mv^2}{5} = \frac{7mv^2}{10}$, $W_{к2} = \frac{mu^2}{2} + \frac{mu^2}{5} = \frac{7mu^2}{10}$. Отсюда $Q = \frac{7mv^2}{10} - \frac{7mu^2}{10} = \frac{7}{10}m(v^2 - u^2)$; $Q = 2{,}5$ мДж.

3.20 Найти относительную ошибку δ, которая получится при вычислении кинетической энергии $W_к$ катящегося шара, если не учитывать вращения шара.

Решение

Кинетическая энергия шара с учетом вращения: $W_к = \frac{mv^2}{2} + \frac{J\omega^2}{2}$, без учета вращения: $W_к' = \frac{mv^2}{2}$. Относительная ошибка $\delta = \frac{W_к - W_к'}{W_к'}$; $\delta = \frac{J\omega^2/2}{mv^2/2} = \frac{J\omega^2}{mv^2}$, где $J = \frac{2}{5}mR^2$; $\omega = \frac{v}{R}$. Отсюда $\delta = \frac{2mR^2v^2}{5R^2mv^2} = \frac{2}{5} = 40\%$.

3.21 Диск диаметром D = 60 см и массой m = 1 кг вращается вокруг оси, проходящей через центр перпендикулярно к его плоскости с частотой n = 20 об/с. Какую работу A надо совершить, чтобы остановить диск?

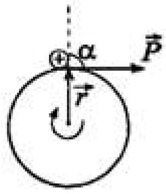
Решение

Работа сил торможения равна изменению кинетической энергии диска $-A = W_к - W_{к0}$. В момент остановки $W_к = 0$, следовательно, $A = W_{к0}$; $A = \frac{J\omega^2}{2}$, где $J = \frac{mR^2}{2}$; $\omega = 2\pi n$.

Тогда $A = \frac{m(D/2)^2(2\pi n)^2}{4} = m\frac{D^2}{4}\pi^2 n^2$; $A = 355$ Дж.

3.22 Кинетическая энергия вала, вращающегося с частотой n = 5 об/с, $W_к$ = 60 Дж. Найти момент импульса L вала.

Решение



Момент импульса — вектор, направление которого определяется по правилу векторного произведения $\vec{L} = [\vec{R} \times \vec{p}]$, где $\vec{p} = m\vec{v}$, а модуль равен $L = Rp\sin\alpha = mvR$ — (1), т.к. $\alpha = \frac{\pi}{2}$. Кинетическая энергия вала $W_к = \frac{J\omega^2}{2}$ — (2), где $J = \frac{mR^2}{2}$ — (3), $\omega = 2\pi n$ — (4). Решая совместно уравнения (2) — (4) получим $W_к = mR^2\pi^2 n^2$, откуда $m = \frac{W_к}{R^2\pi^2 n^2}$ — (5); $v = 2\pi nR$ — (6).

Подставив (5) и (6) в (1), найдем $L = \frac{2W_к}{\pi n}$; $L = 7{,}6$ кг·м²/с.

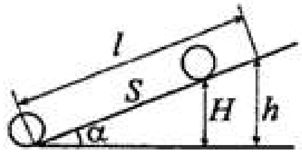
3.23 Найти кинетическую $W_к$ энергию велосипедиста, едущего со скоростью v = 9 км/ч. Масса велосипедиста вместе с велосипедом m = 78 кг, причем на колеса приходится масса m_0 = 3 кг. Колеса велосипеда считать обручами.

Решение

Кинетическая энергия велосипедиста складывается из кинетической энергии поступательного движения и кинетической энергии вращения двух колес. $W_к = \frac{mv^2}{2} + 2\frac{J\omega^2}{2}$, где момент инерции одного колеса $J = \frac{m_0R^2}{2}$, а угловая скорость $\omega = \frac{v}{R}$. Тогда $W_к = \frac{mv^2}{2} + \frac{m_0R^2v^2}{2R^2} = \frac{v^2(m+m_0)}{2}$; $W_к = 253$ Дж.

3.24 Мальчик катит обруч по горизонтальной дороге со скоростью v = 7,2 км/ч. На какое расстояние s может вкатиться обруч на горку за счет его кинетической энергии? Уклон горки равен 10 м на каждые 100 м пути.

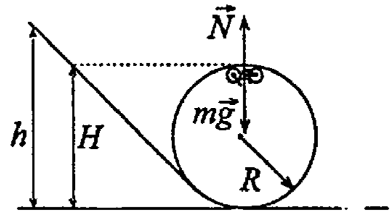
Решение



У основания горки обруч обладал кинетической энергией $W_к$, которая складывалась из кинетической энергии поступательного движения и кинетической энергии вращения. Когда обруч вкатился на горку на расстояние S, его кинетическая энергия перешла в потенциальную. $W_к = W_п$. $W_к = \frac{mv^2}{2} + \frac{J\omega^2}{2}$; $W_п = mgH$. Момент инерции обруча $J = mR^2$, частота вращения $\omega = v/R$. Тогда $W_к = \frac{mv^2}{2} + \frac{mR^2v^2}{2R^2} = mv^2$. Следовательно, $mv^2 = mgH$, откуда $H = \frac{v^2}{g}$. Из рисунка видно, что $\frac{h}{H} = \frac{l}{S}$, откуда $S = \frac{Hl}{h}$ или $S = \frac{v^2 l}{gh}$. Подставив числовые данные с учетом v = 2 м/с, получим $S = 4{,}1$ м.

3.25 С какой наименьшей высоты h должен съехать велосипедист, чтобы по инерции (без трения) проехать дорожку, имеющую форму «мертвой петли» радиусом R = 3 м и смог оторваться от дорожки в верхней точке петли? Масса велосипедиста вместе с велосипедом m = 75 кг, причем на колеса приходится масса m_0 = 3 кг. Колеса велосипеда считать обручами.

Решение



Система замкнута, следовательно, по закону сохранения энергии $W = W_п + W_{к1} + W_{к2}$. Здесь $W = mgh$ — начальная потенциальная энергия. Потенциальная энергия в верхней точке «мертвой петли» $W_п = mgH$, т.к. $H = 2R$, то $W_п = 2mgR$. Кинетическая энергия поступательного движения велосипедиста $W_{к1} = \frac{mv^2}{2}$. Кинетическая энергия вращательного движения колес $W_{к2} = \frac{J\omega^2}{2}$. $J = m_0 r^2$ — момент инерции обруча, где r — его радиус. $\omega = \frac{v}{r}$ — угловая скорость $\omega^2 = \frac{v^2}{r^2}$. Тогда $W_{к2} = \frac{m_0 r^2 v^2 / r^2}{2} = \frac{m_0 v^2}{2}$;

$mgh = 2mgR + mv^2/2 + m_0 v^2/2$; $\quad mg(h - 2R) = \frac{v^2}{2}(m + m_0)$,

отсюда $v^2 = \frac{2mg(h-2R)}{m+m_0}$. По второму закону Ньютона в верхней точке «мертвой петли» $m\vec{g} + \vec{N} = m\vec{a}_n$. В предельном случае $N = 0$, поэтому $mg = ma_n$, откуда $a_n = g$. С другой стороны, нормальное ускорение $a_n = \frac{v^2}{R} = \frac{2mg(h-2R)}{(m+m_0)R}$, следовательно, $g = \frac{2mg(h-2R)}{(m+m_0)R}$;

$2m(h-2R) = (m+m_0)R$; $\quad h = 2R + \frac{R}{2}\left(1 + \frac{m_0}{m}\right)$. Подставив числовые значения, получим $h = 7{,}56$ м.

3.26 Медный шар радиусом R = 10 см вращается с частотой n = 2 об/с вокруг оси, проходящей через его центр. Какую работу A надо совершить, чтобы увеличить угловую скорость ω вращения шара вдвое?

Решение

Кинетическая энергия вращения шара $W_к = \frac{J\omega^2}{2}$, где момент инерции шара $J = \frac{2}{5}mR^2$. Работа по увеличению угловой скорости вращения шара будет равна приращению его кинетической энергии. $A = W_{к2} - W_{к1}$, где $W_{к1} = \frac{J\omega_1^2}{2}$; $W_{к2} = J\omega_2^2/2 = 4J\omega_1^2/2$. Отсюда $A = \frac{4J\omega_1^2 - J\omega_1^2}{2} = \frac{3}{2}J\omega_1^2$ — (1); $\omega_1 = 2\pi n$ — (2). Масса шара $m = V\rho = \frac{4}{3}\pi R^3\rho$, $\rho = 8{,}6\cdot 10^3$ кг/м^3, тогда $J = \frac{2}{5}\frac{4}{3}\pi R^3\rho R^2 = \frac{8}{15}\pi R^2\rho$ — (3). Подставив (2) и (3) в (1), получим $A = \frac{3}{2}\frac{8}{15}\pi R^5\rho 4\pi^2 n^2 = \frac{16}{5}\pi^3 R^5\rho n^2$; $A = 34{,}1$ Дж.

3.27 Найти линейные ускорения а центров масс шара, диска и обруча, скатывающихся без скольжения с наклонной плоскости. Угол наклона плоскости α = 30°, начальная скорость всех тел v_0 = 0. Сравнить найденные ускорения с ускорением тела, соскальзывающего с наклонной плоскости при отсутствии трения.

Решение

При скатывании тела с наклонной плоскости его потенциальная энергия переходит в кинетическую. Т.е. $mgh = \frac{mv^2}{2} + \frac{J\omega^2}{2}$ — (1), где J — момент инерции тела и m — его масса. Но $h = l\sin\alpha$ — (2), $\omega = \frac{v}{R}$ — (3). Подставляя (2) и (3) в (1), получим $mgl\sin\alpha = \frac{v^2}{2}\left(m + \frac{J}{R^2}\right)$ — (4). Так как движение происходит под действием постоянной силы, то движение тел равноускоренное, поэтому $l = \frac{at^2}{2}$ — (5), $v = at$ — (6). Решая (4) — (6) совместно, получим $a = \frac{mg\sin\alpha}{m + J/R^2}$ — (7). Момент инерции шара $J = \frac{2}{5}mR^2$, тогда из (7) найдем $a_1 = 3{,}50$ м/с^2. Момент инерции диска $J = \frac{mR^2}{2}$, $a_2 = 3{,}27$ м/с^2. Момент инерции обруча $J = mR^2$, $a_3 = 2{,}44$ м/с^2. Для тела, соскальзывающего с наклонной плоскости без трения, имеем $a = g\sin\alpha$; $a = 4{,}9$ м/с^2.

3.28 Найти линейные скорости v движения центров масс шара, диска и обруча, скатывающихся без скольжения с наклонной плоскости. Высота наклонной плоскости h = 0,5 м, начальная скорость всех тел $v_0 = 0$. Сравнить найденные скорости со скоростью тела, соскальзывающего с наклонной плоскости при отсутствии трения.

Решение

В отсутствие трения систему можно считать замкнутой. Каждое из тел в начальный момент обладает потенциальной энергией mgh, которая затем преобразуется в кинетическую энергию поступательного движения $\frac{mv^2}{2}$ и кинетическую энергию вращения, т.е. $mgh = J\omega^2/2 + mv^2/2$ — (1). С учетом того, что $\omega = \frac{v}{R}$, выразим скорость тел v в нижней точке: $mgh = \frac{v^2(mR^2 + J)}{2R^2}$; $v = \sqrt{\frac{2mgh}{m + J/R^2}}$. а) Момент инерции шара $J = \frac{2}{5}mR^2$, тогда $v_1 = \sqrt{\frac{2mgh}{m + 2m/5}} = \sqrt{\frac{10}{7}gh}$; $v_1 = 2{,}65$ м/с. б) Момент инерции диска $J = \frac{mR^2}{2}$, тогда $v_2 = \sqrt{\frac{2mgh}{m + m/2}} = \sqrt{\frac{4}{3}gh}$; $v_2 = 2{,}56$ м/с. в) Момент инерции обруча $J = mR^2$, тогда $v_3 = \sqrt{\frac{2mgh}{m + m}} = \sqrt{gh}$; $v_3 = 2{,}21$ м/с. г) Для тела, соскальзывающего без трения с наклонной плоскости, $mgh = \frac{mv^2}{2}$, откуда $v = \sqrt{2gh}$; $v = 3{,}13$ м/с.

3.29 Имеются два цилиндра: алюминиевый (сплошной) и свинцовый (полый) — одинакового радиуса R = 6 см и одинаковой массы m = 0,5 кг. Поверхности цилиндров окрашены одинаково. Как, наблюдая поступательные скорости цилиндров у основания наклонной плоскости, можно различить их? Найти моменты инерции J_1 и J_2 этих цилиндров. За какое время t каждый цилиндр скатится без скольжения с наклонной плоскости? Высота наклонной плоскости h = 0,5 м, угол наклона плоскости α = 30°, начальная скорость каждого цилиндра v_0 = 0 .

Решение

В предыдущей задаче мы нашли, что поступательная скорость цилиндров в нижней точке наклонной плоскости определяется формулой $v=\sqrt{\frac{2mgh}{m+J/R^2}}$ — (1). Момент инерции алюминиевого цилиндра $J_1=\frac{mR^2}{2}$ — (2). Момент инерции свинцового цилиндра $J_2=m\frac{R^2+R_0^2}{2}$. Найдем внутренний радиус R_0 свинцового цилиндра. По условию массы обоих цилиндров равны, следовательно, $\rho_1 L\pi R^2=\rho_2 L\pi\left(R^2-R_0^2\right)$, где L — длина цилиндров, ρ_1 — плотность алюминия, ρ_2 — плотность свинца. Отсюда $R_0^2=R^2\frac{(\rho_2-\rho_1)}{\rho_2}$. Тогда момент инерции свинцового цилиндра $J_2=\frac{mR^2}{2}\frac{2\rho_2-\rho_1}{\rho_2}$ — (3). Подставляя числовые данные, получим $J_1=9\cdot 10^{-4}$ кг·м^2, $J_1=15{,}9\cdot 10^{-4}$ кг·м^2. Т. к. скатывание цилиндров происходит под действием постоянной силы, то $v=at$ и $l=\frac{h}{\sin\alpha}=\frac{at^2}{2}$; отсюда $\frac{h}{\sin\alpha}=\frac{vt}{2}$ и $t=\frac{1}{\sin\alpha}\frac{2h}{v}$ — (4). Подставляя в (4) формулу (1), получим $t=\frac{1}{\sin\alpha}\sqrt{\frac{2h\left(m+J/R^2\right)}{mg}}$ — (5). С учетом (2) и (3), получим соответственно для алюминиевого и свинцового цилиндров $t_1=\frac{1}{\sin\alpha}\sqrt{\frac{3h}{g}}$, $t_1=0{,}78$ с; $t_2=\frac{1}{\sin\alpha}\times$ $\times\sqrt{\frac{2h}{g}\left(1+\frac{2\rho_2-\rho_1}{2\rho_2}\right)}$, t_2 = 0,88 с.

3.30 Колесо, вращаясь равнозамедленно, уменьшило за время t = 1 мин частоту вращения от n_1 = 300 об/мин до m_2 = 180 об/мин. Момент инерции колеса J = 2 кг·м^2. Найти угловое ускорение ε колеса, момент сил торможения $M_{тр}$ работу A сил торможения и число оборотов N, сделанных колесом за время t = 1 мин.

Решение

Преобразуем числовые единицы в систему СИ: $t = 60$ с, $h_1 = 5$ об/с, $n_2 = 3$ об/с. Поскольку вращение равнозамедленное, то число оборотов можно определить так: $N = \frac{n_1 + n_2}{2} t$; $N = 240$ об. Угловое ускорение $\varepsilon = \frac{\Delta\omega}{t}$. Имеем: $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1 = 2\pi n_2 - 2\pi n_1 = 2\pi(n_2 - n_1)$, следовательно, $\varepsilon = \frac{2\pi(n_2 - n_1)}{t}$. Подставив числовые значения, получим $\varepsilon = -0{,}21$ рад/с^2. Момент сил торможения $M = J\varepsilon$; $M = 0{,}42$ Н·м. Работа сил торможения равна приращению кинетической энергии $-A = W_{к2} - W_{к1} = \frac{J\omega_2^2}{2} - \frac{J\omega_1^2}{2}$;

$A = \frac{J}{2}\left((2\pi n_1)^2 - (2\pi n_2)^2\right) = 2\pi^2 J\left(n_1^2 - n_2^2\right)$; $A = 630$ Дж.

3.31 Вентилятор вращается с частотой n = 900 об/мин, После выключения вентилятор, вращаясь равнозамедленно, сделал до остановки N = 75 об. Работа сил торможения A = 44,4 Дж. Найти момент инерции J вентилятора и момент сил торможения M.

Решение

Работа сил трения равна приращению кинетической энергии. $-A = W_к - W_{к0}$. Поскольку в момент остановки $W_к = 0$, то $A = W_{к0} = \frac{J\omega^2}{2}$. Откуда выразим момент инерции J, учитывая, что $\omega = 2\pi n$ — (1): $J = \frac{2A}{4\pi^2 n^2}$; $J = 0{,}01$ кг·м^2. Момент сил торможения $M = J\varepsilon$ — (2), где угловое ускорение $\varepsilon = \frac{\omega}{t}$ — (3). Поскольку вращение является равнозамедленным, то среднее число оборотов за единицу времени $\pi = \frac{n}{2}$, а число оборотов, сделанное до остановки $N = \pi t = \frac{nt}{2}$, откуда $t = \frac{2N}{n}$ — (4). Решая совместно (1) — (4), получим $M = \frac{J\pi n^2}{N}$; $M = 94 \cdot 10^{-3}$ Н·м.

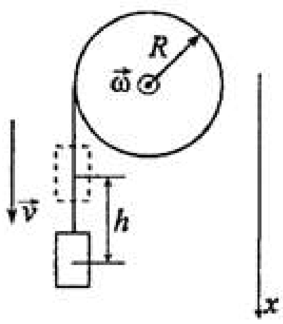
3.32 Маховое колесо, момент инерции которого J = 245 кг·м^2, вращается с частотой n = 20 об/с. После того как на колесо перестал действовать вращающий момент, оно остановилось, сделав N = 1000 об. Найти момент сил трения $M_{тр}$ и время t, прошедшее от момента прекращения действия вращающего момента до остановки колеса.

Решение

Момент сил трения $M_{тр} = J\varepsilon$. Поскольку вращение равнозамедленное и конечная скорость равна нулю, то $\varepsilon = \dfrac{\omega}{t}$, где $\omega = 2\pi n$. Тогда $M_{тр} = J\dfrac{2\pi n}{t}$. Число оборотов при равнозамедленном движении $N = \dfrac{n}{2}t$, откуда $t = \dfrac{2N}{n}$; $t = 100$ с и $M_{тр} = 308$ Н·м.

3.33 По ободу шкива, насаженного на общую ось с маховым колесом, намотана нить, к концу который подвешен груз массой m = 1 кг. На какое расстояние h должен опуститься груз, чтобы колесо со шкивом получило частоту вращения n = 60 об/мин? Момент инерции колеса со шкивом J = 0,42 кг·м^2, радиус шкива R = 10 см.

Решение



Пусть в верхнем положении груз обладал потенциальной энергией mgh. При опускании груза на расстояние h эта энергия была преобразована в кинетическую энергию вращения колеса и кинетическую энергию поступательного движения груза. $mgh = \dfrac{J\omega^2}{2} + \dfrac{mv^2}{2}$ — (1). Здесь v — скорость опускания груза, равна линейной скорости вращения точек на ободе шкива. $v = \omega R$; $\omega = 2\pi n$ — (2), отсюда $v = 2\pi nR$ — (3). Подставив (2) и (3) в (1), получим: $mgh = 2\pi^2 n^2 \left(J + mR^2\right)$, следовательно, $h = \dfrac{2\pi^2 n^2 \left(J + mR^2\right)}{mg}$; $h = 86{,}5$ см.

3.34 Маховое колесо начинает вращаться с угловым ускорением ε = 0,5 рад/с^2 и через время t_1 = 15 с после начала движения приобретает момент импульса L = 73,5 кг·м^2/с. Найти кинетическую энергию $W_к$ колеса через время t_2 = 20 с после начала движения.

Решение

Кинетическая энергия колеса $W_к = \frac{J\omega^2}{2}$ — (1). Момент инерции J можно найти из соотношения $M = J\varepsilon$, откуда $J = \frac{M}{\varepsilon}$ — (2). Из уравнения моментов $\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt}$. Решая это уравнение методом разделения переменных, получим $Mdt = dL$; $M\int_0^{t_1} dt = L$; $Mt_1 = L$, откуда $M = \frac{L}{t_1}$ — (3). Уравнение (2) с учетом (3) запишем как: $J = \frac{L}{t_1\varepsilon}$ — (4). Угловое ускорение $\varepsilon = const$, следовательно, $\varepsilon = \frac{\omega}{t}$. Тогда в момент времени t_2 — $\varepsilon = \frac{\omega}{t_2}$, откуда угловая скорость $\omega = \varepsilon t_2$ — (5). Подставив (4) и (5) в (1), получим $W_к = \frac{L\varepsilon^2 t_2^2}{2t_1}$; $W_к$ = 490 Дж.

3.35 Маховик вращается с частотой n = 10 об/с. Его кинетическая энергия $W_к$ = 7,85 кДж. За какое время t момент сил M = 50 Н·м, приложенный к маховику, увеличит угловую скорость ω маховика вдвое?

Решение

Согласно закону изменения момента импульса $\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt}$, где $L = J\omega$, а $dL = Jd\omega$. Воспользуемся методом разделения переменных: $Mdt = Jd\omega$; $M\int_0^t dt = J\int_{\omega_1}^{\omega_2} d\omega$ или $Mt = J(\omega_2 - \omega_1)$. По условию $\omega_2 = 2\omega_1$, следовательно, $Mt = J\omega_1$, откуда $t = \frac{J\omega_1}{M}$ — (1). Момент инерции J найдем из уравнения кинетической энергии вращения маховика. $W_к = \frac{J\omega_1^2}{2}$, откуда $J = \frac{2W_к}{\omega_1^2}$ — (2). Подставив (2) в (1), получим $t = \frac{2W_к}{\omega_1 M}$ или, с учетом $\omega_1 = 2\pi n$, $t = \frac{W_к}{\pi n M}$; $t = 5$ с.

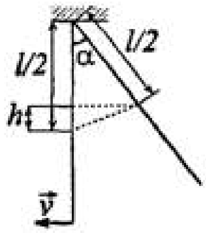
3.36 К ободу диска массой m = 5 кг приложена касательная сила F = 19,6 H. Какую кинетическую энергию $W_к$ будет иметь диск через время t = 5 с после начала действия силы?

Решение

Импульс силы $F\Delta t = m\Delta v$, но $v_0 = 0$ и $t_0 = 0$, следовательно, $Ft = mv$. Отсюда $v = \dfrac{Ft}{m}$. Кинетическая энергия вращения диска $W_к = \dfrac{J\omega^2}{2}$; где $J = \dfrac{1}{2}mR^2$, $\omega = \dfrac{v}{R}$; $W_к = \dfrac{mR^2v^2}{2\cdot 2\cdot R^2} = \dfrac{F^2t^2}{4m}$. После подстановки числовых данных $W_к = 480$ Дж.

3.37 Однородный стержень длиной l = 1 м подвешен на горизонтальной оси, проходящей через верхний конец стержня. На какой угол α надо отклонить стержень, чтобы нижний конец стержня при прохождении положения равновесия имел скорость v = 5 м/с?

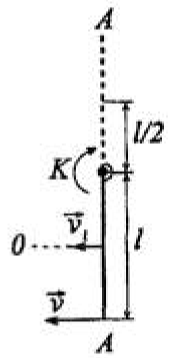
Решение



Рассмотрим движение центра масс стержня. При отклонении на угол α он обладает потенциальной энергией mgh. При прохождении положения равновесия его потенциальная энергия перешла в кинетическую энергию вращения. $mgh = \dfrac{J\omega^2}{2}$ — (1); $h = \dfrac{l}{2} - \dfrac{l}{2}\cos\alpha = \dfrac{l}{2}(1-\cos\alpha)$. Момент инерции стержня относительно оси, проходящей через его конец, найдем по теореме Штейнера: $J = \dfrac{1}{12}ml^2 + m\cdot\left(\dfrac{l}{2}\right)^2 = \dfrac{1}{3}ml^2$. Угловая скорость $\omega = \dfrac{v'}{l/2}$, где v' — скорость прохождения положения равновесия центром масс. $v' = \dfrac{v}{2}$, следовательно, $\omega = \dfrac{v}{l}$. С учетом всего вышеизложенного, перепишем уравнение (1): $mg\dfrac{l}{2}(1-\cos\alpha) = \dfrac{ml^2v^2}{6l^2}$, $gl(1-\cos\alpha) = \dfrac{mv^2}{3}$. Отсюда $\cos\alpha = 1 - \dfrac{v^2}{3gl}$. Подставим числовые значения $\cos\alpha = 0{,}15$; $\alpha = 81°$.

3.38 Однородный стержень длиной l = 85 см подвешен на горизонтальной оси, проходящей через верхний конец стержня. Какую скорость v надо сообщить нижнему концу стержня, чтобы он сделал полный оборот вокруг оси?

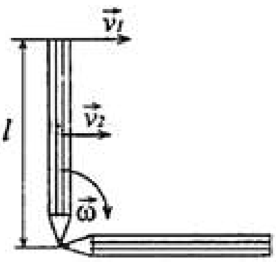
Решение



Рассмотрим движение центра масс стержня. Пусть K — точка подвеса стержня. Если стержень сделает пол-оборота и поднимется вертикально вверх, он будет обладать потенциальной энергией mgl. Для этого центру масс стержня нужно сообщить кинетическую энергию $\frac{J\omega^2}{2} = mgl$ — (1). Момент инерции стержня относительно оси, проходящей через его конец, найдем по теореме Штейнера: $J = \frac{1}{12}ml^2 + m\cdot\left(\frac{l}{2}\right)^2 = \frac{1}{3}ml^2$. Угловая скорость $\omega = \frac{v}{l}$ — (3), она одинакова для всех точек, принадлежащих стержню. Подставив (2) и (3) в (1), получим $\frac{ml^2v^2}{3\cdot 2\cdot l^2} = mgl$, откуда $v = \sqrt{6gl}$; $v = 7{,}1$ м/с. Это скорость, при которой стержень поднимется в строго вертикальное положение. При $v > 7{,}1$ м/с он сделает полный оборот.

3.39 Карандаш длиной l = 15 см, поставленный вертикально, падает на стол. Какую угловую скорость ω и линейную скорость v будет иметь в конце падения середина и верхний конец карандаша?

Решение



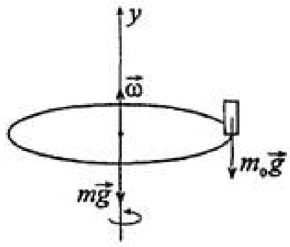
Рассмотрим движение центра масс карандаша. В вертикальном положении он обладает потенциальной энергией, которая при падении переходит в кинетическую энергию вращения. $\frac{J\omega_1^2}{2} = mg\frac{l}{2}$ — (1).

Момент инерции карандаша относительно оси, проходящей через его конец, найдем по теореме Штейнера: $J = \frac{1}{12}ml^2 + m\left(\frac{l}{2}\right)^2 = \frac{1}{3}ml^2$ — (2).

Подставив (2) в (1), получим $\frac{l\omega_1^2}{3} = g$, откуда $\omega_1 = \sqrt{\frac{3g}{l}}$; $\omega_1 = 14$ рад/с. Поскольку $\omega_1 = \omega_2 = \omega$, а линейная скорость $v = \omega R$, то скорость конца карандаша $v_1 = \omega\cdot l = 2{,}1$ м/с. Скорость середины $v_2 = \omega\frac{l}{2} = 1{,}05$ м/с.

3.40 Горизонтальная платформа массой m = 100 кг вращается вокруг вертикальной оси, проходящей через центр платформы, с частотой n_1 = 10 об/мин. Человек массой m_0 = 60 кг стоит при этом на краю платформы. С какой частотой n_2 начнет вращаться платформа, если человек перейдет от края платформы к ее центру? Считать платформу однородным диском, а человека — точечной массой.

Решение



Система «человек — платформа» замкнута в проекции на ось y, т. к. моменты сил $M_{mg} = 0$ и $M_{m_0 g} = 0$ в проекции на эту ось. Следовательно, можно воспользоваться законом сохранения момента импульса. В проекции на ось y: $J_1\omega_1 = J_2\omega_2$, где J_1 — момент инерции платформы с человеком, стоящим на ее краю, J_2 — момент инерции платформы с человеком, стоящим в центре, ω_1 и ω_2 — угловые скорости платформы в обоих случаях. Здесь $J_1 = \frac{mR^2}{2} + m_0R^2$, $J_2 = \frac{mR^2}{2}$ — (2), где R — радиус платформы. Подставляя (2) в (1) и учитывая, что $\omega = 2\pi n$, где n — частота вращения платформы, получим $\left(\frac{mR^2}{2} + m_0R^2\right)2\pi n_1 = 2\pi n_2 \frac{mR^2}{2}$; $n_2 = n_1 \frac{mR^2 + 2m_0R^2}{mR^2} = n_1 \frac{m + 2m_0}{m}$; $n_2 = 22$ об/мин.

3.41 Горизонтальная платформа массой m = 100 кг вращается вокруг вертикальной оси, проходящей через центр платформы, с частотой n_1 = 10 об/мин. Человек массой m_0 = 60 кг стоит при этом на краю платформы. Какую работу A совершает человек при переходе от края платформы к ее центру? Радиус платформы R = 1,5 м. Считать платформу однородным диском, а человека — точечной массой.

Решение

При переходе с края платформы к центру человек совершает работу, равную разности кинетических энергий вращения. $A = \frac{J_2\omega_2^2}{2} - \frac{J_1\omega_1^2}{2}$ — (1), где J_1 — момент инерции платформы с человеком на краю, J_2 — момент инерции платформы с человеком в центре. $J_1 = \frac{mR^2}{2} + m_0R^2$; $J_2 = \frac{mR^2}{2}$. Частота вращения $\omega_1 = 2\pi n_1$; $\omega_2 = 2\pi n_2$. Воспользуемся формулой для n_2, полученной в задаче 3.40: $n_2 = n_1 \frac{m + 2m_0}{m}$, тогда $\omega_2 = 2\pi n_1 \frac{m + 2m_0}{m} = \omega_1 \frac{m + 2m_0}{m}$. Подставив числовые значения, получим: $J_1 = 247{,}5$ кг·м², $J_1 = 112{,}5$ кг·м², $\omega_1 = 1{,}1$ рад/с, $\omega_2 = 2{,}3$ рад/с. Подставив найденные значения в (1), получим: $A \approx 162$ Дж.

3.42 Горизонтальная платформа массой m = 80 кг и радиусом R = 1 м вращается с частотой n_1 = 20 об/мин. В центре платформы стоит человек и держит в расставленных руках гири. С какой частотой n_2 будет вращаться платформа, если человек, опустив руки, уменьшит свой момент инерции от J_1 = 2,94 до J_2 = 0,98 кг·м^2? Считать платформу однородным диском.

Решение

Момент инерции платформы с человеком складывается из момента инерции пустой платформы и момента инерции человека. В начальном положении $J_{10} = J_0 + J_1$ — (1), а когда человек опустил руки $J_{10} = J_0 + J_2$ — (2). Здесь $J_0 = \frac{mR^2}{2}$ — (3). По закону сохранения момента импульса $J_{10}\omega_1 = J_{20}\omega_2$, где $\omega_1 = 2\pi n_1$; $\omega_2 = 2\pi n_2$. Тогда $J_{10} 2\pi n_1 = J_{20} 2\pi n_2$, откуда $n_2 = \frac{J_{10}n_1}{J_{20}}$ — (4). Решая совместно (1) — (4), получим: $n_2 = \frac{\left(mR^2/2 + J_1\right)\cdot n_1}{mR^2/2 + J_2}$ — (5); $n_2 = 0{,}35$ об/с $= 21$ об/мин.

3.43 Во сколько раз увеличилась кинетическая энергия платформы с человеком в условиях предыдущей задачи?

Решение

Кинетическая энергия платформы с человеком $W_k = \frac{J\omega^2}{2}$. Тогда первоначальная кинетическая энергия $W_{k1} = \frac{J_{10}\omega_1^2}{2}$, а после того, как человек опустил руки $W_{k2} = \frac{J_{20}\omega_2^2}{2}$. Здесь

$$J_{10} = \frac{mR^2}{2} + J_1; \quad J_{20} = \frac{mR^2}{2} + J_2; \quad \omega_1 = 2\pi n_1; \quad \omega_2 = 2\pi n_2.$$

Тогда $\frac{W_{к1}}{W_{к2}} = \frac{J_{20}\omega_2^2}{J_{10}\omega_1^2} = \frac{\left(mR^2/2 + J_1\right)4\pi^2 n_1^2}{\left(mR^2/2 + J_2\right)4\pi^2 n_2^2} = \frac{n_1^2\left(mR^2 + 2J_1\right)}{n_2^2\left(mR^2 + J_2\right)}$.

Из уравнения (5) предыдущей задачи $n_2 = \frac{\left(mR^2 + 2J_1\right)\cdot n_1}{mR^2 + 2J_2}$,

тогда $\frac{W_{к2}}{W_{к1}} = \frac{mR^2 + 2J_2}{mR^2 + 2J_1}$; $\frac{W_{к2}}{W_{к1}} = 1{,}05$.

3.44 Человек массой m_0 = 60 кг находится на неподвижной платформе массой m = 100 кг. С какой частотой n будет вращаться платформа, если человек будет двигаться по окружности радиусом r = 5 м вокруг оси вращения? Скорость движения человека относительно платформы V_0 = 4 км/ч. Радиус платформы R = 10 м. Считать платформу однородным диском, а человека — точечной массой.

Решение

По закону сохранения момента импульса $(J_1 + J_2)\times \omega = rm_0v_0$ — (1), где $J_1 = m_0r^2$ — (2) — момент инерции человека; $J_2 = \frac{1}{2}mR^2$ — (3) — момент инерции платформы, rm_0v_0 — момент импульса человека. Подставив (2) и (3) в (1), получим $(m_0r^2 + 1/2mR^2)\omega = rm_0v_0$ или $(m_0r^2 + 1/2mR^2)2\pi n = rm_0v_0$, откуда $n = \frac{rm_0v_0}{\pi(2m_0r^2 + mR^2)}$. Подставив числовые значения, учитывая, что $v = 1{,}1$ м/с, получим $n = 0{,}49$ об/мин.

3.45 Однородный стержень длиной l = 0,5 м совершает малые колебания в вертикальной плоскости около горизонтальный оси, проходящей через его верхний конец. Найти период колебаний T стержня.

Решение

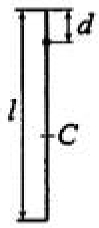
В данной задаче стержень является физическим маятником, его период малых колебаний $T = 2\pi\sqrt{\frac{J}{mdg}}$, где J — момент инерции стержня относительно оси вращения, $d = \frac{l}{2}$ — (2) — расстояние от центра масс до оси вращения. По теореме Штейнера $J = J_0 + md^2$, где $J_0 = \frac{1}{12}ml^2$, отсюда $J = \frac{ml^2}{12} + \frac{ml^2}{4} = \frac{4ml^2}{12} = \frac{ml^2}{3}$ — (3).

Подставив (2) и (3) в (1), получим $T = 2\tau\sqrt{\frac{2ml^2}{3mlg}} = 2\pi\sqrt{\frac{2l}{3g}}$;

$T = 1{,}16$ с.

3.46 Найти период колебания T стержня предыдущей задачи, если ось вращения проходит через точку, находящуюся на расстоянии d = 10 см от его верхнего конца.

Решение

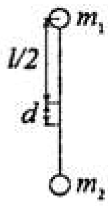


Период малых колебаний стержня $T = 2\pi \times \times \sqrt{\frac{J}{m \cdot (l/2 - d)g}}$. По теореме Штейнера $J = J_0 + + m\left(\frac{l}{2} - d\right)^2$, где $J_0 = \frac{ml^2}{12}$. Отсюда $J = \frac{ml^2}{12} + + \frac{ml^2}{4} - mld + md^2 = \frac{4ml^2}{12} - md(l-d)$; $J = m \cdot \left(\frac{l^2}{3} - dl + d^2\right)$.

Тогда $T = 2\pi\sqrt{\frac{l^2/3 - dl + d^2}{g(l/2 - d)}}$; $T = 1{,}07$ с.

3.47 На концах вертикального стержня укреплены два груза. Центр масс грузов находится ниже середины стержня на расстоянии d = 5 см. Найти длину стержня l, если известно, что период малых колебаний стержня с грузами вокруг горизонтальный оси, проходящей через его середину, T = 2 с. Массой стержня пренебречь по сравнению с массой грузов.

Решение



Данная система является математическим маятником, для которого квадрат периода малых колебаний определяется по формуле: $T^2 = 4\pi^2 \frac{J}{(m_1 + m_2)dg}$. Момент инерции такого маятника: $J = l^2(m_1 + m_2)/4$. Отсюда $T^2 = 4\pi^2 \times \times \frac{l^2(m_1 + m_2)}{4(m_1 + m_2) \cdot dg} = \pi^2 \frac{l^2}{dg}$, откуда окончательно получим: $l = T\sqrt{dg}/\pi$; $l = 0{,}446$ м.

3.48 Обруч диаметром D = 56,5 см висит на гвозде, вбитом в стенку, и совершает малые колебания в плоскости, параллельной стене. Найти период колебаний T обруча.

Решение

Центр масс находится в центре обруча, тогда период малых колебаний $T = 2\pi\sqrt{\frac{J}{mRg}} = 2\pi\sqrt{\frac{2J}{mDg}}$, где $J = \frac{1}{2}m \times \times \left(R_1^2 + R_2^2\right)$, $R_1 = R_2$, следовательно, $J = mR^2 = m\frac{D^2}{4}$.

Отсюда $T = 2\pi\sqrt{\frac{2mD^2}{4mDg}} = 2\pi\sqrt{\frac{D}{2g}}$; $T = 1{,}5$ с.

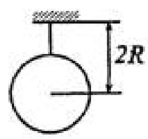
3.49 Какой наименьшей длины l надо взять нить, к которой подвешен однородный шарик диаметром D = 4 см, чтобы при определении периода малых колебаний T шарика рассматривать его как математический маятник? Ошибка δ при таком допущении не должна превышать 1%.

Решение

Период малых колебаний математического маятника $T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ — (1), период малых колебаний физического маятника $T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{J}{mgl}}$, где J — момент инерции шарика относительно оси вращения, m — масса шарика и l — расстояние от центра масс шарика до точки подвеса. В нашем случае $J = \frac{2}{5}mR^2 + ml^2 = ml^2\left[1 + \frac{2}{5}\left(\frac{R}{l}\right)^2\right]$. Обозначим $A = 1 + \frac{2}{5}\left(\frac{R}{l}\right)^2$, тогда $J = Aml^2$. С учетом этого получим $T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{lA}{g}}$ — (2). Из (1) и (2) имеем $\frac{T_2}{T_1} = \sqrt{A}$. Ошибка, которую мы делаем, принимая подвешенный шарик за математический маятник, будет $\delta = \frac{T_2 - T_1}{T_1} = \frac{T_2}{T_1} - 1 = \sqrt{A} - 1$; отсюда $A = \left[1 + \frac{2}{5}\left(\frac{R}{l}\right)^2\right] = (1+\delta)^2$, или $\frac{R}{l} = \sqrt{\frac{5}{2}\left[(1+\delta)^2 - 1\right]}$ — (3). По условию $\delta \le 0{,}01$. Подставляя в (3), получим $\frac{R}{l} \le 0{,}0224$. Так как $R = \frac{D}{2} = 0{,}02$ м, то предельное расстояние от центра масс шарика до точки подвеса $l \ge 0{,}089$ м, а предельная длина нити $L = l - R$; $L = 0{,}069$ м.

3.50 Однородный шарик подвешен на нити, длина которой l равна радиусу шарика R. Во сколько раз период малых колебаний T_1 этого маятника больше периода малых колебаний T_2 математического маятника с таким же расстоянием от центра масс до точки подвеса?

Решение



Период малых колебаний данного физического маятника $T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{J}{m2Rg}}$. Период малых колебаний математического маятника $T_2 = 2\pi\sqrt{2R/g}$. По теореме Штейнера $J = J_0 + m(2R)^2$, где $J_0 = \frac{2}{5}mR^2$, отсюда $J = \frac{2}{5}mR^2 + 4mR^2 = 4{,}4mR^2$. Тогда $T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{4{,}4mR^2}{2mRg}} = 2\pi\sqrt{\frac{2{,}2R}{g}}$; $\frac{T_1}{T_2} = \frac{2\pi\sqrt{2{,}2R}\sqrt{g}}{2\pi\sqrt{g}\sqrt{2R}}$. После подстановки $\frac{T_1}{T_2} = 1{,}05$.

§ 4. Механика жидкостей и газов

4.1 Найти скорость v течения углекислого газа по трубе, если известно, что за время $t = 30$ мин через поперечное сечение трубы протекает масса газа $m = 0{,}51$ кг. Плотность газа $\rho = 7{,}5$ кг/м^3. Диаметр трубы $D = 2$ см.

Решение

За время t через поперечное сечение трубы проходит некоторый объем газа цилиндрической формы (масса этого объема газа нам известна). $V = \pi \dfrac{D^2}{4} l = \dfrac{m}{\rho}$ — (1). Скорость течения углекислого газа $v = l/t$. Из уравнения (1) найдем $l = \dfrac{4m}{\pi D^2 \rho}$, тогда $v = \dfrac{4m}{\pi D^2 \rho t}$; $v = 0{,}12$ м/с.

4.2 В дне цилиндрического сосуда диаметром $D = 0{,}5$ м имеется круглое отверстие диаметром $d = 1$ см. Найти зависимость скорости понижения уровня воды в сосуде от высоты h этого уровня. Найти значение этой скорости для высоты $h = 0{,}2$ м.

Решение

По теореме Бернулли $\dfrac{\rho v_1^2}{2} + \rho g h_2 = \dfrac{\rho v_2^2}{2}$ или $v_1^2 + 2gh = v_2^2$ — (1), где v_1 — скорость понижения уровня воды в сосуде, v_2 — скорость вытекания воды из отверстия. В силу неразрывности струи $v_1 S_1 = v_2 S_2$, откуда $v_2 = \dfrac{v_1 S_1}{S_2}$ — (2), где S_1 — площадь поперечного сечения сосуда, S_2 — площадь поперечного сечения отверстия. Подставляя (2) в (1), получим $v_1 = \dfrac{S_2\sqrt{2gh}}{\sqrt{S_1^2 - S_2^2}}$. Так как $S_1 = \dfrac{\pi D^2}{4}$ и $S_2 = \dfrac{\pi d^2}{4}$, то $v_1 = \dfrac{d^2\sqrt{2gh}}{\sqrt{D^4 - d^4}}$. Поскольку $d^4 << D^4$, то $v_1 \approx \dfrac{d^2}{D^2}\sqrt{2gh}$. При $h = 0{,}2$ м скорость $v_1 = 0{,}8$ мм/с.

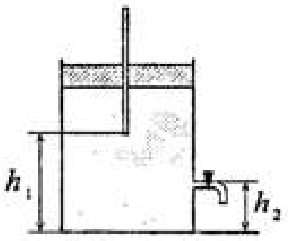
4.3 На столе стоит сосуд с водой, в боковой поверхности которого имеется малое отверстие, расположенное на расстоянии h_1, от дна сосуда и на расстоянии h_2 от уровня воды. Уровень воды в сосуде поддерживается постоянным. На каком расстоянии l от сосуда (по горизонтали) струя воды падает на стол в случае, если: а) $h_1 = 25$ см, $h_2 = 16$ см; б) $h_1 = 16$ см, $h_2 = 25$ см?

Решение

По теореме Бернулли $\dfrac{\rho v_1^2}{2} + \rho g h_2 = \dfrac{\rho v_2^2}{2}$ или $v_1^2 + 2gh = v_2^2$ — (1), где v_1 — скорость понижения уровня воды в сосуде, v_2 — скорость вытекания воды из отверстия. По условию $v_1 = 0$, тогда $v_2 = \sqrt{2gh_2}$. Высота $h_1 = \dfrac{gt^2}{2}$. Откуда время $t = \sqrt{2h_1/g}$, тогда расстояние $l = v_2 t$; $l = \sqrt{4gh_1h_2/g} = 2\sqrt{h_1h_2}$; $l = 0{,}4$ м.

4.4 Сосуд, наполненный водой, сообщается с атмосферой через стеклянную трубку, закрепленную в горлышке сосуда. Кран K находится на расстоянии $h_2 = 2$ см от дна сосуда. Найти скорость v вытекания воды из крана в случае, если расстояние между нижним концом трубки и дном сосуда: а) $h_1 = 2$ см; б) $h_1 = 7{,}5$ см; в) $h_1 = 10$ см.

Решение



По закону сохранения энергии $W_п = W_к$, где $W_п = mg\Delta h = mg \times (h_1 - h_2)$ — потенциальная энергия водного столба над краном. $W_к = \frac{mv^2}{2}$ — кинетическая энергия вытекающей воды. $mg(h_1 - h_2) = \frac{mv^2}{2}$, отсюда $v^2 = 2g(h_1 - h_2)$ и $v = \sqrt{2g(h_1 - h_2)}$. а) При $h_1 = 0{,}02$ м, $h_1 = h_2$, следовательно, $\Delta h = 0$ и $v = 0$. б) При $h_1 = 0{,}075$ м, $v = 1{,}04$ м/с. в) При $h_1 = 0{,}1$ м, $v = 1{,}25$ м/с.

4.5 Цилиндрической бак высотой $h = 1$ м наполнен до краев водой. За какое время t вся вода выльется через отверстие, расположенное у дна бака, если площадь S_2 поперечного сечения отверстия в 400 раз меньше площади поперечного сечения бака? Сравнить это время с тем, которое понадобилось бы для вытекания того же объема воды, если бы уровень воды в баке поддерживался постоянным на высот $h = 1$ м от отверстия.

Решение

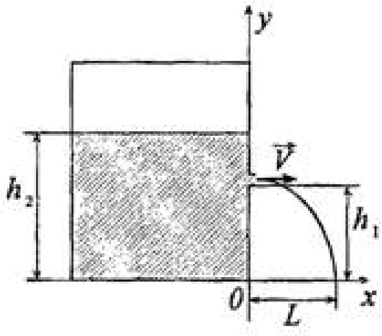
В задаче 4.2 была получена формула, выражающая скорость понижения уровня воды в баке $v_1 = \frac{S_2\sqrt{2gx}}{\sqrt{S_1^2 - S_2^2}}$. Здесь x — переменный уровень воды в баке. За время dt уровень воды в баке понизится на $dx = v \cdot dt = \frac{S_2\sqrt{2g}}{\sqrt{S_1^2 - S_2^2}}\sqrt{x}dt$. Решаем это уравнение:

$$t = \frac{\sqrt{S_1^2 - S_2^2}}{S_2\sqrt{2g}}\int_0^h \frac{dx}{\sqrt{x}}; \quad t = \frac{\sqrt{S_1^2 - S_2^2}}{S_2\sqrt{2g}}2\sqrt{x}\Big|_0^h; \quad t = \frac{2\sqrt{h}\sqrt{S_1^2 - S_2^2}}{S_2\sqrt{2g}}.$$

Подставив числовые данные, получим $t = 3$ мин.

4.6 В сосуд льется вода, причем за единицу времени наливается объем воды $V_1 = 0{,}2$ л/с. Каким должен быть диаметр d отверстия в дне сосуда, чтобы вода в нем держалась на постоянном уровне $h = 8{,}3$ см?

Решение



Чтобы вода в сосуде была на постоянном уровне, необходимо, чтобы за одинаковые промежутки времени втекало и вытекало одинаковое количество воды. $V_t = \frac{V}{t} = \frac{lS}{t} = vS$, отсюда $v = \frac{V_t}{S}$. Т. к. $S = \frac{\pi d^2}{4}$ — площадь поперечного сечения отверстия, то скорость вытекания жидкости $v = \frac{4V_t}{\pi d^2}$. Из уравнения Бернулли $\frac{\rho v^2}{2} = \rho gh$, отсюда $v = \sqrt{2gh}$. Тогда $\sqrt{2gh} = \frac{4V_t}{\pi d^2}$; $d^2 = \frac{4V_t}{\pi\sqrt{2gh}}$; $d = \sqrt{\frac{4V_t}{\pi\sqrt{2gh}}} = 1{,}4$ см.

4.7 Какое давление p создает компрессор в краскопульте, если струя жидкой краски вылетает из него со скоростью $v = 25$ м/с? Плотность краски $\rho = 0{,}8 \cdot 10^3$ кг/м^3.

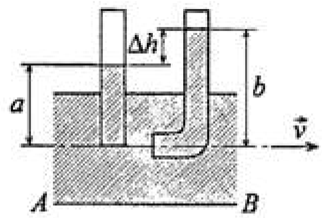
Решение

Уравнение Бернулли для установившегося движения идеальной несжимаемой жидкости $p + \frac{\rho v^2}{2} + \rho gh = const$.

В нашем случае при $h = 0$, $p = \frac{\rho v^2}{2} = 250$ кПа.

4.8 По горизонтальный трубе AB течет жидкость. Разность уровней этой жидкости в трубах a и b равна $\Delta h = 10$ см. Диаметры трубок a и b одинаковы. Найти скорость v течения жидкости в трубе AB.

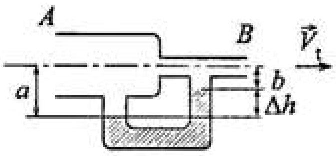
Решение



Т. к. диаметры трубок $D_a = D_b$, то площади поперечного сечения $S_a = S_b$ — (1). В силу неразрывности струи $v_a S_a = v_b S_b$ — (2). Из (1) и (2) $v_a = v_b = v$. По формуле Торричелли $\rho ga + \frac{\rho v^2}{2} = \rho gb$, отсюда $v^2/2 = gb - ga = g(b-a)$. Т. к. $b - a = \Delta h$, то $v^2 = 2g\Delta h$ и $v = \sqrt{2g\Delta h} = 1{,}4$ м/с.

4.9 Воздух продувается через трубку AB. За единицу времени через трубку AB протекает объем воздуха $V_t = 5$ л/мин. Площадь поперечного сечения широкой части трубки AB равна $S_1 = 2$ см^2, а узкой ее части и трубки abc равна $S_2 = 0,5$ см^2. Найти разность уровней Δh воды, налитой в трубку abc. Плотность воздуха $\rho = 1,32$ кг/м^3.

Решение



Объем воздуха, протекающий за единицу времени через трубку AB, $V_t = \frac{V}{t} = \frac{lS}{t} = vS$, отсюда $v = \frac{V_t}{S}$, где l — длина струи, t — время, $v = l/t$ — скорость движения воздуха. $v_1 = \frac{V_t}{S_1}$; $v_2 = \frac{V_t}{S_2}$; $V_t = 8{,}33 \cdot 10^{-6}$ м^3/с. Из формулы Торричелли имеем $\frac{\rho_{воз} v_1^2}{2} + \rho_{вод} g \Delta h = \frac{\rho_{воз} v_2^2}{2}$, откуда

$$\Delta h = \frac{\rho_{воз} V_t^2}{2\rho_{вод} g}\left(\frac{1}{S_2^2} - \frac{1}{S_1^2}\right) = \frac{\rho_{воз} V_t^2 \left(S_1^2 - S_2^2\right)}{2\rho_{вод} g S_1^2 S_2^2} = 1{,}75 \text{ мм}.$$

4.10 Шарик всплывает с постоянной скоростью v в жидкости, плотность ρ_1 которой в 4 раза больше плоскости материала шарика. Во сколько раз сила трения $F_{тр}$, действующая на всплывающий шарик, больше силы тяжести mg, действующей на этот шарик?

Решение

По второму закону Ньютона $F_A - mg - F_{тр} = 0$ — (1), где $F_A = \rho_1 V g$ — (2); $m = \rho_2 V$ — (3). Из (3) $V = \frac{m}{\rho_2}$, тогда $F_A = 4\rho_2 \frac{m}{\rho_2} g = 4mg$ — (4). Преобразуя (1) с учетом (4), получим $F_{тр} = 3mg$ или $\frac{F_{тр}}{mg} = 3$.

4.11 Какой наибольшей скорости v может достичь дождевая капля диаметром $d = 0,3$ мм, если динамическая вязкость воздуха $\eta = 1,2 \cdot 10^{-5}$ Па·с?

Решение

Во время падения на каплю действуют две противоположно направленные силы. Сила тяжести $m\vec{g}$ и сила сопротивления воздуха $\vec{F}$ (силу Архимеда не учитываем). При увеличении скорости падения сила сопротивления растет. Максимальной скорости капля достигнет, когда сила тяжести и сила сопротивления воздуха станут равны, $F = mg$. По закону Стокса $F = 6\pi\eta r v = 3\pi\eta d v$, тогда $3\pi\eta d v = mg$. Поскольку $m = \rho V = \rho \frac{\pi d^3}{6}$, где ρ — плотность воды, то $3\pi\eta d v = \rho g \frac{\pi d^2}{6}$, откуда $v = \frac{\rho g d^2}{18\eta}$; $v = 4{,}1$ м/с.

4.12 Стальной шарик диаметром d = 1 мм падает с постоянной скоростью v = 0,185 см/с в большом сосуде, наполненном касторовым маслом. Найти динамическую вязкость η касторового масла.

Решение

Поскольку шарик движется равномерно, то по второму закону Ньютона $mg - F_A - F = 0$ — (1), где масса шарика $m = \rho_c V = \rho_c \frac{\pi d^3}{6}$ —(2); сила Архимеда $F_A = \rho_м Vg = \rho_м g \times \frac{\pi d^3}{6}$ — (3); сила сопротивления масла $F = 3\pi\eta dv$ — (4) по закону Стокса. Подставляя уравнения (2) — (4) в (1), после несложных преобразований получим $18\eta v = d^2 g \times (\rho_c - \rho_м)$, откуда $\eta = \frac{d^2 g(\rho_c - \rho_м)}{18v}$; $\eta = 2$ Па·с.

4.13 Смесь свинцовых дробинок с диаметрами d_1 = 3 мм и d_2 = 1 мм опустили в бак с глицерином высотой h = 1 м. На сколько позже упадут на дно дробинки меньшего диаметра по сравнению с дробинками.

Решение

Считая движение дробинок равномерным, запишем второй закон Ньютона в общем случае $mg - F_A - F = 0$ — (1), где масса дробинки $m = \rho_c V = \rho_c \pi d^3/6$ — (2); сила Архимеда $F_A = \rho_г Vg = \rho_г g \frac{\pi d^3}{6}$ — (3); сила сопротивления глицерина $F = 3\pi\eta dv$ — (4) по закону Стокса. Подставив уравнение (2) — (4) в (1), после несложных преобразований получим $18\eta v = d^2 g(\rho_c - \rho_г)$ — (5). Здесь ρ — плотность свинца, $\rho_г$ — плотность глицерина. При равномерном движении скорость $v = \frac{h}{t}$ — (6). Подставив уравнение (6) в (5), выразим время t за которое дробинка достигнет дна $t = \frac{18\eta h}{d^2 g(\rho_c - \rho_г)}$. Тогда $\Delta t = t_2 - t_1 = \frac{18\eta h}{g(\rho_c - \rho_г)}$; $\Delta t = 4$ мин.

4.14 Пробковый шарик радиусом r = 5 мм всплывает в сосуде, наполненном касторовым маслом. Найти динамическую и кинематическую вязкости касторового масла, если шарик всплывает с постоянной скоростью v = 3,5 см/с.

Решение

Поскольку шарик движется равномерно, то по второму закону Ньютона $F_A - F - mg = 0$ — (1), где масса шарика $m = \rho_п V = \rho_п \frac{4\pi r^3}{3}$ — (2); сила Архимеда $F_A = \rho_м V g = \rho_м g \frac{4\pi r^3}{3}$ — (3); сила сопротивления масла $F = 6\pi\eta r v$ — (4) по закону Стокса. Подставляя уравнения (2) — (4) в (1), после несложных преобразований получим $18\eta v = 4r^2 g(\rho_п - \rho_м)$, откуда динамическая вязкость $\eta = \frac{2r^2 g(\rho_п - \rho_м)}{9v}$; $\eta = 1{,}09$ Па·с. Кинематическая вязкость масла $\nu = \eta / \rho_м$; $\nu = 12{,}1$ см^2/с.

4.15 В боковую поверхность цилиндрического сосуда радиусом R = 2 см вставлен горизонтальный капилляр, внутренний радиус r = 1 мм которого и длина l = 2 см. В сосуд налито касторовое масло, динамическая вязкость которого η = 1,2 Па·с. Найти зависимость скорости v понижения уровня касторового масла в сосуде от высоты h этого уровня над капилляром. Найти значение этой скорости при h = 26 см.

Решение

Объем масла, вытекающего за время t из сосуда через капилляр, определяется формулой Пуазейля: $V = \frac{\pi r^4 t \Delta P}{8 l \eta}$ — (1), где разность давлений на концах капилляра $\Delta P = \rho g h$ — (2). С другой стороны, $V = S' v' t = \pi r^2 v' t$ — (3), где v' — скорость протекания масла через капилляр. Решая совместно (1) — (3), найдем $v' = \frac{r^2 \rho g h}{8 l \eta}$. В силу неразрывности струи $v'S' = vS$, где S — площадь поперечного сечения сосуда, отсюда $v = \frac{v'S'}{S} = \frac{v' r^2}{R^2}$. Окончательно имеем $v = \frac{r^4 \rho g h}{8 l \eta R^2}$. При $h = 0{,}26$ м скорость $v = 3 \cdot 10^{-5}$ м/с.

4.16 В боковую поверхность сосуда вставлен горизонтальный капилляр, внутренний радиус которого r = 1 мм и длина l = 1,5 см. В сосуд налит глицерин, динамическая вязкость которого η = 1,0 Па·с. Уровень глицерина в сосуде поддерживается постоянным на высоте h = 0,18 м выше капилляра. Какое время потребуется на то, чтобы из капилляра вытек объем глицерина V = 5 см^3?

Решение

Объем глицерина, вытекающего за время t из сосуда через капилляр, определяется формулой Пуазейля $V = \frac{\pi r^4 t \Delta P}{8 l \eta}$ — (1). Разность давлений на концах капилляра обусловлена гидростатическим давлением жидкости, $\Delta P = \rho g h$ — (2). Подставив (2) в (1), выразим t: $t = \frac{8 V l \eta}{\pi r^4 \rho g h}$; $t = 1{,}5$ мин.

4.17 На столе стоит сосуд, в боковую поверхность которого вставлен горизонтальный капилляр на высоте h_1= 5 см от дна сосуда. Внутренний радиус капилляра r = 1 мм и длина l = 1 см. В сосуд налито машинное масло, плотность которого ρ = 0,9·10^3 кг/м^3 и динамическая вязкость η = 0,5 Па·с. Уровень масла в сосуде поддерживается постоянным на высоте h_2 = 50 см выше капилляра. На каком расстоянии L от конца капилляра (по горизонтали) струя масла падает на стол?

Решение

По формуле Пуазейля $V = \frac{\pi r^4 t \Delta p}{8 l \eta}$, где по закону Паскаля перепад давления $\Delta p = \rho g \Delta h = \rho g (h_2 - h_1)$. Тогда $V = \frac{\pi r^4 t \rho g (h_2 - h_1)}{8 l \eta}$, отсюда $V_t = \frac{V}{t} = \frac{\pi r^4 \rho g (h_2 - h_1)}{8 l \eta}$. С другой стороны, $V_t = vS = v\pi r^2$ (см. задачи 4.6 и 4.9), следовательно, $v \pi r^2 = \frac{\pi r^4 \rho g (h_2 - h_1)}{8 l \eta}$; $v = \frac{r^2 \rho g (h_2 - h_1)}{8 l \eta}$ — скорость вытекания струи из капилляра. Далее рассматриваем движения струи вдоль осей x и y, как независимые, причем по x движение равномерное, а по y — равнопеременное, поэтому $x = vt$ и $y = h_1 - \frac{gt^2}{2}$. В точке падения струи на стол $y = 0$, соответственно $h_1 - \frac{gt^2}{2} = 0$; $t^2 = \frac{2h_1}{g}$; $t = \sqrt{\frac{2h_1}{g}}$. Тогда струя падает на стол на расстоянии $L = x = vt = \frac{r^2 \rho g (h_2 - h_1)}{8 l \eta} \sqrt{\frac{2h_1}{g}} = 1$ см.

4.18 Стальной шарик падает в широком сосуде, наполненном трансформаторным маслом, плотность которого $\rho = 0{,}9\cdot10^3$ кг/м^3 и динамическая вязкость $\eta = 0{,}8$ Па·с. Считая, что закон Стокса имеет место при числе Рейнольдса $Re \leq 0{,}5$ (если при вычислении Re в качестве величины D взять диаметр шарика), найти предельное значение диаметра D шарика.

Решение

Поскольку шарик движется равномерно, то по второму закону Ньютона $mg - F_A - F = 0$ — (1), где масса шарика $m = \rho_c V = \rho_c \dfrac{\pi d^3}{6}$ — (2); сила Архимеда $F_A = \rho_м V g = \rho_м \times \times g \dfrac{\pi d^3}{6}$ — (3); сила сопротивления масла $F = 3\pi\eta d v$ — (4) по закону Стокса. Подставляя уравнения (2) — (4) в (1), после несложных преобразований получим $18\eta v = d^2 g \times \times(\rho_c - \rho_м)$, откуда $v = \dfrac{D^2 g(\rho_c - \rho_м)}{18\eta}$ — (5). Число Рейнольдса определяется соотношением $Re = \dfrac{Dv\rho_м}{\eta}$. По условию $Re \leq 0{,}5$, тогда $\dfrac{Dv\rho_м}{\eta} \leq 0{,}5$ или, с учетом (5), $\dfrac{D^3 g(\rho_c - \rho_м)\rho_м}{18\eta^2} \leq 0{,}5$. Отсюда $D \leq \sqrt[3]{\dfrac{0{,}5\cdot 18\eta^2}{g\rho_м(\rho_c - \rho_м)}}$. Предельный диаметр шарика $D = 4{,}6$ мм.

4.19 Считая, что ламинарность движения жидкости (или газа) в цилиндрической трубе сохраняется при числе Рейнольдса $Re \leq 3000$ (если при вычислении Re в качестве величины D взять диаметр трубы), показать, что условия задачи 4.1 соответствуют ламинарному движению. Кинематическая вязкость газа $\nu = 1{,}33\cdot10^{-6}$ м^2/с.

Решение

Поскольку число Рейнольдса можно задать соотношением $Re = \dfrac{Dv}{\nu}$, то ламинарность течения жидкости сохранится при выполнении условия: $\dfrac{Dv}{\nu} \leq 3000$. Подставив данные задачи 4.1, получим $1805 \leq 3000$. Мы получили верное неравенство, следовательно, условия задачи 4.1 соответствуют ламинарному движению.

4.20 Вода течет по трубе, причем за единицу времени через поперечное сечение трубы протекает объем воды $V_t = 200$ см^3/с. Динамическая вязкость воды $\eta = 0{,}001$ Па·с. При каком предельном значении диаметра D трубы движение воды остается ламинарным? (Смотрите условие предыдущей задачи.)

Решение

Ламинарность течения жидкости сохранится при выполнении условия: $\frac{Dv\rho}{\eta} \le 3000$ — (1). Скорость течения воды $v = \frac{l}{t}$, в единицу времени $v = l$, где l — высота цилиндра объемом V_t. $V_t = \frac{\pi D^2 l}{4}$, откуда $l = \frac{4V_t}{\pi D^2}$. Тогда $v = \frac{4V_t}{\pi D^2}$, а неравенство (1) можно переписать: $\frac{4V_t\rho}{\pi D\eta} \le 3000$, откуда $D \le \frac{4V_t\rho}{3000\pi\eta}$; $D \le 0{,}085$ м.

Глава II. Молекулярная физика и термодинамика

§ 5. Физические основы молекулярно-кинетической теории и термодинамики

5.1 Какую температуру T имеет масса m = 2 г азота, занимающего объем V = 820 см^3 при давлении p = 0,2 МПа?

Решение

Температуру азота можно определить из уравнения Менделеева — Клапейрона $pV = \frac{m}{\mu}RT$, откуда температура азота $T = \frac{pV\mu}{mR}$. Молярная масса азота $\mu = 0{,}028$ кг/моль. Подставляя числовые данные, получим $T = \frac{0{,}2 \cdot 10^6 \cdot 820 \cdot 10^{-6} \cdot 0{,}028}{2 \cdot 10^{-3} \cdot 8{,}31} = 280$ К или $T = 7°$ С.

5.2 Какой объем V занимает масса m = 10 г кислорода при давлении p = 100 кПа и температуре t = 20 °С?

Решение

Выразим объем кислорода из уравнения Менделеева — Клапейрона $pV = \frac{m}{\mu}RT$, откуда $V = \frac{mRT}{\mu p}$. Молярная масса кислорода $\mu = 0{,}032$ кг/моль. Подставляя числовые данные, получим $V = \frac{10^{-2} \cdot 8{,}31 \cdot 293}{0{,}032 \cdot 10^5} = 7{,}6 \cdot 10^{-3}$ м^3.

5.3 Баллон объемом V = 12 л наполнен азотом при давлении p = 8,1 МПа и температуре t = 17 °С. Какая масса m азота находится в баллоне?

Решение

Массу азота можно выразить из уравнения Менделеева — Клапейрона $pV = \frac{m}{\mu}RT$, откуда $m = \frac{pV\mu}{RT}$. Молярная масса азота $\mu = 0{,}028$ кг/моль. $m = 1{,}13$ кг.

5.4 Давление воздуха внутри плотно закупоренной бутылки при температуре t_1 = 7 °С было p_1 = 100 кПа. При нагревании бутылки пробка вылетела. До какой температуры t_2 нагрели бутылку, если известно, что пробка вылетела при давлении воздуха в бутылке p = 130 кПа?

Решение

По закону Шарля $\frac{p_1}{p_2} = \frac{T_1}{T_2}$, отсюда $T_2 = \frac{p_2 T_1}{p_1}$; $T_1 = 280$ К, $p_1 = 10^5$ Па; $T_2 = 364$ К.

5.5 Каким должен быть наименьшей объем V баллона, вмещающего массу m = 6,4 кг кислорода, если его стенки при температуре t = 20 °С выдерживают давление p = 15,7 МПа?

Решение

Согласно уравнению Менделеева — Клапейрона $pV = \frac{m}{\mu}RT$, откуда $V = \frac{mRT}{\mu p}$. Молярная масса кислорода $\mu = 0{,}032$ кг/моль, $T = 293$ К. Тогда $V = 31$ л.

5.6 В баллоне находилась масса m_1 = 10 кг газа при давлении p_1 = 10 МПа. Какую массу Δm газа взяли из баллона, если давление стало равным p_2 = 2,5 МПа? Температуру газа считать постоянной.

Решение

Согласно уравнению Менделеева — Клапейрона для первого состояния $\frac{p_1 V_1}{T} = \frac{m_1}{\mu}R$ — (1), для второго состояния $\frac{p_2 V_2}{T} = \frac{m_2}{\mu}R$ — (2). Разделив (1) на (2), получим $\frac{p_1 V_1}{p_2 V_2} = \frac{m_1}{m_2}$. Поскольку объем баллона не изменяется, то $\frac{p_1}{p_2} = \frac{m_1}{m_2}$ или $\frac{p_1}{p_2} = \frac{m_1}{m_1 + \Delta m}$; $\frac{\Delta m}{m_1} = \frac{p_1 - p_2}{p_1}$, откуда $\Delta m = \frac{m_1(p_1 - p_2)}{p_1}$; $\Delta m = 7{,}5$ кг.

5.7 Найти массу m сернистого газа (SO_2), занимающего объем V = 25 л при температуре t = 27 °С и давлении p = 100 кПа.

Решение

Согласно уравнению Менделеева — Клапейрона $pV = \frac{m}{\mu}RT$, откуда $m = \frac{pV\mu}{RT}$; $T = 300$ К; $V = 25 \cdot 10^{-3}$ м³. Молярную массу данного вещества можно определить по формуле $\mu = M_r k$ — (1), где M_r — относительная молекулярная масса вещества; $k = 10^{-3}$ кг/моль. Относительную молекулярную массу найдем из соотношения $M_r = \sum n_i A_{r,i}$, — (2), где n_i — число атомов i-го химического элемента, входящих в молекулу данного вещества; $A_{r,i}$ — относительная атомная масса i-го химического элемента. В нашем случае для сернистого газа формула (2) примет вид $M_r = n_s A_{r,s} + n_o A_{r,o}$, где $n_s = 1$ (число атомов серы в молекуле сернистого газа); $n_o = 2$ (число атомов кислорода в той же формуле); $A_{r,s}$ и $A_{r,o}$ — относительные атомные массы серы и кислорода. По таблице Д. И. Менделеева найдем $A_{r,s} = 32$, $A_{r,o} = 16$. После подстановки в формулу (3) значений n_s, n_o, $A_{r,s}$ и $A_{r,o}$ получим $M_r = 1 \cdot 32 + 2 \cdot 16 = 64$. Подставив это значение относительной молекулярной массы, а также значение k в формулу (1), найдем молярную массу сернистого газа: $\mu = 64 \cdot 10^{-3}$ кг/моль. Тогда $m = 65$ г.

5.8 Найти массу m воздуха, заполняющего аудиторию высотой h = 5 м и площадью пола S = 200 м². Давление воздуха p = 100 кПа, температура помещения t = 17°С. Молярная масса воздуха μ = 0,029 кг/моль.

Решение

Согласно уравнению Менделеева — Клапейрона $pV = \frac{m}{\mu}RT$, откуда $m = \frac{pV\mu}{RT}$. Объем комнаты $V = hS$. Тогда масса воздуха $m = \frac{phS\mu}{RT}$; $T = 290$ К; $m = 1{,}2$ т.

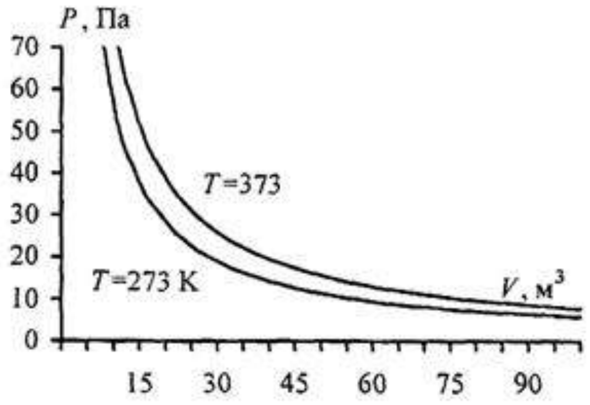
5.9 Во сколько раз плотность воздуха ρ_1 заполняющего помещение зимой (t_1 = 7 °С), больше его плотности ρ_2 летом (t_2 = 37 °С)? Давление газа считать постоянным.

Решение

Согласно уравнению Менделеева — Клапейрона для первого состояния $\frac{pV_1}{T_1} = \frac{m}{\mu}R$ — (1), для второго состояния $\frac{pV_2}{T_2} = \frac{m}{\mu}R$ — (2). Разделив (1) на (2), при $p = const$ имеем $\frac{T_1}{T_2} = \frac{V_1}{V_2} = \frac{m/\rho_1}{m/\rho_2} = \frac{\rho_2}{\rho_1}$, откуда $\frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{T_2}{T_1}$, где $T_1 = 280$ К; $T_2 = 310$ К. Тогда $\rho_1 / \rho_2 = 1{,}1$.

5.10 Начертить изотермы массы m = 0,5 г водорода для температур: а) t_1 = 0 °С; б) t_2 = 100 °С.

Решение

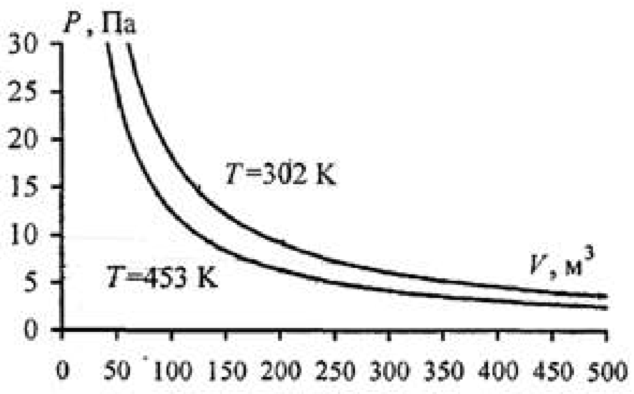


а) Из уравнения Менделеева — Клапейрона найдем $pV = \frac{m}{\mu}RT_1$; $pV = 567$ Дж. Зависимость давления p от объема V выражается соотношением $p = 567/V$.

б) Из уравнения Менделеева — Клапейрона найдем $pV = \frac{m}{\mu}RT_2$; $pV = 775$ Дж. Зависимость давления p от объема V выражается соотношением $p = \frac{775}{V}$.

5.11 Начертить изотермы массы m = 15,5 г кислорода для температур: *а*) t_1 = 39 °С; б) t_2 = 180 °С.

Решение



а) Из уравнения Менделеева — Клапейрона найдем $pV = (m/\mu)RT_1$; $pV = 1255$ Дж. Зависимость давления p от объема V выражается соотношением $p = 1255/V$.

б) Из уравнения Менделеева — Клапейрона найдем $pV = (m/\mu)RT_2$; $pV = 1823$ Дж. Зависимость давления p от объема V выражается соотношением $p = 1823/V$.

5.12 Какое количество ν газа находится в баллоне объемом V = 10 м^3 при давлении p = 96 кПа и температуре t = 17 °С?

Решение

Число молей газа определяется следующим соотношением $\nu = \frac{m}{\mu}$. Тогда уравнение Менделеева — Клапейрона можно записать в виде $pV = \frac{m}{\mu}RT = \nu RT$, откуда $\nu = \frac{pV}{RT}$. Здесь $T = 290$ К. $\nu = 0{,}4$ кмоль.

5.13 Массу m = 5 г азота, находящегося, в закрытом сосуде объемом V = 4 л при температуре t_1 = 20 °С, нагревают до температуры t_2 = 40 °С. Найти давление p_1 и p_2 газа до и после нагревания.

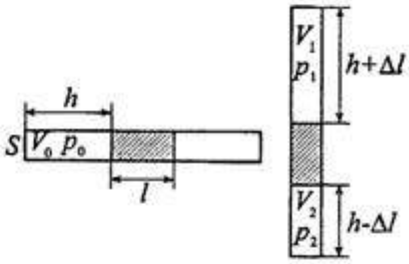
Решение

Согласно уравнению Менделеева — Клапейрона $pV = \frac{m}{\mu}RT$. По условию $m = const$, тогда для первого состояния $p_1V_1 = \frac{m}{\mu}RT_1$, для второго состояния $p_2V_2 = \frac{m}{\mu}RT_2$, откуда $p_1 = \frac{mRT_1}{\mu V}$; $p_2 = \frac{mRT_2}{\mu V}$. Подставляя числовые данные, получим $p_1 = 108$ кПа; $p_2 = 116$ кПа.

5.14 Посередине откачанного и запаянного с обеих концов капилляра, расположенного горизонтально, находится столбик ртути длиной l = 20 см. Если капилляр поставить вертикально, то столбик ртути переместится на Δl = 10 см. До какого давления p_0 был откачан капилляр? Длина капилляра L = 1 м.

Решение

Объем воздуха с каждой стороны от столбика ртути при горизонтальном положении капилляра: $V_0 = Sh$, где S — площадь поперечного сечения капилляра, $h = \frac{L-l}{2} = 0{,}4$ м. Давление в этом положении равно p_0. При вертикальном положении капилляра объем воздуха в его



верхней части $V_1 = S(h+\Delta l)$, давление равно p_1. Т. к. $T = const$, то по закону Бойля — Мариотта $V_0 p_0 = V_1 p_1$ или $hp_0 = p_1(h+\Delta l)$ — (1). Давление p_2 в нижней части капилляра складывается из давления воздуха p_1 и давления столбика ртути p. Тогда для нижней части капилляра $hp_0 = (p_1 + p)(h - \Delta l)$ — (2). Решая совместно уравнения (1) и (2), найдем $p_0 = \frac{p(h-\Delta l)(h+\Delta l)}{2h\Delta l}$. В условиях данной задачи $p = 200$ мм рт. ст. $= 26{,}6$ кПа. Отсюда $p_0 = 50$ кПа.

5.15 Общеизвестен шуточный вопрос: «Что тяжелее: тонна свинца или тонна пробки?» На сколько истинный вес пробки, которая в воздухе весит 9,8 кН, больше истинного веса свинца, который в воздухе весит также 9,8 кН? Температура воздуха t = 17 °С, давление p = 100 кПа.

Решение

На тела, находящиеся в воздухе, действует выталкивающая сила Архимеда $F_A = \rho g V$, где ρ — плотность воздуха, V — объем тела. Т.е. тело теряет в весе столько, сколько весит воздух в объеме данного тела. Объем свинца $V_1 = m/\rho_1$. Воздух в данном объеме весит $m_1 g$. Согласно уравнению Менделеева — Клапейрона $pV_1 = \frac{m_1}{\mu}RT$, откуда $m_1 = \frac{\mu p V_1}{RT}$. Тогда $m_1 g = \frac{\mu p g V_1}{RT} = \frac{\mu p m g}{\rho_1 RT}$. Объем пробки $V_2 = \frac{m}{\rho_2}$. Вес воздуха в данном объеме $m_2 g = \frac{\mu p m g}{\rho_2 RT}$. Истинный вес свинца $P_1 = g(m + m_1)$, истинный вес пробки $P_2 = g(m + m_2)$. Тогда $\Delta P = g(m_2 - m_1) = \frac{\mu p m g}{RT}\left(\frac{1}{\rho_2} - \frac{1}{\rho_1}\right)$; $\Delta P = 58{,}6$ Н.

5.16 Каков должен быть вес p оболочки детского воздушного шарика, наполненного водородом, чтобы результирующая подъемная сила шарика $F = 0$, т.е. чтобы шарик находился во взвешенном состоянии? Воздух и водород находится при нормальных условиях. Давление внутри шарика равно внешнему давлению. Радиус шарика $r = 12{,}5$ см.

Решение

Результирующая подъемная сила $F = m_1 g - (m_2 g + P)$, где m_1 — масса воздуха в объеме шарика, m_2 — масса водорода в объеме шарика. Так как $F = 0$, то $P = g(m_1 - m_2)$. Из уравнения Менделеева — Клапейрона найдем $m = \frac{\mu p V}{RT}$.

Тогда $P = g\frac{pV}{RT}(\mu_1 - \mu_2) = \frac{4\pi r^3 pg}{3RT}(\mu_1 - \mu_2)$; $P = 96$ мН.

5.17 При температуре $t = 50$ °С давление насыщенного водяного пара $p = 12{,}3$ кПа. Найти плотность ρ водяного пара.

Решение

Плотность вещества определяется соотношением $\rho = \frac{m}{V}$. Согласно уравнению Менделеева — Клапейрона $pV = \frac{m}{\mu}RT$, откуда $m = \frac{pV\mu}{RT}$. Тогда плотность водяного пара $\rho = \frac{p\mu}{RT}$; $\rho = 0{,}083$ кг/м^3.

5.18 Найти плотность ρ водорода при температуре $t = 10$ °С и давлении $p = 97{,}3$ кПа.

Решение

$T = 288$ К. Плотность вещества определяется соотношением $\rho = \frac{m}{V}$. Согласно уравнению Менделеева — Клапейрона $pV = \frac{m}{\mu}RT$, откуда $m = \frac{pV\mu}{RT}$. Тогда плотность водорода $\rho = \frac{p\mu}{RT}$; $\rho = 0{,}081$ кг/м^3.

5.19 Некоторый газ при температуре $t = 10$ °С и давлении $p = 200$ кПа имеет плотность $\rho = 0{,}34$ кг/м^3. Найти молярную массу μ газа.

Решение

$T = 283$ К. Согласно уравнению Менделеева — Клапейрона $pV = \frac{m}{\mu}RT$, откуда $\mu = \frac{mRT}{pV}$. Но $\frac{m}{V} = \rho$, отсюда $\mu = \frac{\rho RT}{p}$; $\mu = 0{,}004$ кг/моль.

5.20 Сосуд откачан до давления p = 1,33·10^{-9} Па; температура воздуха t = 15 °С. Найти плотность ρ воздуха в сосуде.

Решение

$T = 288$ К. Плотность вещества определяется соотношением $\rho = \frac{m}{V}$. Согласно уравнению Менделеева — Клапейрона $pV = \frac{m}{\mu}RT$, откуда $m = \frac{pV\mu}{RT}$. Тогда плотность воздуха $\rho = \frac{p\mu}{RT}$; $\rho = 1{,}6 \cdot 10^{-14}$ кг/м^3.

5.21 Масса m = 12 г газа занимает объем V = 4 л при температуре t_1 = 7 °С. После нагревания газа при постоянном давлении его плотность стала равной ρ = 0,6 кг/м^3. До какой температуры t_2 нагрели газ?

Решение

Запишем уравнение состояния газа до и после нагревания $pV_1 = \frac{m}{\mu}RT_1$ — (1); $pV_2 = \frac{m}{\mu}RT_2$ — (2). Поскольку $V_2 = \frac{m}{\rho_2}$, то (2) можно переписать: $\frac{p}{\rho_2} = \frac{RT_2}{\mu}$, откуда $T_2 = \frac{p\mu}{\rho_2 R}$ — (3). Давление p найдем из (1): $p = \frac{mRT_1}{\mu V_1}$. Подставив данное выражение в (3), получим $T_2 = \frac{mT_1}{V_1\rho_2}$; $T_2 = 1400$ К.

5.22 Масса m = 10 г кислорода находится при давлении p = 304 кПа и температуре t_1 = 10 °С. После расширения вследствие нагревания при постоянном давлении кислород занял объем V_2 = 10 л. Найти объем V_1 газа до расширения, температуру t_2 газа после расширения, плотности ρ_1 и ρ_2 газа до и после расширения.

Решение

Согласно уравнению Менделеева — Клапейрона уравнение состояния газа до нагревания $p_1V_1 = \frac{m}{\mu}RT_1$; после нагревания $p_2V_2 = \frac{m}{\mu}RT_2$. По условию $p_1 = p_2 = p$, отсюда $V_1 = \frac{mRT_1}{\mu p}$, $V_1 = 2{,}4 \cdot 10^{-3}$ м^3; $\rho_1 = \frac{\mu p}{RT_1}$, $\rho_1 = 4{,}14$ кг/м^3; $T_2 = \frac{\mu p V_2}{mR}$, $T_2 = 1170$ К; $\rho_2 = \frac{\mu p}{RT_2}$, $\rho_1 = 1$ кг/м^3.

5.23 В запаянном сосуде находится вода, занимающая объем, равный половине объема сосуда. Найти давление p и плотность ρ водяного пара при температуре t = 400 °С, зная, что при этой температуре вся вода обращается в пар.

Решение

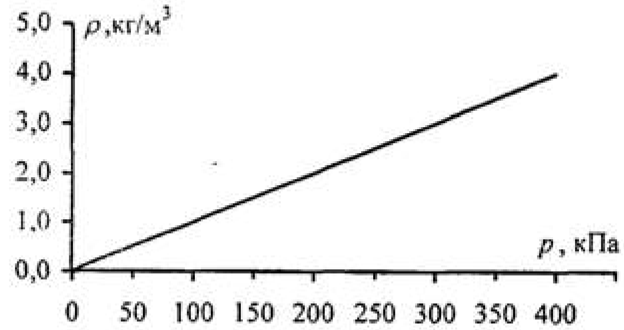
В начальном состоянии плотность воды $\rho_1 = m / V_1$. После нагревания $\rho_2 = \frac{m}{V_2}$. По условию $V_2 = 2V_1$, тогда $\rho_2 = \frac{1}{2}\rho_1$; $\rho_2 = 500$ кг/м^3. Запишем уравнение состояния водяного пара при $T = 673$ К: $p_2V_2 = \frac{m}{\mu}RT$ или $2p_2V_1 = \frac{m}{\mu}RT$. Поскольку $V_1 = \frac{m}{\rho_1}$, то $p_2 = \frac{\rho_1 RT}{2\mu}$; $p_2 = 155$ МПа.

5.24 Построить график зависимости плотности ρ кислорода: а) от давления p при температуре $T = const$ = 390 К в интервале $0 \le p \le 400$ кПа через каждые 50 кПа; б) от температуры T при $p = const$ = 400 кПа в интервале $200 \le T \le 300$ К через каждые 20 К.

Решение

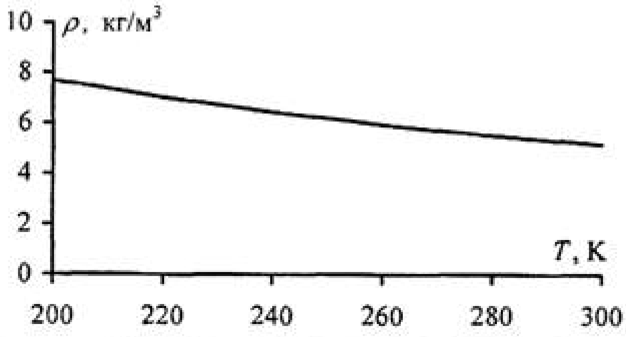
Воспользуемся формулой, полученной в задаче 5.17: $\rho = \frac{p\mu}{RT}$. Молярная масса кислорода $\mu = 0{,}032$ кг/моль.

а) При $T = const = 390$ К: $\rho \approx 10^{-5} \cdot p$;



p, кПа	0	50	100	150	200	250	300	350	400
ρ, кг/м^3	0	0.5	1	1.5	2	2.5	3	3.5	4

б) При $p = const = 400$ кПа: $\rho = 1540 / T$.



T, К	200	220	240	260	280	300
ρ, кг/м^3	7,70	7.00	6,42	5,92	5,50	5,13

5.25 В закрытом сосуде объемом $V = 1$ м^3 находится масса $m_1 = 1{,}6$ кг кислорода и масса $m_2 = 0{,}9$ кг воды. Найти давление p в сосуде при температуре $t = 500$ °С, зная, что при этой температуре вся вода превращается в пар.

Решение

По закону Дальтона $p = p_1 + p_2$, где, согласно уравнению Менделеева — Клапейрона, $p_1 = \dfrac{m_1 RT}{\mu_1 V}$ — парциальное давление кислорода $\mu_1 = 0{,}032$ кг/моль, $p_2 = \dfrac{m_2 RT}{\mu_2 V}$ — парциальное давление водяного пара $\mu_2 = 0{,}018$ кг/моль. Отсюда $p = \dfrac{RT}{V}\left(\dfrac{m_1}{\mu_1} + \dfrac{m_2}{\mu_2}\right)$; $p = 640$ кПа.

5.26 В сосуде 1 объем $V_1 = 3$ л находится газ под давлением $p_1 = 0{,}2$ МПа. В сосуде 2 объем $V_2 = 4$ л находится тот же газ под давлением $p_2 = 0{,}1$ МПа. Температуры газа в обоих сосудах одинаковы. Под каким давлением p будет находиться газ, если соединить сосуды 1 и 2 трубкой?

Решение

По закону Дальтона $p = p_1' + p_2'$, где p_1' и p_2' — парциальные давления газа после соединения сосудов. По закону Бойля — Мариотта $p_1'(V_1 + V_2) = p_1 V_1$; $p_2'(V_1 + V_2) = p_2 V_2$ отсюда $p_1' = \dfrac{p_1 V_1}{V_1 + V_2}$; $p_2' = \dfrac{p_2 V_2}{V_1 + V_2}$; $p = \dfrac{p_1 V_1 + p_2 V_2}{V_1 + V_2}$. Подставляя числовые данные, получим: $p = 140$ кПа.

5.27 В сосуде объемом $V = 2$ л находится масса $m_1 = 6$ г углекислого газа (CO_2) и масса m_2 закиси азота (N_2O) при температуре $t = 127$ °С. Найти давление p смеси в сосуде.

Решение

По закону Дальтона $P = P_1 + P_2$, где, согласно уравнению Менделеева — Клапейрона, $P_1 = \dfrac{m_1 RT}{\mu_1 V}$ — парциальное давление углекислого газа ($\mu_1 = 0{,}044$ кг/моль), $P_2 = \dfrac{m_2 RT}{\mu_2 V}$ — парциальное давление закиси азота ($\mu_2 = 0{,}044$ кг/моль). Отсюда $P = \dfrac{RT}{V}\left(\dfrac{m_1}{\mu_1} + \dfrac{m_2}{\mu_2}\right)$; $P = 415$ кПа.

5.28 В сосуде находится масса m_1 = 14 г азота и масса m_2 = 9 г водорода при температуре t = 10°С и давлении p = 1 МПа. Найти молярную массу μ смеси и объем V сосуда.

Решение

Моля ная масса смеси ι есть отношение массы смеси m к количеству вещества смеси ν, т.е. $\mu = \dfrac{m}{\nu}$ — (1). Масса смеси равна сумме масс компонентов смеси $m = m_1 + m_2$. Количество вещества смеси равно сумме количеств вещества компонентов. Подставив в формулу (1) выражения m и ν, получим $\mu = \dfrac{m_1 + m_2}{m_1/\mu_1 + m_2/\mu_2}$ — (2). Далее, применив способ использованный в задаче 5.7, найдем молярные массы μ_1 азота и μ_2 водорода: $\mu_1 = 28 \cdot 10^{-3}$ кг/моль, $\mu_2 = 2 \cdot 10^{-3}$ кг/моль. Подставим значение величин в (2) и произведем вычисления: $\mu = \dfrac{14 \cdot 10^{-3} + 9 \cdot 10^{-3}}{\dfrac{14 \cdot 10^{-3}}{28 \cdot 10^{-3}} + \dfrac{9 \cdot 10^{-3}}{2 \cdot 10^{-3}}} = 4{,}6 \cdot 10^{-3}$ кг/моль. Запишем уравнение состояния смеси газов: $pV = \dfrac{m_1 + m_2}{\mu} RT$. Отсюда найдем $V = \dfrac{m_1 + m_2}{\mu p} RT$; $V = 11{,}7$ л.

5.29 Закрытый сосуд объемом V = 2 л наполнен воздухом при нормальных условиях. В сосуд вводится диэтиловый эфир ($C_2H_5OC_2H_5$). После того как весь эфир испарился, давление в сосуде стало равным p = 0,14 МПа. Какая масса m эфира была введена в сосуд?

Решение

Согласно уравнению Менделеева — Клапейрона, в начальный момент, когда сосуд был заполнен воздухом, $p_1 V = \dfrac{m_в}{\mu_в} RT$. Когда в сосуд ввели диэтиловый эфир, $pV = \left(\dfrac{m_в}{\mu_в} + \dfrac{m}{\mu} \right) RT = \dfrac{m_в}{\mu_в} RT + \dfrac{m}{\mu} RT = p_1 V + \dfrac{m}{\mu} RT$, откуда $\dfrac{m}{\mu} RT = pV - p_1 V = (p - p_1)V$; $m = \dfrac{(p - p_1) \cdot V\mu}{RT}$. Молярная масса диэтилового эфира $(C_2H_5OC_2H_5)$ — $\mu = 74 \times$ $\times 10^{-3}$ кг/моль (см. задачу 5.7), соответственно $m = 2{,}5$ г.

5.30 В сосуде объемом V = 0,5 л находится масса m = 1 г парообразного йода (I_2). При температуре t = 1000 °C давление в сосуде p_c = 93,3 кПа. Найти степень диссоциации α молекул йода на атомы. Молярная масса молекул йода μ = 0,254 кг/моль.

Решение

Степенью диссоциации α называют отношение числа молекул, распавшихся на атомы, к общему числу молекул газа, т.е. степень диссоциации показывает, какая часть молекул распалась на атомы. В результате диссоциации мы имеем $\nu_1 = \frac{2\alpha m}{\mu}$ атомарного йода и $\nu_2 = \frac{(1-\alpha)\cdot m}{\mu}$ молекулярного йода. Их парциальные давления: $p_1 = \frac{2\alpha mRT}{\mu V}$ — (1); $p_2 = \frac{(1-\alpha)\cdot mRT}{\mu V}$ — (2). По закону Дальтона $p_c = p_1 + p_2$. Подставляя (1) и (2), получим $p_c = \frac{mRT}{\mu V}(1+\alpha)$, откуда $\alpha = \frac{\mu p_c V}{mRT} - 1$; $\alpha = 0{,}12$.

5.31 В сосуде находится углекислый газ. При некоторой температуре степень диссоциации молекул углекислого газа на кислород и окись углерода α = 0,25 . Во сколько раз давление в сосуде при этих условиях будет больше того давления, которое имело бы место, если бы молекулы углекислого газа не были диссоциированы?

Решение

Решение аналогично задаче 5.30: $\frac{p_c}{p} = 1+\alpha$; $\alpha = 0{,}25$; $\frac{p_c}{p} = 1{,}25$.

5.32 В воздухе содержится 23,6% кислорода и 76,4% азота (по массе) при давлении p = 100 кПа и температуре t = 13°C. Найти плотность ρ воздуха и парциальные давления p_1 и p_2 кислорода и азота.

Решение

Рассмотрим некоторую массу m воздуха, занимающую объем V. Данный объем будет содержать массу $0{,}236m$ кислорода и $0{,}764m$ азота. Согласно уравнению Менделеева — Клапейрона $pV = \frac{m}{\mu}RT$, где μ — молярная масса воздуха. Разделив на V, получим $p = \frac{\rho}{\mu}RT$, откуда плотность воздуха $\rho = \frac{\mu p}{RT}$; $\rho = 1{,}2$ кг/м^3. Парциальное давление кислорода $p_1 = \frac{0{,}236m}{\mu_1 V}RT = \frac{0{,}236\rho}{\mu_1}RT$; $p_1 = 21$ кПа. Парциальное давление азота $p_2 = \frac{0{,}764m}{\mu_2 V} \times RT = \frac{0{,}764\rho}{\mu_2}RT$; $p_2 = 79$ кПа.

5.33 В сосуде находится масса $m_1 = 10$ г углекислого газа и масса $m_2 = 15$ г азота. Найти плотность ρ смеси при температуре $t = 21$ °С и давлении $p = 150$ кПа.

Решение

По закону Дальтона давление смеси газов $p = p_1 + p_2$ — (1), где p_1 и p_2 парциальные давления углекислого газа и азота. Согласно уравнению Менделеева — Клапейрона $p_1V = \frac{m_1}{\mu_1}RT$ — (2); $p_2V = \frac{m_2}{\mu_2}RT$ — (3). Складывая (2) и (3), с учетом (1), получим: $pV = \left(\frac{m_1}{\mu_1} + \frac{m_2}{\mu_2}\right) \times RT$ — (4). Плотность смеси $\rho = \frac{m_1 + m_2}{V}$. Объем сосуда V выразим из (4): $V = \left(\frac{m_1}{\mu_1} + \frac{m_2}{\mu_2}\right)\frac{RT}{p}$, тогда $\rho = \frac{p}{RT} \times \frac{(m_1 + m_2)}{(m_1/\mu_1 + m_2/\mu_2)}$; $\rho = 1{,}98$ кг/м^3.

5.34 Найти массу m_0 атома: а) водорода; б) гелия.

Решение

Масса молекулы равна отношению молярной массы к числу Авогадро: $m = \frac{\mu}{N_A}$. Поскольку молекула водорода состоит из двух атомов, то масса одного атома $m_0 = \frac{\mu}{2N_A}$.
а) Масса атома водорода $m_0 = 1{,}67 \cdot 10^{-27}$ кг. б) Масса атома гелия $m_0 = 6{,}65 \cdot 10^{-27}$ кг.

5.35 Молекула азота, летящая со скоростью $v = 600$ м/с, упруго ударяется о стенку сосуда по нормали к ней. Найти импульс силы $F\Delta t$, полученный стенкой сосуда за время удара.

Решение

Запишем второй закон Ньютона в виде $F = m\frac{\Delta v}{\Delta t}$, отсюда $F\Delta t = m\Delta v$ — (1). Поскольку удар был упругий и происходил по нормали к стенке, то скорость молекулы после удара равна по модулю скорости до удара и противоположна по направлению. Тогда $\Delta v = v - (-v) = 2v$ — (2). Масса молекулы $m = \frac{\mu}{N_A}$ — (3), где μ — молярная масса азота, N_A — число Авогадро. Подставив (2) и (3) в (1), получим $F\Delta t = \frac{2\mu v}{N_A}$; $F\Delta t = 5{,}6 \cdot 10^{-23}$ Н·с.

5.36 Молекула аргона, летящая со скоростью v = 500 м/с, упруго ударяется о стенку сосуда. Направление скорости молекулы и нормаль к стенке сосуда составляют угол α = 60° . Найти импульс силы $F\Delta t$, полученный стенкой сосуда за время удара.

Решение

По второму закону Ньютона $F\Delta t = m\Delta v$. Считая положительным направление нормали, внешней к стенке, получим: $\Delta v = v_2 \cos\alpha - (-v_1 \cos\alpha) = v_2 \cos\alpha + v_1 \cos\alpha$. Таким образом, $F\Delta t = 2mv\cos\alpha$. Масса молекулы аргона $m = \frac{\mu}{N_A}$. Тогда $F\Delta t = \frac{2\mu v}{N_A}\cos\alpha$; $F\Delta t = 3{,}3\cdot 10^{-23}$ Н·с.

5.37 Молекула азота летит со скоростью v = 430 м/с. Найти импульс mv этой молекулы.

Решение

Импульс молекулы $\bar{p} = m\bar{v}$, где масса молекулы азота $m = \frac{\mu}{N_A}$. Отсюда $p = \frac{\mu v}{N_A}$; $p = mv = 2\cdot 10^{-23}$ кг·м/с.

5.38 Какое число молекул n содержит единица массы водяного пара?

Решение

Число молекул, содержащееся в некоторой массе вещества, можно найти из соотношения: $n = \nu\cdot N_A$, где ν — количество молей в данной массе вещества; $N_A = 6{,}02\cdot 10^{23}$ моль$^{-1}$ — число Авогадро. $\nu = \frac{m}{\mu}$. Тогда, при $m = 1$, для водяного пара $n = \frac{N_A}{\mu}$; $n = 3{,}3\cdot 10^{25}$.

5.39 В сосуде объемом V = 4 л находится масса m = 1 г водорода. Какое число молекул n содержит единица объема сосуда?

Решение

Число молекул водорода N, содержащееся во всем сосуде, можно найти из соотношения: $N = \frac{m}{\mu}N_A$. Тогда число молекул в единице объема $n = N/V$ или $n = \frac{mN_A}{\mu V}$; $n = 7{,}5\cdot 10^{25}$ м$^{-3}$.

5.40 Какое число молекул N находится в комнате объемом $V = 80$ м^3 при температуре $t = 17$ °C и давлении $p = 100$ кПа?

Решение

Число молекул N, находящихся в комнате, можно найти из соотношения: $N = \frac{m}{\mu} N_A$. Согласно уравнению Менделеева — Клапейрона $pV = \frac{m}{\mu} RT$, откуда $\frac{m}{\mu} = \frac{pV}{RT}$. Тогда $N = \frac{pVN_A}{RT}$; $N = 2 \cdot 10^{27}$.

5.41 Какое число молекул n содержит единица объема сосуда при температуре $t = 10$ °C и давлении $p = 1{,}33 \cdot 10^{-9}$ Па?

Решение

Число молекул N, содержащееся во всем сосуде, можно найти из соотношения: $N = \frac{m}{\mu} N_A$. Тогда число молекул в единице объема $n = \frac{N}{V}$ или $n = \frac{mN_A}{\mu V}$. Согласно уравнению Менделеева — Клапейрона, $pV = \frac{m}{\mu} RT$, откуда $\frac{m}{\mu} = \frac{pV}{RT}$. Тогда $n = \frac{pN_A}{RT}$; $n = 3{,}4 \cdot 10^{11}$ м$^{-3}$.

5.42 Для получения хорошего вакуума в стеклянном сосуде необходимо подогревать стенки сосуда при откачке для удаления адсорбированного газа. На сколько может повыситься давление в сферическом сосуде радиусом $r = 10$ см, если адсорбированные молекулы перейдут со стенок в сосуд? Площадь поперечного сечения молекул $s_0 = 10^{-19}$ м^2. Температура газа в сосуде $t = 300$ °C. Слой молекул на стенках считать мономолекулярным.

Решение

Давление p газа в сосуде связано с числом молекул n в единице объема сосуда соотношением $p = nkT$ или $p = \frac{NkT}{V}$ — (1), где N — число молекул в объеме $V = 4\pi r^3/3$ — (2). По условию эти N молекул образуют мономолекулярный слой, следовательно, $N = \frac{S}{s_0}$, где $S = 4\pi r^2$ — (3). Подставляя (2) и (3) в (1), получим $p = \frac{3kT}{s_0 r}$; $p = 2{,}4$ Па.

5.43 Какое число частиц находится в единице массы парообразного йода (I_2), степень диссоциации которого $\alpha = 0{,}5$? Молярная масса молекулярного йода $\mu = 0{,}254$ кг/моль.

Решение

Имеем $\nu_1 = \dfrac{2\alpha m}{\mu}$ атомарного йода и $\nu_2 = \dfrac{(\alpha - 1)m}{\mu}$ молекулярного йода (см. задачу 5.30). В единице массы $\nu_1 = \dfrac{2\alpha}{\mu}$; $\nu_2 = \dfrac{\alpha - 1}{\mu}$. Число частиц в единице массы парообразного йода $n = N_A\left(\dfrac{2\alpha}{\mu} + \dfrac{1-\alpha}{\mu}\right)$; $n = 3{,}56 \cdot 10^{24}$ кг$^{-1}$.

5.44 Какое число частиц N находится в массе $m = 16$ г кислорода, степень диссоциации которого $\alpha = 0{,}5$?

Решение

Количество атомарного кислорода, находящегося в данной массе, $\nu_1 = \dfrac{2\alpha m}{\mu}$, количество молекулярного кислорода $\nu_2 = \dfrac{(1-\alpha)\cdot m}{\mu}$. Общее количество кислорода $\nu = \dfrac{2\alpha m}{\mu} + \dfrac{(1-\alpha)\cdot m}{\mu}$. Число частиц в массе m кислорода $N = N_A \nu$. После несложных преобразований получим $N = N_A \times \dfrac{m\cdot(\alpha+1)}{\mu}$; $N = 4{,}5\cdot 10^{23}$.

5.45 В сосуде находится количество $\nu_1 = 10^{-7}$ молей кислорода и масса $m_2 = 10^{-6}$ г азота. Температура смеси $t = 100$ °С, давление в сосуде $p = 133$ мПа. Найти объем V сосуда, парциальные давления p_1 и p_2 кислорода и азота и число молекул n в единице объема сосуда.

Решение

По закону Дальтона $p = p_1 + p_2$ — (1). Согласно уравнению Менделеева — Клапейрона, $p_1 V = \dfrac{m_1}{\mu_1} RT$ — (2) и $p_2 V = \dfrac{m_2}{\mu_2} RT$ — (3), где μ_1 — молярная масса кислорода, μ_2 — молярная масса азота. Решая (1) — (3), получим $pV = RT\left(\dfrac{m_1}{\mu_1} + \dfrac{m_2}{\mu_2}\right)$ или $pV = RT\left(\nu_1 + \dfrac{m_2}{\mu_2}\right)$, откуда $V = \dfrac{RT}{p}\left(\nu_1 + \dfrac{m_2}{\mu_2}\right)$; $V = 3{,}2$ л. Парциальное давление кислорода p_1 найдем из уравнения Менделеева — Клапейрона $p_1 V = \nu_1 RT$, откуда $p_1 = \nu_1 RT / V$; $p_1 = 98$ МПа. Парциальное давление азота $p_2 = \dfrac{m_2 RT}{\mu_2 V}$; $p_2 = 35$ МПа. Для нахождения числа молекул n в единице объема сосуда воспользуемся формулой, выведенной в задаче 5.41: $n = pN_A / RT$; $n = 2{,}6 \cdot 10^{19}$ м$^{-3}$.

5.46 Найти среднюю квадратичную скорость $v_{ср.кв}$ молекул воздуха при температуре t = 17 °C. Молярная масса воздуха μ = 0,029 кг/моль.

Решение

Средняя квадратичная скорость молекул $\sqrt{\overline{v^2}} = \sqrt{\frac{3RT}{\mu}}$.

Для молекул воздуха $\sqrt{\overline{v^2}} = \sqrt{\frac{3 \cdot 8{,}31 \cdot 290}{0{,}029}} = 500$ м/с.

5.47 Найти отношение средних квадратичных скоростей молекул гелия и азота при одинаковых температурах.

Решение

Средняя квадратичная скорость молекул гелия $\sqrt{\overline{v_1^2}} = \sqrt{\frac{3RT}{\mu_1}}$, молекул азота — $\sqrt{\overline{v_2^2}} = \sqrt{\frac{3RT}{\mu_2}}$. Отсюда отношение $\frac{\sqrt{\overline{v_1^2}}}{\sqrt{\overline{v_2^2}}} = \sqrt{\frac{\mu_2}{\mu_1}}$. Молярная масса гелия $\mu_1 = 0{,}004$ кг/моль. Молярная масса азота $\mu_2 = 0{,}028$ кг/моль. Тогда $\sqrt{\overline{v_1^2}} / \sqrt{\overline{v_2^2}} = 2{,}65$.

5.48 В момент взрыва атомной бомбы развивается температура $T \approx 10^7$ К. Считая, что при такой температуре все молекулы полностью диссоциированы на атомы, а атомы ионизированы, найти среднюю квадратичную скорость $v_{ср.кв}$ иона водорода.

Решение

Средняя квадратичная скорость иона водорода $\sqrt{\overline{v^2}} = \sqrt{\frac{3RT}{\mu}}$, где молярная масса иона водорода $\mu = 0{,}001$ кг/моль. Отсюда $\sqrt{\overline{v^2}} = 5 \cdot 10^5$ м/с.

5.49 Найти число молекул n водорода в единице объема сосуда при давлении p = 266,6 Па, если средняя квадратичная скорость его молекул $v_{ср.кв}$ = 2,4 км/с.

Решение

В задаче 5.41 была получена формула, выражающая число молекул газа в единице объема $n = \frac{pN_A}{RT}$. Средняя квадратичная скорость молекул водорода $\sqrt{\overline{v^2}} = \sqrt{\frac{3RT}{\mu}}$, отсюда $RT = \left(\sqrt{\overline{v^2}}\right)^2 \cdot \mu / 3$. Тогда $n = \frac{3pN_A}{\mu\left(\sqrt{\overline{v^2}}\right)^2}$; $n = 4{,}2 \cdot 10^{24}$ м$^{-3}$.

5.50 Плотность некоторого газа $\rho = 0{,}06$ кг, средняя квадратичная скорость его молекул $v_{ср.кв} = 500$ м/с. Найти давление p, которое газ оказывает на стенки сосуда.

Решение

Давление газа определяется основным уравнением молекулярно-кинетической теории (МКТ): $p = \frac{2}{3} n \frac{m_0 \overline{v^2}}{2}$ — (1), где n — число молекул в единице объема, m_0 — масса молекулы. Кроме того, n и m_0 связаны соотношением: $n = \frac{\rho}{m_0}$. Тогда уравнение (1) можно записать следующим образом: $p = \frac{\rho \overline{v^2}}{3}$; $p = 5$ кПа.

5.51 Во сколько раз средняя квадратичная скорость пылинки, взвешенной в воздухе, меньше средней квадратичной скорости молекул воздуха? Масса пылинки $m = 10^{-3}$ г. Воздух считать однородным газом, молярная масса которого $\mu = 0{,}029$ кг/моль.

Решение

Среднюю квадратичную скорость можно выразить с помощью следующих соотношений: $\sqrt{\overline{v}^2} = \sqrt{\frac{3RT}{\mu}} = \sqrt{\frac{3kT}{m}}$.
Для пылинки $\sqrt{\overline{v}_1^2} = \sqrt{\frac{3kT}{m}}$. Для воздуха $\sqrt{\overline{v}_2^2} = \sqrt{\frac{3RT}{\mu}}$;
$\frac{\sqrt{\overline{v}_2^2}}{\sqrt{\overline{v}_1^2}} = \sqrt{\frac{Rm}{\mu k}}$; $\frac{\sqrt{\overline{v}_2^2}}{\sqrt{\overline{v}_1^2}} = 1{,}44 \cdot 10^7$.

5.52 Найти импульс mv молекулы водорода при температуре $t = 20$ °С. Скорость молекулы считать равной средней квадратичной скорости.

Решение

Масса молекулы водорода $m = \frac{\mu}{N_A}$. Ее средняя квадратичная скорость $\sqrt{\overline{v^2}} = \sqrt{\frac{3RT}{\mu}}$. Тогда
$mv = \frac{\mu}{N_A}\sqrt{\frac{3RT}{\mu}} = \frac{\sqrt{3RT\mu}}{N_A}$; $mv = 6{,}3 \cdot 10^{-24}$ кг·м/с.

5.53 В сосуде объемом V = 2 л находится масса m = 10 г кислорода при давлении p = 90,6 кПа. Найти среднюю квадратичную скорость молекул газа, число молекул N, находящихся в сосуде, и плотность ρ газа.

Решение

Средняя квадратичная скорость

$$\bar{v}_{кв} = \sqrt{\frac{3RT}{\mu}}.$$

Выразим из уравнения Менделеева-Клапейрона

$$pV = \frac{m}{\mu}RT \quad \Rightarrow \quad \frac{RT}{\mu} = \frac{pV}{m}$$

Тогда

$$\bar{v}_{кв} = \sqrt{\frac{3RT}{\mu}} = \sqrt{\frac{3pV}{m}} = \sqrt{\frac{3\cdot 90,6\cdot 10^3\cdot 2\cdot 10^{-3}}{10\cdot 10^{-3}}} = 233,152\ \frac{м}{с}.$$

Число молекул N, находящихся в сосуде

$$N = \frac{m}{\mu}N_A = \frac{10\cdot 10^{-3}}{32\cdot 10^{-3}}\cdot 6,02\cdot 10^{23} = 1,881\cdot 10^{23}\ молекул$$

Плотность ρ газа

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{10\cdot 10^{-3}}{2\cdot 10^{-3}} = 5\ \frac{кг}{м^3}$$

5.54

Частицы гуммигута диаметром σ = 1 мкм участвуют в броуновском движении. Плотность гуммигута $\rho = 1\cdot 10^3$ кг/м^3. Найти среднюю квадратичную скорость частиц гуммигута при температуре t = 0 °С.

Решение

Средняя квадратичная скорость

$$\bar{v}_{кв} = \sqrt{\frac{3RT}{\mu}} = \sqrt{\frac{3kT}{m_0}}.$$

Выразим массу частицы гуммигута

$$m = \rho V = \rho\frac{4}{3}\pi r^3 = \rho\frac{4}{3}\pi\frac{\sigma^3}{8} = \frac{\pi\rho\sigma^3}{6}$$

Тогда

$$\bar{v}_{кв} = \sqrt{\frac{3kT}{\frac{\pi\rho\sigma^3}{6}}} = \sqrt{\frac{18kT}{\frac{\pi\rho\sigma^3}{6}}} = \sqrt{\frac{18\cdot 1,38\cdot 10^{-23}\cdot 273}{3,14\cdot 1\cdot 10^3\cdot \left(1\cdot 10^{-6}\right)^3}} = 4,646\cdot 10^{-3}\ \frac{м}{с}.$$

5.55 Средняя квадратичная скорость молекул некоторого газа равна $v_{ср.кв}$ = 450 м/с. Давление газа p = 50 кПа. Найти плотность ρ газа при этих условиях.

Решение

Давление газа определяется основным уравнением МКТ: $p=\frac{2}{3}n\frac{m_0\overline{v^2}}{2}$ — (1), где n — число молекул в единице объема, m_0 — масса молекулы. Кроме того, n и m_0 связаны соотношением: $n=\frac{\rho}{m_0}$. Тогда уравнение (1) можно записать следующим образом: $p=\frac{\rho\overline{v^2}}{3}$, откуда $\rho=\frac{3p}{\overline{v^2}}$; $\rho=0{,}74$ кг/м^3.

5.56 Плотность некоторого газа ρ = 0,082 кг/м^3 при давлении p = 100 кПа и температуре t = 17 °С. Найти среднюю квадратичную скорость молекул газа. Какова молярная масса μ этого газа?

Решение

Средняя квадратичная скорость

$$\bar{v}_{кв}=\sqrt{\frac{3RT}{\mu}}.$$

Выразим молярную массу газа через плотность из уравнения Менделеева-Клапейрона

$$pV=\frac{m}{\mu}RT \Rightarrow \mu\ \frac{mRT}{pV}=\frac{\rho RT}{p}$$

И подставим в выражение для средей квадратичной скорости

$$\bar{v}_{кв}=\sqrt{\frac{3RT}{\mu}}=\sqrt{\frac{3RTp}{\rho RT}}=\sqrt{\frac{3p}{\rho}}=\sqrt{\frac{3\cdot 10^5}{0.082}}=1912{,}7\ \frac{м}{с}.$$

Выразим молярную массу

$$\mu=\frac{3RT}{\bar{v}_{кв}^2}=\frac{3RT\rho}{3p}=\frac{\rho RT}{p}=\frac{0{,}082\cdot 8{,}31\cdot 290}{10^5}=1{,}98\cdot 10^{-3}\ \frac{кг}{моль}.$$

5.57 Средняя квадратичная скорость молекул некоторого газа при нормальных условиях $v_{ср.кв.}$ = 461 м/с. Какое число молекул n содержит единица массы этого газа?

Решение

Средняя квадратичная скорость

$$\bar{v}_{кв} = \sqrt{\frac{3RT}{\mu}}.$$

Выразим молярную массу

$$\mu = \frac{3RT}{\bar{v}_{кв}^2}.$$

Число молекул, содержащихся в единице массы газа

$$n_m = \frac{N}{m} = \frac{\frac{m}{\mu}N_A}{m} = \frac{\bar{v}_{кв}^2}{3RT}N_A = \frac{461^2}{3\cdot 8,31\cdot 273}\cdot 6,023\cdot 10^{23} = 1,88\cdot 10^{25}\ \frac{молекул}{кг}$$

5.58 Найти внутреннюю энергию W массы m = 20 г кислорода при температуре t = 10 °С. Какая часть этой энергии приходится на долю поступательного движения молекул и какая часть на долю вращательного движения?

Решение

Внутренняя энергия газа

$$W = U = \frac{m}{\mu}\cdot\frac{i}{2}\cdot RT = \frac{0,02}{32\cdot 10^{-3}}\cdot\frac{5}{2}\cdot 8,31\cdot 283 = 3674,6\ Дж.$$

На долю поступательного движения молекул приходится

$$\frac{W_п}{W} = \frac{\frac{m}{\mu}\cdot\frac{i_п}{2}\cdot RT}{\frac{m}{\mu}\cdot\frac{i}{2}\cdot RT} = \frac{i_п}{i} = \frac{3}{5} = 0,6.$$

На долю вращательного движения молекул приходится

$$\frac{W_в}{W} = \frac{\frac{m}{\mu}\cdot\frac{i_\varphi}{2}\cdot RT}{\frac{m}{\mu}\cdot\frac{i}{2}\cdot RT} = \frac{i_\varphi}{i} = \frac{2}{5} = 0,4.$$

5.59 Найти внутреннюю энергию W массы m = 1 г воздуха при температуре t = 15 °С. Молярная масса воздуха μ = 0,029 кг/моль.

Решение

Внутренняя энергия газа $W = \frac{i}{2}\frac{m}{\mu}RT$. Воздух можно считать (в процентном соотношении) двухатомным газом, т.е. число степеней свободы $i = 5$. Тогда $W = \frac{5}{2}\frac{m}{\mu}RT$; $W = 210$ Дж.

5.60 Найти энергию $W_{вр}$ вращательного движения молекул, содержащихся в массе m = 1 кг азота при температуре t = 7 °С.

Решение

Внутренняя энергия газа $W = \frac{i}{2}\frac{m}{\mu}RT$. Поскольку молекула азота состоит из двух атомов, то для нее количество степеней свободы вращательного движения $i = 2$. Тогда $W_{вр} = \frac{m}{\mu}RT$; $W_{вр} = 83$ кДж.

5.61 Найти внутреннюю энергию W двухатомного газа, находящегося в сосуде объемом V = 2 л под давлением p = 150 кПа.

Решение

Согласно уравнению состояния идеального газа $pV = \frac{m}{\mu}RT$ — (1). Внутренняя энергия газа $W = \frac{i}{2}\frac{m}{\mu}RT$ или, с учетом (1), $W = \frac{i}{2}pV$. Для двухатомного газа количество степеней свободы $i = 5$, тогда $W = \frac{5}{2}pV$; $W = 750$ Дж.

5.62 Энергия поступательного движения молекул азота, находящегося в баллоне объем V = 20 л, W = 5 кДж, а средняя квадратичная скорость его молекул $v_{ср.кв} = 2 \cdot 10^3$ м/с. Найти массу m азота в баллоне и давление p, под которым он находится.

Решение

Энергия поступательного движения молекул азота $W = \frac{m\overline{v^2}}{2}$, откуда $m = \frac{2W}{\overline{v^2}}$; $m = 2{,}5$ г. Согласно основному уравнению МКТ $p = \frac{2}{3}n\frac{m_0\overline{v^2}}{2}$ — (1), где n — число молекул в единице объема, m_0 — масса одной молекулы. Очевидно, что произведение $nm_0 = \rho$ — плотности азота. Тогда $nm_0V = \rho V = m$ — массе всего азота, находящегося в баллоне. Умножив правую и левую части уравнения (1) на V, получим $pV = \frac{2}{3}nm_0V\frac{\overline{v^2}}{2} = \frac{2}{3}m\frac{\overline{v^2}}{2}$. Но $\frac{m\overline{v^2}}{2} = W$, следовательно, $pV = \frac{2}{3}W$, откуда $p = \frac{2W}{3V}$; $p = 167$ кПа.

5.63 При какой температуре T энергия теплового движения атомов гелия будет достаточна для того, чтобы атомы гелия преодолели земное тяготение и навсегда покинули земную атмосферу? Решить аналогичную задачу для Луны.

Решение

Согласно условию задачи средняя квадратичная скорость атомов гелия должна быть равна второй космической скорости, т.е. $\sqrt{\overline{v^2}} = 11{,}2$ км/с. $\sqrt{\overline{v^2}} = \sqrt{\frac{3RT}{\mu}}$, откуда $T = \frac{\mu \overline{v^2}}{3R}$; $T \approx 2 \cdot 10^4$ К. Для Луны $\sqrt{\overline{v^2}} = 2{,}4$ км/с, тогда $T = 900$ К.

5.64 Масса $m = 1$ кг двухатомного газа находится под давлением $p = 80$ кПа и имеет плотность $\rho = 4$ кг/м3. Найти энергию теплового движения W молекул газа при этих условиях.

Решение

Энергия теплового движения двухатомного газа $W = \frac{i}{2}\nu RT = \frac{5}{2}\frac{m}{\mu}RT$. Согласно уравнению Менделеева — Клапейрона $pV = \frac{m}{\mu}RT$, тогда $W = \frac{5}{2}pV$. Так как $V = \frac{m}{p}$, то окончательно имеем $W = \frac{5}{2}\frac{pm}{\rho}$; $W = 50$ кДж.

5.65 Какое число молекул N двухатомного газа содержит объем $V = 10$ см^3 при давлении $p = 5{,}3$ кПа и температуре $t = 27$ °C? Какой энергией теплового движения W обладают эти молекулы?

Решение

Согласно уравнению Менделеева — Клапейрона $pV = \frac{m}{\mu}RT = \nu RT$. Количество вещества $\nu = \frac{N}{N_А}$, где N — число молекул в данном объеме вещества, $N_А$ — число Авогадро. Тогда $pV = \frac{N}{N_А}RT$. Но $\frac{R}{N_А} = k$ — постоянной Больцмана. Отсюда окончательно имеем $pV = NkT$, откуда $N = \frac{pV}{kT}$; $N = 1{,}3 \cdot 10^{19}$. Энергия теплового движения двухатомного газа $W = \frac{5}{2}\frac{m}{\mu}RT$, где $\frac{m}{\mu} = \nu = \frac{N}{N_А}$, тогда $W = \frac{5}{2}\frac{N}{N_А}RT$; $W = 0{,}133$ Дж.

5.66 Найти удельную теплоемкость с кислорода для: а) $V = const$; б) $p = const$.

Решение

Молярная теплоемкость C и удельная теплоемкость c связаны соотношением $C = \mu c$. Отсюда $c = \frac{C}{\mu}$. а) При $V = const$ $c_V = \frac{C_V}{\mu}$, где $C_V = \frac{i}{2}R$. Для кислорода $i = 5$, следовательно, $C_V = \frac{5}{2}R$. Тогда удельная теплоемкость кислорода при постоянном объеме $c_V = \frac{5R}{2\mu}$; $c_V = 650$ Дж/(кг·К). б) При $P = const$ $C_p = C_V + R = \frac{7}{2}R$. Отсюда $c_p = \frac{7R}{2\mu}$; $c_p = 910$ Дж/(кг·К).

5.67 Найти удельную теплоемкость c_p: а) хлористого водорода; б) неона; в) окиси азота; г) окиси углерода; д) паров ртути.

Решение

Удельная теплоемкость $c_p = \frac{C_p}{\mu}$, где молярная теплоемкость $C_p = C_V + R$. Поскольку $C_V = \frac{\nu}{2}R$, то $C_p = \frac{R(i+2)}{2}$.
Для одноатомных газов $C_p = 20{,}8$ Дж/(моль·К), для двухатомных газов $C_p = 29{,}1$ Дж/(моль·К), для многоатомных $C_p = 33{,}2$ Дж/(моль·К).

а) $\mu_{HCl} = 0{,}0365$ кг/моль, $c_p \approx 800$ Дж/(кг·К);
б) $\mu_{Ne} = 0{,}02$ кг/моль, $c_p = 1040$ Дж/(кг·К);
в) $\mu_{NO} = 0{,}03$ кг/моль, $c_p = 970$ Дж/(кг·К);
г) $\mu_{CO} = 0{,}028$ кг/моль, $c_p = 1040$ Дж/(кг·К);
д) $\mu_{Hg} = 0{,}201$ кг/моль, $c_p = 103$ Дж/(кг·К).

5.68 Найти отношение удельных теплоемкостей c_p/c_v для кислорода.

Решение

Для кислорода $c_p = 910$ Дж/(кг·К), $c_V = 650$ Дж/(кг·К) (см. задачу 5.66); $\frac{c_p}{c_V} = 1{,}4$.

5.69 Удельная теплоемкость некоторого двухатомного газа c_p = 14,7 кДж/(кг·К). Найти молярную массу μ этого газа.

Решение

Молярная теплоемкость C_p и удельная теплоемкость c_p газов связаны соотношением $C_p = c_p\mu$, откуда $\mu = \frac{C_p}{c_p}$ — (1). $C_p = C_V + R$ — (2), где молярная теплоемкость при постоянном объеме $C_V = \frac{i}{2}R$. Для двухатомного газа $i = 5$, тогда из (2) $C_p = \frac{7}{2}R$ — (3). Подставив (3) в (1), получим $\mu \frac{7R}{2c_p}$; $\mu = 0{,}002$ кг/моль.

5.70 Плотность некоторого двухатомного газа при нормальных условиях ρ = 1,43 кг/м^3. Найти удельные теплоемкости c_v и c_p этого газа.

Решение

Молярная теплоемкость C и удельная теплоемкость c связаны соотношением $C = \mu c$. Отсюда $c = C/\mu$. При $V = const$ $c_V = \frac{C_V}{\mu}$, где $C_V = \frac{i}{2}R$. Для двухатомного газа $i = 5$, следовательно, $C_V = \frac{5}{2}R$. Тогда удельная теплоемкость двухатомного газа при постоянном объеме $c_V = \frac{5R}{2\mu}$ — (1). При $P = const$ $C_p = \frac{7}{2}R$. Отсюда $c_p = \frac{7R}{2\mu}$ — (2). Согласно уравнению Менделеева — Клапейрона $pV = \frac{m}{\mu}RT$ или $p = \frac{m}{V\mu}RT$. Но $\frac{m}{V} = \rho$, тогда $p = \frac{\rho}{\mu}RT$, откуда $\mu = \frac{\rho RT}{p}$ — (3). Подставляя (3) в (1) и (2), получим $c_V = \frac{5p}{2\rho T}$; $c_p = \frac{7p}{2\rho T}$. При нормальных условиях $p = 1{,}013 \cdot 10^5$ Па, $T = 273$ К. Тогда $C_V = 650$ Дж/(кг·К), $c_p = 910$ Дж/(кг·К).

5.71 Молярная масса некоторого газа μ = 0,03 кг/моль, отношение c_p /c_v = 1,4. Найти удельные теплоемкости c_v и c_p этого газа.

Решение

Удельные теплоемкости c_V и c_p выражаются следующим образом $c_V = \dfrac{C_V}{\mu}$ — (1); $c_p = \dfrac{C_p}{\mu}$ — (2), где молярная теплоемкость $C_p = C_V + R = \dfrac{i}{2}R + R$ — (3). По условию $\dfrac{c_p}{c_V} = 1{,}4$ или $c_p = 1{,}4c_V$, тогда из (3) $1{,}4C_V = c_V + R$, $C_V = \dfrac{5}{2}R$ — (4), $C_p = \dfrac{7}{2}R$ — (5). Подставив (4) в (1) и (5) в (2), получим $c_V = \dfrac{5R}{2\mu}$; $c_V = 693$ Дж/(кг·К); $c_p = \dfrac{7R}{2\mu}$; $c_p = 970$ Дж/(кг·К).

5.72 Во сколько раз молярная теплоемкость C' гремучего газа больше молярной теплоемкости C'' водяного пара, получившегося при его сгорании? Задачу решить для: а) $V = const$; б) $p = const$.

Решение

Запишем уравнение реакции $2H_2 + O_2 = 2H_2O$. Таким образом из количества $\nu_1 = 3$ моль двухатомного газа получается количество $\nu_2 = 2$ моль трехатомного газа, т.е. до сгорания $C_{V1} = 3\dfrac{5R}{2}$ и $C_{p1} = 3\dfrac{7R}{2}$; после сгорания $C_{V2} = 2\dfrac{6R}{2}$ и $C_{p2} = 2\dfrac{8R}{2}$. Тогда а) $\dfrac{C_{V1}}{C_{V2}} = 1{,}25$; б) $\dfrac{C_{p1}}{C_{p2}} = 1{,}31$.

5.73 Найти степень диссоциации α кислорода, если его удельная теплоемкость при постоянном давлении c_p = 1,05 кДж/(кг·К).

Решение

Пусть m — полная масса кислорода. Тогда αm — масса диссоциированного кислорода, а $(1-\alpha)\cdot m$ — масса недиссоциированного кислорода. Количество тепла, необходимое для нагревания газа на некоторую температуру ΔT: $Q = c_p m\Delta T$ или $Q = \left[c_p^H(1-\alpha)m + c_p^g \alpha m\right]\cdot\Delta T$, где c_p^H и c_p^g — соответственно теплоемкости при постоянном давлении диссоциированного и не диссоциированного газов. Тогда $c_p m\Delta T = \left[c_p^H(1-\alpha)m + c_p^g\alpha m\right]\cdot\Delta T$, отсюда $c_p = c_p^H(1-\alpha) + c_p^g\alpha$. Т.к. $c_p = \frac{i+2}{i}\frac{R}{\mu}$, то $c_p^H = \frac{7}{2}\frac{R}{\mu}$ и $c_p^g = \frac{5}{2}\frac{2R}{\mu}$, поскольку для недиссоциированного газа $i = 5$, а для диссоциированного $i = 3$. Тогда $c_p = \frac{7}{2}\frac{R}{\mu}(1-\alpha) + 5\frac{R}{\mu}\alpha = \frac{R}{2\mu}(7(1-\alpha)+10\alpha) = \frac{R}{2\mu}(7+3\alpha)$; $7+3\alpha = \frac{2\mu c_p}{R}$; $\alpha = \frac{2\mu c_p - 7R}{3R}$; $\alpha = 0{,}362$.

5.74 Найти удельные теплоемкости c_v и c_p парообразного йода (I_2), если степень диссоциации его α = 0,5. Молярная масса молекулярного йода μ = 0,254 кг/моль.

Решение

Теплоемкость при постоянном давлении $c_p = \frac{R}{2\mu}(7+3\alpha)$ (см. задачу 5.73); $c_p = 139$ Дж/(моль·К). Аналогично можно найти теплоемкость при постоянном объеме $Q = c_V m\Delta T$; $Q = \left[c_V^H(1-\alpha)m + c_V^g\alpha m\right]\cdot\Delta T$, отсюда $c_V = c_V^H(1-\alpha) + c_V^g\alpha$. Но $c_V = \frac{i}{2}\frac{R}{\mu}$, следовательно, $c_V^H = \frac{5}{2}\frac{R}{\mu}$; $c_V^g = \frac{3}{2}\frac{2R}{\mu}$, тогда $c_V = \frac{5}{2}\frac{R}{\mu}(1-\alpha) + \frac{6}{2}\frac{R}{\mu}\alpha = \frac{R}{2\mu}\left[5(1-\alpha)+6\alpha\right] = \frac{R}{2\mu}(5+\alpha)$;
$c_V = 89{,}97$ Дж/(моль·К).

5.75 Найти степень диссоциация α азота, если для него отношение $c_p/c_v = 1{,}47$.

Решение

Теплоемкости при постоянном давлении и постоянном объеме для частично диссоциированного газа $c_p = \frac{R}{2\mu} \times (7+3\alpha)$; $c_V = \frac{R}{2\mu}(5+\alpha)$ (см. задачи 5.73 и 5.74). Тогда $\gamma = \frac{c_p}{c_V} = \frac{7+3\alpha}{5+\alpha}$; $\gamma(5+\alpha) = 7+3\alpha$; $5\gamma + \alpha\gamma = 7+3\alpha$; $-\alpha\gamma + 3\alpha = 5\gamma - 7$; $5\gamma + \alpha\gamma = 7+3\alpha$; $-\alpha\gamma + 3\alpha = 5\gamma - 7$; $\alpha(3-\gamma) = 5\gamma - 7$; $\alpha = \frac{5\gamma - 7}{3-\gamma}$; $\alpha = 0{,}228$.

5.76 Найти удельную теплоемкость c_p газовой смеси, состоящей из количества $\nu_1 = 3$ кмоль аргона и количества $\nu_2 = 3$ кмоль азота.

Решение

Количество тепла, необходимое для нагревания смеси газов на некоторую температуру ΔT: $Q = c_p(m_1 + m_2)\cdot\Delta T$ или $Q = (c_{p1}m_1 + c_{p2}m_2)\cdot\Delta T$. Тогда $c_p(m_1+m_2)\cdot\Delta T = (c_{p1}m_1 + c_{p2}m_2)\cdot\Delta T$, отсюда $c_p = \frac{c_{p1}m_1 + c_{p2}m_2}{m_1+m_2}$. Т. к. аргон — газ одноатомный, то число степеней свободы $i = 3$, а азот — двухатомный, поэтому $i = 5$. Т.к. $c_p = \frac{i+2}{2}\frac{R}{\mu}$, то $c_{p1} = \frac{5}{2}\frac{R}{\mu_1}$ и $c_{p2} = \frac{7}{2}\frac{R}{\mu_2}$. Тогда теплоемкость смеси при $p = const$: $c_p = \frac{5Rm_1/2\mu_1 + 7Rm_2/2\mu_2}{m_1+m_2} = \frac{R/2(5\nu_1 + 7\nu_2)}{m_1+m_2}$; $c_p = \frac{R/2(5\nu_1+7\nu_2)}{\nu_1\mu_1 + \nu_2\mu_2} = \frac{R(5\nu_1+7\nu_2)}{2(\nu_1\mu_1+\nu_2\mu_2)}$; $c_p = 685{,}72$ Дж/(кг·К).

5.77 Найти отношение c_p/c_v для газовой смеси, состоящей из массы $m_1 = 8$ г гелия и массы $m_2 = 16$ г кислорода.

Решение

Удельная теплоемкость смеси при постоянном давлении $c_p = \dfrac{5Rm_1/2\mu_1 + 7Rm_2/2\mu_2}{m_1 + m_2}$ (см. задачу 5.76). Аналогично можно найти теплоемкость смеси при постоянном объеме: $Q = c_V(m_1 + m_2)\Delta T$ и $Q = (c_{V1}m_1 + c_{V2}m_2)\Delta T$, откуда $c_V = \dfrac{c_{V1}m_1 + c_{V2}m_2}{m_1 + m_2}$. Но $c_V = \dfrac{i}{2}\dfrac{R}{\mu}$, поэтому $c_{V1} = \dfrac{3}{2}\dfrac{R}{\mu_1}$; $c_{V2} = \dfrac{5}{2}\dfrac{R}{\mu_2}$. Тогда удельная теплоемкость газовой смеси при $V = const$: $c_V = \dfrac{3Rm_1/2\mu_1 + 5Rm_2/2\mu_2}{m_1 + m_2}$. Отсюда

$$\frac{c_p}{c_V} = \frac{3Rm_1/2\mu_1 + 5Rm_2/2\mu_2}{m_1 + m_2}\frac{m_1 + m_2}{3Rm_1/2\mu_1 + 5Rm_2/2\mu_2};$$

$$\frac{c_p}{c_V} = \frac{5m_1/\mu_1 + 7m_2/\mu_2}{3m_1/\mu_1 + 5m_2/\mu_2} = \frac{5m_1\mu_2 + 7m_2\mu_1}{3m_1\mu_2 + 5m_2\mu_1};\ \frac{c_p}{c_V} = 1{,}59.$$

5.78 Удельная теплоемкость газовой смеси, состоящей из количества $\nu_1 = 1$ кмоль кислорода и некоторой массы m_2 аргона равна $c_v = 430$ Дж/(кг·К). Какая масса m_2 аргона находится в газовой смеси?

Решение

Количество тепла, необходимое для нагревания смеси на некоторую температуру ΔT $Q = c_V(m_1 + m_2)\cdot\Delta T$ или $Q = (c_{V1}m_1 + c_{V2}m_2)\cdot\Delta T$. Отсюда $c_V(m_1 + m_2) = c_{V1}m_1 + c_{V2}m_2$. Теплоемкость при постоянном объеме $c_V = \dfrac{iR}{2\mu}$. Для кислорода $i_1 = 5$, а для аргона $i_2 = 3$, поэтому $c_{V1} = \dfrac{5R}{2\mu_1} = 650$ Дж/(кг·К) и $c_{V2} = \dfrac{3R}{2\mu_2} = 312{,}5$ Дж/(кг·К). Тогда $c_V(m_1 + m_2) = c_{V1}m_1 + c_{V2}m_2$; $m_2(c_V - c_{V2}) = m_1(c_{V1} - c_V)$, откуда $m_2 = \dfrac{m_1(c_{V1} - c_V)}{c_V - c_{V2}} = \dfrac{\mu_1\nu_1(c_{V1} - c_V)}{c_V - c_{V2}}$.

Подставляя числовые данные, получим $m_2 = 60$ кг.

5.79 Масса m = 10 г кислорода находится при давлении p = 0,3 МПа и температуре t = 10 °С. После нагревания при $p = const$ газ занял объем V_2 = 10 л. Найти количество теплоты Q, полученное газом, и энергию теплового движения молекул газа W до и после нагревания.

Решение

Энергия теплового движения молекул кислорода до нагревания $W_1 = 5mRT_1/2\mu$ — (1), после нагревания $W_2 = \frac{5}{2}\frac{m}{\mu}RT_2$ — (2). При расширении газа была совершена работа $\Delta A = p\Delta V = p(V_2 - V_1)$ — (3). Количество теплоты, полученное газом в соответствии с первым законом термодинамики, $\Delta Q = \Delta W + \Delta A$ — (4). Изменение внутренней энергии газа $\Delta W = \frac{5}{2}\frac{m}{\mu}R(T_1 - T_2)$ — (5). Неизвестные V_1 и T_2 можно найти из уравнений начального и конечного состояний газа. $pV_1 = \frac{m}{\mu}RT_1$ — (6); $pV_2 = \frac{m}{\mu}RT_2$ — (7). Из (6) $V_1 = \frac{mRT_1}{\mu p}$. Из (7) $T_2 = \frac{pV_2\mu}{mR}$. Из уравнения (1) $W_1 = 1{,}8$ кДж. Подставив (7) в (2), получим $W_2 = \frac{5}{2}pV_2$; $V_2 = 7{,}6$ кДж. Из (4), с учетом (3) и (6), $\Delta Q = (W_2 - W_1) + p\cdot\left(V_2 - \frac{mRT_1}{\mu p}\right)$; $\Delta Q = 7{,}9$ кДж.

5.80 Масса m = 12 г азота находится в закрытом сосуде объемом V = 2 л при температуре t = 10 °С. После нагревания давление в сосуде стало равным p = 1,33 МПа. Какое количество теплоты Q сообщено газу при нагревании?

Решение

При $V = const$ $A = \int pdv = 0$ имеем $dQ = \frac{M}{\mu}C_{V}dT$, отсюда $Q = \int_{T_1}^{T_2}\frac{M}{\mu}C_{V}dt = \frac{m}{\mu}C_{V}(T_2 - T_1)$. Температуру T_2 найдем из уравнения Менделеева — Клапейрона $p_2V = \frac{m}{\mu}RT_2$, откуда $T_2 = \frac{p_2V\mu}{mR}$; $T_2 = 747$ К. Молярная теплоемкость азота $c_{V} = 20{,}8$ Дж/моль·К. Молярная масса азота $\mu = 0{,}028$ кг/моль. Подставив числовые данные, получим $Q = 4{,}15$ кДж.

5.81 В сосуде объемом V = 0,1 МПа находится азот при давлении p = 0,1 МПа. Какое количество теплоты Q надо сообщить азоту, чтобы: а) при $p = const$ объем увеличился вдвое; б) при $V = const$ давление увеличилось вдвое?

Решение

а) При $p = const$ количество теплоты $Q = \Delta W + A = \frac{m}{\mu} C_V \Delta T + \frac{m}{\mu} R\Delta T = \frac{m}{\mu} C_p \Delta T$ — (1). Согласно уравнению Менделеева — Клапейрона $pV_1 = \frac{m}{\mu} RT_1$ и $pV_2 = \frac{m}{\mu} RT_2$, откуда $p\Delta V = \frac{m}{\mu} R\Delta T$, или $\frac{m}{\mu}\Delta T = \frac{p\Delta V}{R}$. Тогда из (1) получим $Q = \frac{C_p p\Delta V}{R} = 700$ Дж. б) При $V = const$ имеем $Q = \Delta W = \frac{m}{\mu} C_V \Delta T$ — (1). Согласно уравнению Менделеева — Клапейрона $p_1V = \frac{m}{\mu} RT_1$ и $p_2V = \frac{m}{\mu} RT_2$, откуда $V\Delta p = \frac{m}{\mu} R\Delta T$, или $\frac{m}{\mu}\Delta T = \frac{V\Delta p}{R}$. Тогда из (1) получим $Q = C_V V\Delta p / R$; $Q = 500$ Дж.

5.82 В закрытом сосуде находится масса m = 14 г азота при давлении p_1 = 0,1 МПа и температуре t = 27 °С. После нагревания давление в сосуде повысилось в 5 раз. До какой температуры t_2 был нагрет газ? Найти объем V сосуда и количество теплоты Q, сообщенное газу.

Решение

Состояние газа до и после нагревания описывается уравнением Менделеева — Клапейрона $p_1V = \frac{m}{\mu} RT_1$ — (1) и $p_2V = \frac{m}{\mu} RT_2$ — (2). Поскольку $V = const$, то $\frac{p_2}{p_1} = \frac{T_2}{T_1} = 5$, откуда $T_2 = 5T_1 = 1500$ К. Решая совместно (1) и (2), получим $V = \frac{mRT_1}{\mu p_1}$; $V = 12{,}4$ л. Количество теплоты, полученное газом, $Q = \frac{m}{\mu} C_V \Delta T$, где молярная теплоемкость азота $C_V = 20{,}8$ Дж/(моль·К). $Q = 12{,}4$ Дж.

5.83 Какое количество теплоты Q надо сообщить массе m = 12 г кислорода, чтобы нагреть его на Δt = 50 °С при $p = const$?

Решение

Количество тепла, необходимое для нагревания при $p = const$: $Q = c_p m \Delta t$, где c_p — удельная теплоемкость. При постоянном давлении $c_p = \frac{i+2}{2}\frac{R}{\mu}$. Т. к. кислород — двухатомный газ, то $i = 5$ и $c_p = \frac{7}{2}\frac{R}{\mu}$. Тогда $Q = \frac{7}{2}\frac{R}{\mu} m \Delta t$; $Q = 545$ Дж.

5.84 На нагревание массы m = 40 г кислорода от температуры t_1 = 16 °С до t_2 = 40 °С затрачено количество теплоты Q = 628 Дж. При каких условиях нагревался газ (при постоянном объеме или при постоянном давлении)?

Решение

В процессе нагревания при постоянном давлении $Q_p = \frac{7}{2}\frac{R}{\mu} m \Delta T$ (см. задачу 5.83) $Q_p = 872$ Дж. Аналогично для нагревания при постоянном объеме $Q_V = c_V m (T_2 - T_1)$, где $c_V = \frac{i}{2}\frac{R}{\mu}$ и $i = 5$. Тогда $Q_V = 626$ Дж. Значит, газ нагревается при постоянном объеме.

5.85 В закрытом сосуде объемом V = 10 л находится воздух при давлении p = 0,1 МПа. Какое количество теплоты Q надо сообщить воздуху, чтобы повысить давление в сосуде в 5 раз?

Решение

Воздуху надо сообщить количество теплоты $Q = \frac{m}{\mu} C_V \Delta T$.

По уравнению Менделеева — Клапейрона $V\Delta p = \frac{m}{\mu} R \Delta T$,

откуда $\Delta T = \frac{\mu V \Delta p}{mR}$. Тогда $Q = C_V \frac{V\Delta p}{R} = \frac{i}{2} V \Delta p$;

$Q = 10$ кДж.

5.86 Какую массу m углекислого газа можно нагреть при $p = const$ от температуры $t_1 = 20$ °C до $t_2 = 100$ °C количеством теплоты $Q = 222$ Дж? На сколько при этом изменится кинетическая энергия одной молекулы?

Решение

Количество тепла $Q = c_p m \Delta T$. Теплоемкость при $p = const$: $c_p = \frac{i+2}{2}\frac{R}{\mu}$. Молярная масса $\mu = \mu_c + 2\mu_o$. Т. к. CO_2 — газ трехатомный, то $i = 6$. Тогда $c_p = 4\frac{R}{\mu} = \frac{4R}{\mu_c + 2\mu_o}$. Откуда $Q = \frac{4R}{\mu_c + 2\mu_o} m(T_2 - T_1)$, значит, $m = \frac{Q(\mu_c + 2\mu_o)}{4R(T_2 - T_1)}$; $m = 3{,}67$ г. Кинетическая энергия поступательного движения молекул $W = \frac{i}{2}kT$, при $i = 6$: $W_1 = 3kT_1$; $W_2 = 3kT_2$. Тогда $\Delta W = W_2 - W_1 = 3k(T_2 - T_1)$; $\Delta W = 3{,}31 \cdot 10^{-21}$ Дж.

5.87 В закрытом сосуде объем $V = 2$ л находится азот, плотность которого $\rho = 1{,}4$ кг/м^3. Какое количество теплоты Q надо сообщить азоту, чтобы нагреть его на $\Delta T = 100$ K?

Решение

Т.к. объем постоянный, то количество тепла $Q = c_V m \Delta T$, где $c_V = \frac{i}{2}\frac{R}{\mu}$, причем т. к. азот — газ двухатомный, то число степеней свободы $i = 5$, значит $c_V = \frac{5}{2}\frac{R}{\mu}$. Масса $m = \rho V$, тогда $Q = \frac{5}{2}\frac{R}{\mu}\rho V \Delta T$; $Q = 207{,}75$ Дж.

5.88 Азот находится в закрытом сосуде объемом $V = 3$ л при температуре $t_1 = 27$ °C и давлении $p_1 = 0{,}3$ МПа. После нагревания давление в сосуде повысилось до $p_2 = 2{,}5$ МПа. Найти температуру t_2 азота после нагревания и количество теплоты Q, сообщенное азоту.

Решение

Запишем уравнение Менделеева — Клапейрона для начального и конечного состояний $p_1 V = \frac{m}{\mu} R T_1$ — (1); $p_2 V = \frac{m}{\mu} R T_2$ — (2). Разделим (1) на (2) $\frac{p_1}{p_2} = \frac{T_1}{T_2}$, отсюда $T_2 = \frac{T_1 p_2}{p_1}$; $T_2 = 2500$ К. Количество теплоты, необходимое для нагревания при постоянном объеме $Q = c_V m \Delta t$, где $c_V = \frac{i}{2}\frac{R}{\mu}$; $i = 5$, т. к. азот двухатомный газ. Следовательно, $c_V = \frac{5}{2}\frac{R}{\mu}$. Из (1) $m = \frac{p_1 V \mu}{R T_1}$ — масса газа, тогда $Q = \frac{5}{2}\frac{R}{\mu}\frac{p_1 V \mu}{R T_1}(T_2 - T_1) = \frac{5}{2}\frac{p_1 V (T_2 - T_1)}{T_1}$; $Q = 16500$ Дж.

5.89 Для нагревания некоторой массы газа на $\Delta t_1 = 50$ °C при $p = const$ необходимо затратить количество теплоты $Q_1 = 670$ Дж. Если эту же массу газа охладить на $\Delta t_2 = 100$ °C при $V = const$, то выделяется количество теплоты $Q_2 = 1005$ Дж. Какое число степеней свободы i имеют молекулы этого газа?

Решение

Количество теплоты, необходимое для нагрева при $p = const$: $Q_1 = c_p m\Delta t_1$, где $c_p = \frac{i+2}{2}\frac{R}{\mu}$. Тогда $Q_1 = \frac{i+2}{2}\frac{R}{\mu}m\Delta t_1$ — (1). Количество тепла, выделенное при изохорном охлаждении $Q_2 = c_V m\Delta t_2$, где $c_V = \frac{i}{2}\frac{R}{\mu}$. Тогда $Q_2 = \frac{i}{2}\frac{R}{\mu}m\Delta t_2$ — (2). Разделим (1) на (2): $\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{i+2}{i}\frac{\Delta t_1}{\Delta t_2}$, отсюда $Q_1 i\Delta t_2 = Q_2(i+2)\Delta t_1$; $Q_1 i\Delta t_2 = Q_2 i\Delta t_1 + 2Q_2\Delta t_1$; $i(Q_1\Delta t_2 - Q_2\Delta t_1) = 2Q_2\Delta t_1$; $i = \frac{2Q_2\Delta t_1}{Q_1\Delta t_2 - Q_2\Delta t_1}$ — число степеней свободы; $i = 6$.

5.90 Масса $m = 10$ г азота находится в закрытом сосуде при температуре $t_1 = 7$ °C. Какое количество теплоты Q надо сообщить азоту, чтобы увеличить среднюю квадратичную скорость его молекул вдвое? Во сколько раз при этом изменится температура газа? Во сколько раз при этом изменится давление газа на стенки сосуда?

Решение

Средняя квадратичная скорость молекул $\sqrt{\overline{v^2}} = \sqrt{\frac{3kT}{m}}$. Тогда $\sqrt{\overline{v_1^2}} = \sqrt{\frac{3kT_1}{m}}$; $\sqrt{\overline{v_2^2}} = \sqrt{\frac{3kT_2}{m}}$. По условию $2\sqrt{\overline{v_1^2}} = \sqrt{\overline{v_2^2}}$ или $2\sqrt{\frac{3kT_1}{m}} = \sqrt{\frac{3kT_2}{m}}$; $4T_1 = T_2$; $\frac{T_2}{T_1} = 4$. Т. к. $\frac{T_2}{T_1} = \frac{p_2}{p_1}$ при $V = const$ (см. задачу 5.88), то $\frac{p_2}{p_1} = 4$. Изменение температуры $\Delta T = T_2 - T_1 = 4T_1 - T_1 = 3T_1$. Количество тепла, подведенное к системе $Q = c_V m\Delta T$, где $c_V = \frac{i}{2}\frac{R}{\mu}$; $i = 5$, т.к. азот — двухатомный газ, поэтому $c_V = \frac{5}{2}\frac{R}{\mu}$ и $Q = \frac{5}{2}\frac{R}{\mu}m3T_1$; $Q = 6{,}23$ кДж.

5.91 Гелий находится в закрытом сосуде объемом $V = 2$ л при температуре $t_1 = 20$ °С и давлении $p_1 = 100$ кПа. Какое количество теплоты Q надо сообщить гелию, чтобы повысить его температуру на $\Delta t = 100$ °С? Каковы будут при новой температуре средняя квадратичная скорость его молекул, давление p_2, плотность ρ_2 гелия и энергия теплового движения W его молекул?

Решение

Количество тепла, необходимое для повышения температуры $Q = c_V m\Delta t$, где $c_V = \frac{i}{2}\frac{R}{\mu}$; $i = 3$, т. к. гелий — одноатомный газ, поэтому $c_V = \frac{3}{2}\frac{R}{\mu}$. Т. к. $p_1V = \frac{m}{\mu}RT_1$, то $m = \frac{p_1V\mu}{RT_1}$ — масса гелия в сосуде. Тогда $Q = \frac{3}{2}\frac{R}{\mu}\frac{p_1V\mu\Delta t}{RT_1} = \frac{3p_1V\Delta t}{2T_1}$; $Q = 102{,}39$ Дж. Средняя квадратичная скорость молекул $\sqrt{\overline{v^2}} = \sqrt{3RT_2/\mu}$; $\sqrt{\overline{v^2}} = 1{,}565$ км/с. Т.к. $p_2/p_1 = T_2/T_1$ (см. задачу 5.88), то $p_2 = \frac{p_1T_2}{T_1} = \frac{p_1(T_1 + g\Delta t)}{T_1}$; $p_2 = 134$ кПа. Из уравнения Менделеева — Клапейрона $p_2V = \frac{m}{\mu}RT_2$, значит, $\rho_2 = \frac{m}{V} = \frac{p_2\mu}{RT_2}$ — плотность газа. $\rho_2 = 0{,}164$ кг/м^3. Энергия теплового движения молекул $W = \frac{3}{2}\frac{m}{\mu}RT_2 = \frac{3}{2}p_2V$; $W = 402$ Дж.

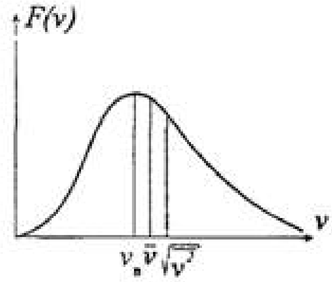
5.92 В закрытом сосуде объемом $V = 2$ л находится масса m азота и масса m аргона при нормальных условиях. Какое количество теплоты Q надо сообщить, чтобы нагреть газовую смесь $\Delta t = 100$ °С?

Решение

Количество тепла, необходимое для нагревания газовой смеси, $Q = (c_{V1}m + c_{V2}m)\Delta t = (c_{V1} + c_{V2})m\Delta t$. Теплоемкость при постоянном объеме $c_V = \frac{i}{2}\frac{R}{\mu}$. Для аргона $i = 3$, т. к. газ одноатомный, тогда $c_{V1} = \frac{3}{2}\frac{R}{\mu_1}$. Для азота $i = 5$, т. к. газ двухатомный, поэтому $c_{V2} = \frac{5}{2}\frac{R}{\mu_2}$. Из уравнения Менделеева — Клапейрона $pV = \left(\frac{m}{\mu_1} + \frac{m}{\mu_2}\right)RT = \left(\frac{\mu_1 + \mu_2}{\mu_1\mu_2}\right)mRT$, отсюда $m = \frac{pV\mu_1\mu_2}{(\mu_1 + \mu_2)RT}$. Тогда $Q = \left(\frac{3}{\mu_1} + \frac{5}{\mu_2}\right)\frac{R}{2} \times \frac{pV\mu_1\mu_2}{(\mu_1 + \mu_2)RT}\Delta t$; $Q = \frac{3\mu_2 + 5\mu_1}{\mu_1 + \mu_2}\frac{pV\Delta t}{2T}$; $Q = 154{,}2$ Дж.

5.93 Найти среднюю арифметическую, среднюю квадратичную и наиболее вероятную скорости молекул газа, который при давлении $p = 40$ кПа имеет плотность $\rho = 0{,}3$ кг/м^3.

Решение



На графике функции распределения молекул по скоростям приведено взаимное расположение величин скоростей $v_в$, $\bar{v}$ и $\sqrt{\overline{v^2}}$. Искомые скорости выражаются следующими соотношениями: $\bar{v} = \sqrt{\dfrac{8RT}{\pi\mu}}$ — (1); $v_в = \sqrt{\dfrac{2RT}{\mu}}$ — (2); $\sqrt{\overline{v^2}} = \sqrt{3RT/\mu}$ — (3). Согласно уравнению Менделеева — Клапейрона $pV = \dfrac{m}{\mu}RT$ или $p\mu = \rho RT$, откуда $\dfrac{RT}{\mu} = \dfrac{p}{\rho}$ — (4). Подставив (4) в (1) — (3), получим $\bar{v} = \sqrt{\dfrac{8p}{\pi\rho}}$; $\bar{v} = 579$ м/с; $v_в = \sqrt{\dfrac{2p}{\rho}}$; $v_в = 513$ м/с; $\sqrt{\overline{v^2}} = \sqrt{\dfrac{3p}{\rho}}$; $\sqrt{\overline{v^2}} = 628$ м/с. Полученные данные соответствуют графику.

5.94 При какой температуре T средняя квадратичная скорость молекул азота больше их наиболее вероятной скорости на $\Delta v = 50$ м/с?

Решение

По определению наиболее вероятная скорость $v_в = \sqrt{\dfrac{2kT}{m}} = \sqrt{\dfrac{2RT}{\mu}}$, а средняя квадратичная $\sqrt{\overline{v^2}} = \sqrt{\dfrac{3kT}{m}} = \sqrt{\dfrac{3RT}{\mu}}$. По условию задачи $\sqrt{\overline{v^2}} = v_в + \Delta v$, тогда $\Delta v = \sqrt{\overline{v^2}} - v_в = \sqrt{\dfrac{3RT}{\mu}} - \sqrt{\dfrac{2RT}{\mu}} = \sqrt{\dfrac{RT}{\mu}}\left(\sqrt{3} - \sqrt{2}\right)$.

Отсюда $\sqrt{\dfrac{RT}{\mu}} = \dfrac{\Delta v}{\sqrt{3} - \sqrt{2}}$; $T = \dfrac{\mu(\Delta v)^2}{R\left(\sqrt{3} - \sqrt{2}\right)^2}$; $T = 83{,}37$ К.

5.95 Какая часть молекул кислорода при $t = 0$ °C обладает скоростями v от 100 до 110 м/с?

Решение

Согласно закону Максвелла распределение молекул по скоростям определяется соотношением: $\frac{\Delta N}{N} = \frac{4}{\sqrt{\pi}} e^{-u^2} u^2 \Delta u$ — (1), где u — относительная скорость. По условию $v = 100$ м/с и $\Delta v = 10$ м/с. Наиболее вероятная скорость $v_в = \sqrt{\frac{2RT}{\mu}}$; $v_в = 376$ м/с. Тогда

$u = \frac{v}{v_в} = \frac{100}{376}$; $u^2 = 0{,}071$; $e^{-u^2} = 0{,}93$; $\Delta u = \frac{10}{376}$.

Подставляя в (1) числовые значения, найдем $\frac{\Delta N}{N} = 0{,}004 = 0{,}4\%$. Т. е. число молекул, скорости которых лежат в заданном интервале, равно 0,4% заданного числа молекул.

5.96 Какая часть молекул азота при $t = 150$ °C обладает скоростями v от 300 до 325 м/с?

Решение

Из закона Максвелла имеем $\frac{\Delta N}{N} = \frac{4}{\sqrt{v^2}} e^{-u^2} u^2 \Delta u$ — (1), где относительная скорость $\frac{v_1}{v_b}$ — (2), $\Delta u = \frac{\Delta v}{v_b} = \frac{v_2 - v_1}{v_b}$ — (3).

Здесь $v_в = \sqrt{\frac{2RT}{\mu}}$ — (4) — наиболее вероятная скорость молекул. Решая совместно уравнения (1) — (4), получим

$\frac{\Delta N}{N} = \frac{4}{\sqrt{\pi}} e^{\frac{v_1^2 \mu}{2RT}} \cdot \frac{v_1^2 \mu}{2RT} \cdot \frac{(v_2 - v_1)\sqrt{\mu}}{\sqrt{2RT}}$; $\frac{\Delta N}{N} = 2{,}8$ %.

5.97 Какая часть молекул водорода при $t = 0$ °C обладает скоростями v от 2000 до 2100 м/с?

Решение

Согласно закону распределения Максвелла $\frac{\Delta N}{N} = \frac{4}{\sqrt{\pi}} exp\left(-u^2\right) u^2 \Delta u$. Относительная скорость $u = \frac{v}{v_в}$, где $v_в = \sqrt{\frac{2RT}{\mu}}$ — наиболее вероятная скорость. В нашем случае $v = v_1 = 2000$ м/с, $\Delta v = v_2 - v_1$; $\Delta v = 100$ м/с. $v_в = 1506$ м/с. Тогда $u = \frac{v}{v_в}$; $u = 1{,}328$; $u^2 = 1{,}764$; $exp\left(-u^2\right) = 0{,}171$; $\Delta u = \frac{\Delta v}{v_в}$; $\Delta u = 0{,}066$ м/с. Окончательно $\frac{\Delta N}{N} = \frac{4}{\sqrt{\pi}}$; $\frac{\Delta N}{N} = 4{,}49$ %.

5.98 Во сколько раз число молекул ΔN_1, скорости которых лежат в интервале от $v_в$ до $v_в + \Delta v$, больше числа молекул ΔN_2, скорости которых лежат в интервале от $v_{ср.кв.}$ до $v_{ср.кв.} + \Delta v$?

Решение

Воспользуемся функцией Максвелла распределения молекул по скоростям: $f(v) = 4\pi\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}} exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right)\cdot v^2$ — (1). Относительное число молекул, скорости которых лежат в интервале от $v_в$ до $v_в + \Delta v$, есть $\frac{\Delta N_1}{N} = \int\limits_{v_в}^{v_в+\Delta v} f(v)dv$ — (2). Если $\Delta v << v_в$, то функция $f(v)$ на данном интервале можно приближенно считать $f(v_в) = const$. Тогда из (2) имеем $\frac{\Delta N_1}{N} = f(v_в)\int\limits_{v_в}^{v_в+\Delta v} dv = f(v_в)[v_в + \Delta v - v_в] = f(v_в)\Delta v$. Поскольку $v_в = \sqrt{\frac{2kT}{m}}$, то из уравнений (1) и (2) получим

$$\frac{\Delta N_1}{N} = 4\pi\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}} exp\left(-\frac{m}{2kT}\frac{2kT}{m}\right)\frac{2kT}{m}\cdot\Delta v;$$

$\frac{\Delta N_1}{N}=4\pi\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}} exp(-1)\frac{2kT}{m}\Delta v$ — (3). Аналогично во втором случае $\frac{\Delta N_2}{N}=\int\limits_{\sqrt{\overline{v^2}}}^{\sqrt{\overline{v^2}}+\Delta v} f\left(\sqrt{\overline{v^2}}\right)dv$, но т. к. $\Delta v << \sqrt{\overline{v^2}}$, то $f(v)\approx f\left(\sqrt{\overline{v^2}}\right)=const$. Тогда из уравнний (1) и (2) $\frac{\Delta N_2}{N}=f\left(\sqrt{\overline{v^2}}\right)\int\limits_{\sqrt{\overline{v^2}}}^{\sqrt{\overline{v^2}}+\Delta v} dv=f\left(\sqrt{\overline{v^2}}\right)\Delta v$. Поскольку средняя квадратичная скорость молекул $\sqrt{\overline{v^2}}=\sqrt{3kT/m}$, то

$\frac{\Delta N_2}{N}=4\pi\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}} exp\left(-\frac{m}{2kT}\frac{3kT}{m}\right)\frac{3kT}{m}\Delta v$;

$\frac{\Delta N_2}{N}=4\pi\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}} exp\left(-\frac{3}{2}\right)\frac{3kT}{m}\Delta v$ — (4). Разделив уравнение (3) на уравнение (4), получим искомое отношение: $\frac{\Delta N_1}{\Delta N_2}=\frac{exp(-1)2kT\Delta v/m}{exp(-3/2)3kT\Delta v/m}=exp\left(\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{2}{3}$. Произведя вычисления, окончательно получим $\Delta N_2/\Delta N_1=1{,}1$.

5.99 Какая часть молекул азота при температуре T имеет скорости, лежащие в интервале от $v_в$ до $v_в+\Delta v$, где $\Delta v = 20$ м/с. если: а) $T = 400$ К; б) $T = 900$ К?

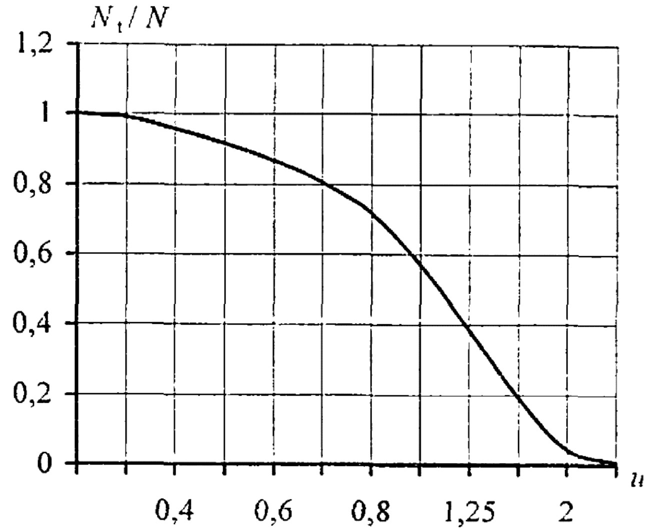
Решение

Согласно закону Максвелла $\frac{\Delta N}{N}=\frac{4}{\sqrt{v}}u^2e^{-u^2}\Delta u$ — (1), где $u=\frac{v_в}{v_в}=1$ — (2); $\Delta u=\frac{\Delta v}{v_в}$ — (3). Наиболее вероятная скорость молекул $v_в=\sqrt{\frac{2RT}{\mu}}$ — (4). Подставляя (4) в (3), а затем (2) и (3) в (1), получим $\frac{\Delta N}{N}=\frac{4}{\sqrt{\pi}}e^{-1}\frac{\Delta v\sqrt{\mu}}{\sqrt{2RT}}$.

а) $\frac{\Delta N}{N}=3{,}4\,\%$; б) $\frac{\Delta N}{N}=2{,}2\,\%$.

5.100 Какая часть молекул азота при температуре t = 150 °С имеет скорости, лежащие в интервале от v_1 = 300 м/с до v_2 = 800 м/с?

Решение



В данной задаче нельзя использовать формулу Максвелла, т. к. интервал скоростей велик. Для решения задачи найдем число молекул N_1 и N_2, скорости которых больше v_1 и v_2. Тогда скорости, лежащие в интервале от v_1 до v_2, имеют число молекул $N_x = N_1 - N_2$. Значения N_1 и N_2 найдем по графику зависимости N_x / N от u. Наиболее вероятная скорость $v_в = \sqrt{\frac{2RT}{\mu}} = 500$ м/с, тогда $u_1 = \frac{300}{500} = 0{,}6$ и $u_2 = \frac{800}{500} = 1{,}6$. По графику найдем $\frac{N_1}{N} = 0{,}87 = 87\%$ и $\frac{N_2}{N} = 0{,}17 = 17\%$. Т. е. 87% молекул движется со скоростями большими v_1 и 17% молекул имеют скорости превышающие v_2. Тогда искомая часть молекул $\frac{N_x}{N} = 87\% - 17\% = 70\%$.

5.101 Какая часть общего числа N молекул имеет скорости: а) больше наиболее вероятной скорости $v_в$, б) меньше наиболее вероятной скорости $v_в$?

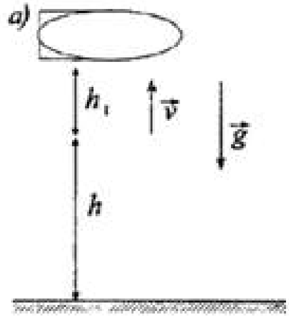
Решение

а) Т. к. в данной задаче мы имеем большие интервалы скоростей, то нельзя пользоваться функцией распределения Максвелла. Т.к. относительная скорость $u = \frac{v}{v_в}$, то для $v = v_в$ имеем $u = \frac{v_в}{v_в} = 1$. По таблице 11 находим для $u = 1$; $\frac{N_1}{N} = 0{,}572$. Значит, доля молекул, имеющих скорости $v > v_в$, равна $\frac{N_1}{N} = 57{,}2\%$.

б) Т. к. доля молекул, имеющих скорости $v > v_в$: $\frac{N_1}{N} = 57{,}2\%$ (см. пункт а), то доля молекул у которых скорости $v < v_в$: $\frac{N_1}{N} = 42{,}8\%$. Поэтому график функции Максвелла не симметричен.

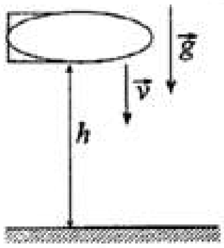
5.102 В сосуде находится масса m = 2,5 г кислорода. Найти число N_x молекул кислорода, скорости которых превышают среднюю квадратичную скорость $v_{ср.кв.}$.

Решение

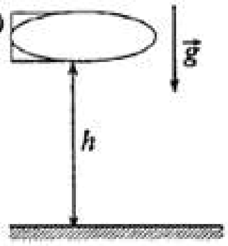


Решаем задачу относительно неподвижной системы отсчета — земли. Тогда скорость камня в начальный момент времени относительно земли $\vec{v}_{отн}$ равна сумме скоростей: камня относительно аэростата $\vec{v}_{отн} = 0$ и скорости v аэростата относительно земли, т.е. $\vec{v}_{отн} = 0 + \vec{v}$. Таким образом, при $t = 0$ скорость камня равна скорости аэростата. В первый момент времени камень, имея начальную скорость v, полетит вверх и за время t_1 поднимется на высоту $h_1 = \frac{gt_1^2}{2}$ — (1) (см задачу 1.8). Остановившись в верхней точке, он полетит вниз и за время t_2 преодолеет расстояние $h + h_1 = \frac{gt_2^2}{2}$ — (2). Общее время $t = t_1 + t_2$ — (3). При движении вверх скорость $v = gt_1$, откуда $t_1 = \frac{v}{g}$ — (4). Подставив (4) в (1), получим $h_1 = \frac{v^2}{(2g)}$. Преобразуем уравнение (2): $h + \frac{v^2}{2g} = \frac{gt_2^2}{2}$.

Отсюда $t_2 = \dfrac{\sqrt{2gh+v^2}}{g}$ — (5). Подставив (4) и (5) в (3), получим $t = \dfrac{\left(v+\sqrt{2gh+v^2}\right)}{g}$; $t \approx 8{,}4$ с.

б) 

Уравнение движения камня: $h = vt + \dfrac{gt^2}{2}$ или $\dfrac{gt^2}{2} + vt - h = 0$. Решим квадратное уравнение относительно t: $D = v^2 + 2gh$; $t = \left(-v \pm \sqrt{v^2+2gh}\right)/g$. Величина t должна быть положительна, следовательно: $t \approx 7{,}3$ с.

в) 

Уравнение движения камня: $h = \dfrac{gt^2}{2}$, откуда $t = \sqrt{2h/g}$, $t \approx 7{,}8$ с.

5.103 В сосуде находится масса m = 8 г кислорода при температуре T = 1600 К. Какое число N_x молекул кислорода имеет кинетическую энергию поступательного движения, превышающую энергию W_0 = 6,65·10^{-20} Дж?

Решение

Кинетическая энергия поступательного движения молекулы $W_0 = \dfrac{m_0 v_0^2}{2}$, откуда $v_0 = \sqrt{\dfrac{2W_0}{m_0}}$. Наиболее вероятная скорость $v_в = \sqrt{\dfrac{2RT}{\mu}} = \sqrt{\dfrac{3kT}{m_0}}$, тогда относительная скорость молекулы $u = \dfrac{v_0}{v_в} = \sqrt{\dfrac{W_0}{kT}}$; $u = 1{,}73$. Используя график к задаче 5.100, найдем относительное число молекул $\dfrac{N_x}{N}$, относительная скорость которых больше u. Получим $\dfrac{N_x}{N} = 0{,}12$, т. е. 12% молекул имеют кинетическую энергию больше W_0. Общее число молекул кислорода в сосуде $N = \dfrac{m}{\mu} N_A = 1{,}5 \cdot 10^{23}$. Следовательно, $N_x = 0{,}12N = 1{,}8 \cdot 10^{22}$.

5.104 Энергию заряженных частиц часто выражают в электронвольтах: 1 эВ — энергия, которую приобретает электрон, пройдя в электрическом поле разность потенциалов U = 1 В, причем 1 эВ = 1,60219^{-19} Дж. При какой температуре T_0 средняя кинетическая энергия поступательного движения молекул W_0 = 1 эВ? При какой температуре 50% всех молекул имеет кинетическую энергию поступательного движения, превышающую энергию W_0 = 1 эВ?

Решение

Средняя кинетическая энергия поступательного движения молекул $W_0 = \frac{3}{2}kT$. Отсюда $T = \frac{2W_0}{3k}$; $T = 7730$ К. Воспользовавшись графиком из задачи 5.100, найдем, что значению $\frac{N_x}{N} = 0{,}5$ соответствует значение $u = 1{,}1$. В задаче 5.103 мы определили, что относительная скорость молекул $u = \sqrt{\frac{W_0}{kT}}$, отсюда $T = \frac{W_0}{ku^2}$; $T = 9600$ К.

5.105 Молярная энергия, необходимая для ионизации атомов гелия W_i = 418,68 кДж/моль. При какой температуре T газа 10% всех молекул имеют молярную кинетическую энергию поступательного движения, превышающую энергию W_i?

Решение

Наиболее вероятная кинетическая энергия молекул $W_в = \frac{mv_в^2}{2} = \frac{m \cdot 2\frac{RT}{\mu}}{2} = \frac{mRT}{\mu} = \nu RT = RT$, т. к. по условию рассматривается молярная энергия, т. е. $\nu = 1$. Отношение $\frac{W_i}{W_в} = \frac{mv^2}{2}\frac{2}{mv_в^2} = \frac{v^2}{v_в^2} = u^2$, где u — относительная скорость.

По таблице 11 $u = 1{,}5$, $\frac{N_x}{N} = 0{,}231$; $u = 2$, $\frac{N_x}{N} = 0{,}046$. В нашем случае $\frac{N_i}{N} = 0{,}1$, тогда из графика $u \approx 1{,}79$ и $u^2 \approx 3{,}2$. Значит, $\frac{W_i}{W_в} = 3{,}2$, отсюда $W_i = 3{,}2W_в = 3{,}2RT$. Следовательно, $T = \frac{W_i}{3{,}2R}$; $T = 1{,}57 \cdot 10^4$ К.

5.106 Обсерватория расположена на высоте h = 3250 м над уровнем моря. Найти давление воздуха на этой высоте. Температуру воздуха считать постоянной и равной t = 5 °С. Молярная масса воздуха μ = 0,029 кг/моль. Давление воздуха на уровне моря p_0 = 101,3 кПа.

Решение

Закон убывания давления газа с высотой в поле силы тяжести дает барометрическая формула: $p = p_0 \, exp\left(-\frac{\mu g h}{RT}\right)$.

Подставив числовые данные, получим $p = 67{,}2$ кПа.

5.107 На какой высоте h давление воздуха составляет 75% от давления на уровне моря? Температуру воздуха считать постоянной и равной t = 0 °С.

Решение

Закон убывания давления газа с высотой в поле силы тяжести дает барометрическая формула: $p = p_0 \, exp\left(-\frac{\mu g h}{RT}\right)$, откуда $\frac{p}{p_0} = exp\left(-\frac{\mu g h}{RT}\right)$. Логарифмируя обе части уравнения, получим $ln\frac{p}{p_0} = -\frac{\mu g h}{RT}$, откуда $h = -\frac{RT \, ln\, p/p_0}{\mu g} = -\frac{8{,}31 \cdot 273 \cdot (-0{,}29)}{0{,}029 \cdot 9{,}8}$; $h = 2296$ м.

5.108 Пассажирский самолет совершает полеты на высоте h_1 = 8300 м. Чтобы не снабжать пассажиров кислородными масками, в кабине при помощи компрессора поддерживается постоянное давление, соответствующее высоте h_2 = 2700 м. Найти разность давлений внутри и снаружи кабины. Температуру наружного воздуха считать равной t_1 = 0 °С.

Решение

Согласно барометрической формуле $p = p_0 \, exp\left(-\frac{\mu g h}{RT}\right)$, где $p_0 = 10^5$ Па — давление на уровне моря. Молярная масса воздуха $\mu = 29 \cdot 10^{-3}$ кг/моль. Тогда $p_1 = p_0 \, exp\left(-\frac{\mu g h_1}{RT_1}\right)$; $p_1 = 35{,}3$ кПа. Температура воздуха в кабине соответствует давлению на высоте $h_2 = 2700$ м, т. е. $T_2 = 273$ К, тогда $p_2 = p_0 \, exp\left(-\frac{\mu g h}{RT_2}\right)$; $p_2 = 71{,}3$ кПа. Отсюда $\Delta p = p_2 - p_1$; $\Delta p = 36$ кПа.

5.109 Найти в предыдущей задаче, во сколько раз плотность ρ_2 воздуха в кабине больше плотности ρ_1 воздуха вне ее, если температура наружного воздуха $t_1 = -20$ °C, а температура воздуха в кабине $t_2 = +20$ °C.

Решение

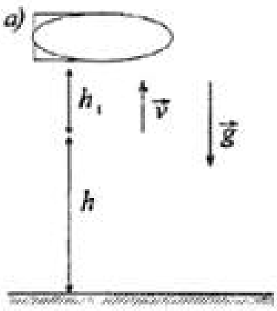
Согласно барометрической формуле $p = p_0\, exp\left(-\frac{\mu g h_1}{RT_1}\right)$.

Из уравнения Менделеева — Клапейрона $pV = \frac{m}{\mu}RT$ имеем $\rho = \frac{p\mu}{RT}$. Тогда отношение плотностей

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{p_2 T_1}{p_1 T_2} = \frac{0{,}713 \cdot 253}{0{,}353 \cdot 293} = 1{,}7.$$

5.110 Найти плотность ρ воздуха: а) у поверхности Земли; б) на высоте $h = 4$ км от поверхности Земли. Температуру воздуха считать постоянной и равной $t = 0$ °C. Давление воздуха у поверхности Земли $p_0 = 100$ кПа.

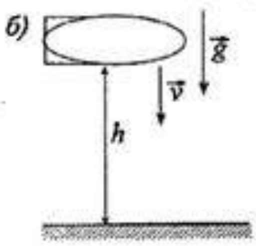
Решение



Решаем задачу относительно неподвижной системы отсчета — земли. Тогда скорость камня в начальный момент времени относительно земли $\vec{v}_{отн}$ равна сумме скоростей: камня относительно аэростата $\vec{v}_{отн} = 0$ и скорости v аэростата относительно земли, т.е. $\vec{v}_{отн} = 0 + \vec{v}$. Таким образом, при $t = 0$ скорость камня равна скорости аэростата. В первый момент времени камень, имея начальную скорость v, полетит вверх и за время t_1 поднимется на высоту $h_1 = \frac{gt_1^2}{2}$ — (1) (см задачу 1.8). Остановившись в верхней точке, он полетит вниз и за время t_2 преодолеет расстояние $h + h_1 = \frac{gt_2^2}{2}$ — (2). Общее время $t = t_1 + t_2$ — (3). При движении вверх скорость $v = gt_1$, откуда $t_1 = \frac{v}{g}$ — (4). Подставив (4) в (1), получим $h_1 = \frac{v^2}{(2g)}$. Преобразуем уравнение (2): $h + \frac{v^2}{2g} = \frac{gt_2^2}{2}$.

Отсюда $t_2 = \frac{\sqrt{2gh + v^2}}{g}$ — (5). Подставив (4) и (5) в (3),

получим $t = \frac{\left(v + \sqrt{2gh + v^2}\right)}{g}$; $t \approx 8.4$ с.

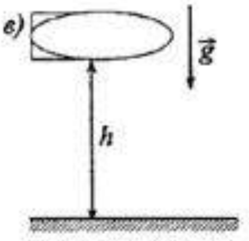


Уравнение движения камня:

$$h = vt + \frac{gt^2}{2} \quad \text{или} \quad \frac{gt^2}{2} + vt - h = 0.$$

Решим квадратное уравнение относительно t: $D = v^2 + 2gh$;

$t = \left(-v \pm \sqrt{v^2 + 2gh}\right)/g$. Величина t должна быть положительна, следовательно: $t \approx 7{,}3$ с.



Уравнение движения камня: $h = \frac{gt^2}{2}$, откуда $t = \sqrt{2h/g}$, $t \approx 7{,}8$ с.

5.111 На какой высоте h плотность газа вдвое меньше его плотности на уровне моря? Температуру газа считать постоянной и равной $t = 0$ °C. Задачу решить для: а) воздуха, б) водорода.

Решение

Плотности газа на уровне моря и на высоте h соответственно равны: $\rho_1 = \frac{p_0\mu}{RT}$ и $\rho_2 = \frac{p_0\mu}{RT} exp\left(-\frac{\mu gh}{RT}\right)$ (см. задачи 5.109 и 5.110). По условию $\frac{\rho_1}{\rho_2} = 2$, тогда

$\frac{1}{exp(-\mu gh/RT)} = 2$ или $exp\left(\frac{\mu gh}{RT}\right) = 2$. Прологарифмируем полученное выражение: $\frac{\mu gh}{RT} = ln 2$, отсюда $h = \frac{RT}{\mu g} ln 2$.

а) Для воздуха $\mu = 29 \cdot 10^{-3}$ кг/моль; $h = 5{,}53$ км. б) Для водорода $\mu = 2 \cdot 10^{-3}$ кг/моль; $h = 80{,}23$ км.

5.112 Перрен, наблюдая при помощи микроскопа изменение концентрации взвешенных частиц гуммигута с изменением высоты и применяя барометрическую формулу, экспериментально нашел значение постоянной Авогадро N_A. В одном из опытов Перрен нашел, что при расстоянии между двумя слоями $\Delta h = 100$ мкм число взвешенных частиц гуммигута в одном слое вдвое больше, чем в другом. Температура гуммигута $t = 20$ °C. Частицы гуммигута диаметром $\sigma = 0{,}3$ мкм были взвешены в жидкости, плотность которой на $\Delta\rho = 0{,}2 \cdot 10^3$ кг/м^3 меньше плотности частиц. Найти по этим данным значение постоянной Авогадро N_A.

Решение

Запишем барометрическую формулу: $p = p_0\, exp\left(-\frac{\mu gh}{RT}\right)$.

Число частиц в единице объема $n = \frac{p}{kT}$, откуда $p = nkT$

Подставляя последнее выражение в барометрическую формулу, получим $n_1 = n_0\, exp\left(-\frac{\mu gh_1}{RT}\right)$; $n_2 = n_0\, exp\left(-\frac{\mu gh_2}{RT}\right)$, отсюда, $\frac{n_1}{n_2} = exp\left(\frac{\mu g\Delta h}{RT}\right)$. Прологарифмировав данное выражение, с учетом $\mu = N_A m$, получим $ln\frac{n_1}{n_2} = \frac{N_A mg\Delta h}{RT}$, откуда, с учетом закона Архимеда, получим $N_A = \frac{RT \cdot \ln(n_1/n_2)}{gV\Delta\rho\Delta h}$; $N_A = 6{,}1 \cdot 10^{23}$ моль$^{-1}$.

5.113 Найти среднюю длину свободного пробега λ молекул углекислого газа при температуре t = 100 °С и давлении p = 13,3 Па. Диаметр молекул углекислого газа σ = 0,32 нм.

Решение

Средняя длина свободного пробега молекул газа $\bar{\lambda} = \frac{\bar{v}}{\bar{z}}$, где $\bar{z} = \sqrt{2}\sigma^2 v\pi n$ — среднее число столкновений каждой молекулы с остальными в единицу времени. Концентрация молекул $n = \frac{p}{kT}$, тогда $\bar{\lambda} = \frac{1}{\sqrt{2}\sigma^2 n\pi} = \frac{kT}{\sqrt{2}\sigma^2 p\pi}$;

$\bar{\lambda} = \frac{1{,}38 \cdot 10^{-23} \cdot 373}{\sqrt{2} \cdot 0{,}32^2 \cdot 10^{-18} \cdot 13{,}3 \cdot 3{,}14} = 850$ мкм.

5.114 При помощи ионизационного манометра, установленного на искусственном спутнике Земли, было обнаружено, что на высоте h = 300 км от поверхности Земли концентрация частиц газа в атмосфере $n = 10^{15}$ м$^{-3}$. Найти среднюю длину свободного пробега λ частиц газа на этой высоте. Диаметр частиц газа σ = 0,2 нм.

Решение

Длина свободного пробега молекул газа $\bar{\lambda} = \frac{1}{\sqrt{2}\sigma^2 n\pi}$;

$\bar{\lambda} = 5{,}6$ км.

5.115 Найти среднюю длину свободного пробега $\lambda_{ср}$ молекул воздуха при нормальных условиях. Диаметр молекул воздуха σ = 0,3 нм.

Решение

Средняя длина свободного пробега молекулы $\bar{\lambda} = \frac{1}{\sqrt{2}\pi\sigma^2 n}$. Из основного уравнения молекулярно-кинетической теории имеем $p = nkT$, отсюда $n = p/kT$. Тогда $\bar{\lambda} = \frac{kT}{\sqrt{2}\pi\sigma^2 p}$; $\bar{\lambda} = 94{,}2$ нм.

5.116 Найти среднее число столкновений $z_{ср}$ в единицу времени молекул углекислого газа при температуре t = 100 °С, если средняя длина свободного пробега $\lambda_{ср}$ = 870 мкм.

Решение

Средняя длина свободного пробега молекул $\overline{\lambda} = \frac{\overline{v}}{z}$, где $\overline{v} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi\mu}}$ — средняя арифметическая скорость молекул. Тогда $z = \frac{\overline{v}}{\overline{\lambda}} = \frac{\sqrt{8RT/\pi\mu}}{\overline{\lambda}}$; $z = 4{,}87 \cdot 10^5$ с$^{-1}$.

5.117 Найти среднее число столкновений $z_{ср}$ в единицу времени молекул азота при давлении p = 53,33 кПа и температуре t = 27 °С.

Решение

Из основного уравнения молекулярно-кинетической теории и формулы длины свободного пробега молекул имеем $\overline{\lambda} = \frac{kT}{\sqrt{2}\pi\sigma^2 p}$ (см. задачу 5. 15). С другой стороны, $\overline{\lambda} = \frac{\overline{v}}{z}$. Приравняем правые части тих уравнений: $\frac{kT}{\sqrt{2}\pi\sigma^2 p} = \frac{\overline{v}}{z}$, где $\overline{v} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi\mu}}$. Следов ительно, $z = \sqrt{\frac{8RT}{\pi\mu}} \cdot \frac{\sqrt{2}\pi\sigma^2 p}{kT}$; $z = 2{,}43 \cdot 10^9$ с$^{-1}$.

5.118 В сосуде объемом V = 0,5 л находится кислород при нормальных условиях. Найти общее число столкновений Z между молекулами кислорода в этом объеме за единицу времени.

Решение

Общее число столкновений $Z = \frac{\overline{z}n}{2}$ — (1), где среднее число столкновений каждой молекулы $\overline{z} = \sqrt{2}\sigma^2 n\overline{v}$ — (2). Концентрация молекул $n = \frac{p}{RT}$ — (3), средняя арифметическая скорость $\overline{v} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi\mu}}$ — (4). Подставляя уравнения (3) и (4) в (2), а затем полученное уравнение в (1), найдем:

$$Z = \frac{\sqrt{2}\sigma^2 p^2\sqrt{8RT}}{2k^2T^2\sqrt{\pi\mu}} = \frac{2\sigma^2 p^2\sqrt{RT}}{k^2T^2\sqrt{\pi\mu}};\ Z = 3 \cdot 10^{31}.$$

5.119 Во сколько раз уменьшится число столкновений $z_{ср}$ в единицу времени молекул двухатомного газа, если объем газа адиабатически увеличить в 2 раза?

Решение

Среднее число столкновений молекул в единицу времени $z = \sqrt{\frac{8RT}{\pi\mu}} \frac{\sqrt{2}\pi\sigma^2 p}{kT}$ (см. задачу 5.117). Т. к. в данной формуле все величины, кроме давления p и температуры T, являются постоянными, то $\frac{z_1}{z_2} = \frac{p_1}{p_2}\sqrt{\frac{T_2}{T_1}}$. Из уравнения Пуассона для адиабатического процесса имеем $\frac{p_1}{p_2} = \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^\gamma$ и $\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1}$, где $\gamma = \frac{c_p}{c_V}$ — показатель адиабаты. Поскольку теплоемкости при постоянном давлении и постоянном объеме равны соответственно $c_p = \frac{i+2}{2}\frac{R}{\mu}$ и $c_V = \frac{i}{2}\frac{R}{\mu}$ и для двухатомного газа число степеней свободы $i = 5$, то показатель адиабаты $\gamma = \frac{c_p}{c_V} = \frac{i+2}{2}\frac{R}{\mu}\frac{2}{i}\frac{\mu}{R}$; $\gamma = 1{,}4$. Тогда $\frac{z_1}{z_2} = \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^\gamma \sqrt{\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1}}$. По условию задачи $\frac{V_2}{V_1} = 2$. Подставляя числовые значения, получим $\frac{z_1}{z_2} = 2{,}34$.

5.120 Найти среднюю длину свободного пробега $\lambda_{ср}$ молекул азота при давлении p = 10 кПа и температуре t = 17 °С.

Решение

Имеем: $\bar{\lambda} = \frac{1}{\sqrt{2}\pi\sigma^2 n}$ — (1). Из основного уравнения молекулярно-кинетической теории $p = nkT$ найдем концентрацию $n = \frac{p}{kT}$ и подставим в (1): $\bar{\lambda} = \frac{kT}{\sqrt{2}\pi\sigma^2 p}$; $\bar{\lambda} = 1$ мкм.

5.121 Найти среднюю длину свободного пробега $\lambda_{ср}$ атомов гелия, если известно, что плотность гелия ρ = 0,021 кг/м^3.

Решение

Среднюю длину свободного пробега молекул можно выразить как $\bar{\lambda} = \frac{kT}{\sqrt{2}\pi\sigma^2 p}$ (см. задачу 5.120). Из уравнения Менделеева — Клапейрона $pV = \frac{m}{\mu}RT$ выразим плотность $\rho = \frac{m}{V} = \frac{p\mu}{RT}$. Отсюда давление $p = \frac{\rho RT}{\mu}$. Тогда $\bar{\lambda} = \frac{kT\mu}{\sqrt{2}\pi\sigma^2 \rho RT} = \frac{\mu}{\sqrt{2}\pi\sigma^2 \rho N_A}$; $\bar{\lambda} = 1{,}78$ мкм.

5.122 Найти среднюю длину свободного пробега $\lambda_{ср}$ молекул водорода при давлении p = 0,133 Па и температуре t = 50 °С.

Решение

Исходя из основного уравнения МКТ и формулы длины свободного пробега молекул, можно получить для $\bar{\lambda}$ следующее выражение (см. задачу 5.120): $\bar{\lambda} = \frac{kT}{\sqrt{2}\pi\sigma^2 p}$; $\bar{\lambda} = 14{,}2$ см.

5.123 При некотором давлении и температуре t = 0 °С средняя длина свободного пробега молекул кислорода $\lambda_{ср}$ = 95 нм. Найти среднее число столкновений $z_{ср}$ в единицу времени молекул кислорода, если при той же температуре давление кислорода уменьшить в 100 раз.

Решение

Среднее число столкновений молекул в единицу времени $\bar{z} = \frac{\bar{v}}{\bar{\lambda}_2}$, где $\bar{v} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi\mu}}$ и $\bar{\lambda}_2 = \bar{\lambda}_1 \frac{p_1}{p_2}$. Т. к. $\frac{p_1}{p_2} = 100$, то $\bar{z} = \frac{\sqrt{8RT/\pi\mu}}{\bar{\lambda}_1 p_1 / p_2}$; $\bar{z} = 4{,}5 \cdot 10^7$ с$^{-1}$.

5.124 При некоторых условиях средняя длина свободного пробега молекул газа $\lambda_{ср}$ = 160 нм; средняя арифметическая скорость его молекул $v_{ср}$ = 1,95 км/с. Найти среднее число столкновений $z_{ср}$ в единицу времени молекул этого газа, если при той же температуре давление газа уменьшить в 1,27 раза.

Решение

По определению, средняя длина свободного пробега молекул $\bar{\lambda} = \frac{\bar{v}}{z}$ — (1). С другой стороны (см. задачу 5.120), $\bar{\lambda} = \frac{kT}{\sqrt{2}\pi\sigma^2 p}$ — (2). Т. к. по условию $T = const$, то из (2) имеем $\frac{\bar{\lambda}_1}{\bar{\lambda}_2} = \frac{p_1}{p_2}$, отсюда $\bar{\lambda}_2 = \frac{p_1}{p_2}\bar{\lambda}_1 = 1{,}27\bar{\lambda}_1$. Средняя арифметическая скорость молекул $\bar{v} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi\mu}}$, и т. к. $T = const$, то $\bar{v}_1 = \bar{v}_2$. Тогда $z = \frac{\bar{v}_1}{\bar{\lambda}_2} = \frac{\bar{v}_2}{1{,}27\bar{\lambda}_1}$; $z = 9{,}6 \cdot 10^9$ с$^{-1}$.

5.125 В сосуде объем V = 100 см^3 находится масса m = 0,5 г азота. Найти среднюю длину свободного пробега $\lambda_{ср}$ молекул азота.

Решение

Средняя длина свободного пробега молекул (см. задачу 5.120) $\bar{\lambda} = \frac{kT}{\sqrt{2}\pi\sigma^2 p}$. Из уравнения Менделеева — Клапейрона $pV = \frac{mRT}{\mu V}$, тогда $\bar{\lambda} = \frac{k\mu V}{\sqrt{2}\pi\sigma^2 mR}$; $\bar{\lambda} = 23{,}2$ нм.

5.126 В сосуде находится углекислый газ, плотность которого ρ = 1,7 кг/м^3. Средняя длина свободного пробега его молекул $\lambda_{ср}$ = 79 нм. Найти диаметр σ молекул углекислого газа.

Решение

Средняя длина свободного пробега молекул (см. задачу 5.121) $\bar{\lambda} = \frac{\mu}{\sqrt{2}\pi\sigma^2 \rho N_A}$. Молярная масса углекислого газа $\mu = \mu_C + 2\mu_0$; $\mu = 44 \cdot 10^{-3}$ кг/моль. Из формулы для $\bar{\lambda}$: $\sigma = \sqrt{\frac{\mu}{\sqrt{2}\pi\rho N_A \bar{\lambda}}}$; $\sigma = 0{,}35$ нм.

5.127 Найти среднее время $t_{ср}$ между двумя последовательными столкновениями молекул азота при давлении p = 133 Па, температуре t = 10 °С.

Решение

Имеем $\tau = \frac{\lambda}{v}$, где $v = \sqrt{\frac{8RT}{\pi\mu}}$ — средняя арифметичес скорость молекул, $\bar{\lambda} = \frac{kT}{\sqrt{2}\sigma^2 p\pi}$ — средняя дл свободного пробега молекул (см. задачу 5.113). Отс $\tau = \frac{kT \cdot \sqrt{\pi\mu}}{\sqrt{2}\sigma^2 p\pi\sqrt{8RT}} = \frac{k\sqrt{\mu T}}{4\sigma^2 p\sqrt{\pi R}}$; $\tau = 1{,}6 \cdot 10^{-7}$ с.

5.128 Сосуд с воздухом откачан до давления p = 1,33·10^{-4} Па. Найти плотность ρ воздуха в сосуде, число молекул n в единице объема сосуда и среднюю длину свободного пробега $\lambda_{ср}$ молекул. Диаметр молекул воздуха σ = 0,3 нм. Молярная масса воздуха μ = 0,029 кг/моль. Температура воздуха t = 17 °С.

Решение

Основное уравнение молекулярно-кинетической теор $p = nkT$. Отсюда концентрация $n = \frac{p}{kT}$; $n = 3{,}32 \cdot 10^{16}$
Средняя длина свободного пробега молекул $\bar{\lambda} = \frac{1}{\sqrt{2}\pi\sigma}$
$\bar{\lambda} = 75{,}33$ м. Из уравнения Менделеева — Клапейр $pV = \frac{m}{\mu}RT$ плотность $\rho = \frac{m}{V} = \frac{p\mu}{RT}$; $\rho = 1{,}6 \cdot 10^{-9}$ кг/м^3.

5.129 Какое предельное число n молекул газа должно находиться в единице объема сферического сосуда, чтобы молекулы не сталкивались друг с другом? Диаметр молекул газа $\sigma = 0{,}3$ нм, диаметр сосуда $D = 15$ см.

Решение

Чтобы молекулы не сталкивались друг с другом, средняя длина свободного пробега должна быть не меньше диаметра данного сосуда. $\bar{\lambda} \ge D \ge \frac{1}{\sqrt{2}\pi\sigma^2 n}$, отсюда $n \le \frac{1}{\sqrt{2}\pi\sigma^2 D} = 1{,}7 \cdot 10^{19}$ м$^{-3}$.

5.130 Какое давление p надо создать внутри сферического сосуда, чтобы молекулы не сталкивались друг с другом, если диаметр сосуда: *а*) $D = 1$ см; б) $D = 10$ см; в) $D = 100$ см? Диаметр молекул газа $\sigma = 0{,}3$ нм.

Решение

Средняя длина свободного пробега молекул (см. задачу 5.120) $\bar{\lambda} = \frac{kT}{\sqrt{2}\pi\sigma^2 p}$. Чтобы молекулы не сталкивались друг с другом, необходимо, чтобы $x \ge D$. Рассмотрим предельный случай, когда $D = \bar{\lambda} = \frac{kT}{\sqrt{2}\pi\sigma^2 p}$, откуда давление $p = \frac{kT}{\sqrt{2}\pi\sigma^2 D}$. а) При $D = 1$ см; $p = 942$ МПа; б) при $D = 10$ см; $p = 94{,}2$ МПа; в) при $D = 100$ см; $p = 9{,}42$ МПа.

5.131 Расстояние между катодом и анодом в разрядной трубке $d = 15$ см. Какое давление p надо создать в разрядной трубке, чтобы электроны не сталкивались с молекулами воздуха на пути от катода к аноду? Температура воздуха $t = 27$ °С. Диаметр молекул воздуха $\sigma = 0{,}3$ нм. Средняя длина свободного пробега электрона в газе приблизительно в 5,7 раза больше средней длины свободного пробега молекул самого газа.

Решение

Средняя длина свободного пробега молекул воздуха $\bar{\lambda}_{воз} = \frac{kT}{\sqrt{2}\pi\sigma^2 p}$ (см. задачу 5.120). Чтобы электроны не стакивались с молекулами воздуха, необходимо, чтобы средняя длина свободного пробега электронов была не меньше расстояния между катодом и анодом, т. е. $\bar{\lambda}_{эл} \ge d$. По условию $\bar{\lambda}_{эл} = 5{,}7\bar{\lambda}_{воз}$, отсюда $d \le \frac{5{,}7kT}{\sqrt{2}\pi\sigma^2 p}$. Тогда давление должно быть $p \le \frac{5{,}7kT}{\sqrt{2}\pi\sigma^2 d}$; $p \le 394$ мПа.

5.132 В сферической колбе объемом $V = 1$ л находится азот. При какой плотности ρ азота средняя длина свободного пробега молекул азота больше размеров сосуда?

Решение

Т. к. колба сферическая, то ее объем $V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi \times \left(\frac{D}{2}\right)^3 = \frac{\pi D^3}{6}$. Отсюда диаметр колбы $D = \sqrt[3]{\frac{6V}{\pi}}$. Средняя длина свободного пробега молекул (см. задачу 5.121) $\bar{\lambda} = \frac{\mu}{\sqrt{2}\pi\sigma^2\rho N_A}$. По условию $\bar{\lambda} > D$, следовательно, $\sqrt[3]{\frac{6V}{\pi}} < \frac{\mu}{\sqrt{2}\pi\sigma^2\rho N_A}$. Значит, плотность должна быть $\rho < \frac{\mu}{\sqrt{2}\pi\sigma^2 N_A \sqrt[3]{6V/\pi}}$; $\rho < 9{,}38 \cdot 10^{-7}$ кг/м^3.

5.133 Найти среднее число столкновений $z_{ср}$ в единицу времени молекул некоторого газа, если средняя длина свободного пробега $\lambda_{ср} = 5$ мкм, а средняя квадратичная скорость его молекул $v_{ср.кв.} = 500$ м/с.

Решение

Средняя длина свободного пробега молекул $\bar{\lambda} = \frac{\bar{v}}{z}$. Тогда среднее число столкновений в единицу времени $z = \frac{\bar{v}}{\bar{\lambda}}$. Поскольку средняя квадратичная скорость молекул $\sqrt{\overline{v^2}} = \sqrt{\frac{3kT}{m}} = \sqrt{3}\sqrt{\frac{kT}{m}}$, то $\sqrt{\frac{kT}{m}} = \frac{\sqrt{\overline{v^2}}}{\sqrt{3}}$. Средняя арифметическая скорость молекул $\bar{v} = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}} = \sqrt{\frac{8}{3\pi}}\sqrt{\overline{v^2}}$. Тогда $z = \frac{\sqrt{8/3\pi}\sqrt{\overline{v^2}}}{\bar{\lambda}}$; $z = 9{,}21 \cdot 10^7$ сек$^{-1}$.

5.134 Найти коэффициент диффузии D водорода при нормальных условиях, если средняя длина свободного пробега $\lambda_{ср} = 0{,}16$ мкм.

Решение

По определению коэффициент диффузии $D = \frac{1}{3}\bar{v}\bar{\lambda}$, где $\bar{v} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi\mu}}$ — средняя арифметическая скорость молекул. Тогда коэффициент диффузии водорода при нормальных условиях $D = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{8RT}{\pi\mu}}$; $D = 9{,}06 \cdot 10^{-5}$ м^2/с.

5.135 Найти коэффициент диффузии D гелия при нормальных условиях.

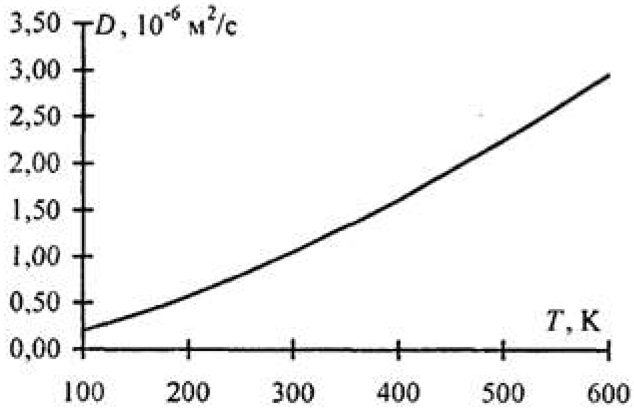
Решение

Коэффициент диффузии (см. задачу 5.134) $D = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{8RT}{\pi\mu}}$.

Длина свободного пробега молекул (см. задачу 5.120) $\overline{\lambda} = \frac{kT}{\sqrt{2}\pi\sigma^2 p}$. Тогда коэффициент диффузии гелия $D = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{8RT}{\pi\mu}}\frac{kT}{\sqrt{2}\pi\sigma^2 p}$; $D = 8{,}25\cdot10^{-5}$ м^2/с.

5.136 Построить график зависимости коэффициента диффузии D водорода от температуры T в интервале $100 \le T \le 600$ К через каждые 100 К при $p = const = 100$ кПа.

Решение



Коэффициент диффузии определяется следующим соотношением $D = \frac{1}{3}\overline{v}\overline{\lambda}$; $D = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{8RT}{\pi\mu}}\frac{kT}{\sqrt{2}\pi\sigma^2 p}$. Подставив числовые данные, получим $D = 2\cdot10^{-10}T^{\frac{3}{2}}$. Характер зависимости коэффициента диффузии D от температуры T дан на графике.

5.137 Найти массу m азота, прошедшего вследствие диффузии через площадку $S = 0{,}01$ м^2 за время $t = 10$ с, если градиент плоскости в направлении, перпендикулярном к площадке, $\Delta\rho/\Delta x = 1{,}26$ кг/м^4. Температура азота $t = 27$ °С. Средняя длина свободного пробега молекул азота $\lambda_{cp} = 10$ мкм.

Решение

По закону Фика $m = -D\frac{\Delta\rho}{\Delta x}\Delta S\Delta t$. Знак минус означает направление вектора градиента плотности, и т. к. масса не может быть отрицательной, то ее следует взять по модулю.

Коэффициент диффузии (см. задачу 5.134) $D = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{8RT}{\pi\mu}}\lambda$.

Масса азота $m = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{8RT}{\pi\mu}}\lambda\frac{\Delta\rho}{\Delta x}\Delta S\Delta t$; $m = 19{,}9$ г.

5.138 При каком давлении p отношение вязкости некоторого газа к коэффициенту его диффузии η/D = 0,3 кг/м^3, а средняя квадратичная скорость его молекул $v_{ср.кв.}$ = 632 м/с?

Решение

Коэффициент диффузии газа и его динамическая вязкость определяются следующим соотношением: $D = \frac{1}{3}\bar{v}\bar{\lambda}$ ($\bar{v}$ — средняя арифметическая скорость, $\bar{\lambda}$ — средняя длина свободного пробега молекул); $\eta = \frac{1}{3}\bar{v}\bar{\lambda}\rho$. Таким образом, $\frac{\eta}{D} = \rho$ — плотность газа. Согласно уравнению Менделеева — Клапейрона $pV = \frac{m}{\mu}RT$ или $p = \frac{\rho RT}{\mu}$. Отсюда $\frac{RT}{\mu} = \frac{p}{\rho}$. Но $\sqrt{\overline{v^2}} = \sqrt{\frac{3RT}{\mu}}$, следовательно, $\frac{p}{\rho} = \frac{\overline{v^2}}{3}$, откуда $p = \frac{\rho \cdot \overline{v^2}}{3}$ или $p = \frac{\eta}{D} \cdot \frac{\overline{v^2}}{3}$; $p = 39{,}9$ кПа.

5.139 Найти среднюю длину свободного пробега $\lambda_{ср}$ молекул гелия при давлении p = 101,3 кПа и температуре t = 0 °С, если вязкость гелия η = 13 мкПа·с.

Решение

Коэффициент вязкости $\eta = \frac{1}{3}\rho\bar{v}\lambda$, где $\bar{v} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi\mu}}$ — средняя арифметическая скорость молекул. Из уравнения Менделеева — Клапейрона $pV = \frac{m}{\mu}RT$ выразим плотность $\rho V = \frac{m}{\mu}RT$. Тогда коэффициент вязкости $\eta = \frac{1}{3}\frac{p\mu}{RT}\sqrt{\frac{8RT}{\pi\mu}}\lambda$. Отсюда средняя длина свободного пробега молекул $\lambda = \frac{3RT}{p\mu}\eta\sqrt{\frac{\pi\mu}{8RT}} = \frac{3}{p}\eta\sqrt{\frac{\pi RT}{8\mu}}$; $\lambda = 182$ нм.

5.140 Найти вязкость η азота при нормальных условиях, если коэффициент диффузии для него $D = 1{,}42\cdot10^{-5}$ м^2/с. Найти диаметр молекулы кислорода, если при температуре вязкость кислорода.

Решение

Коэффициент диффузии газа и его динамическая вязкость определяются следующим соотношением: $D = \frac{1}{3}\bar{v}\bar{\lambda}$ ($\bar{v}$ — средняя арифметическая скорость, $\bar{\lambda}$ — средняя длина свободного пробега молекул); $\eta = \frac{1}{3}\bar{v}\bar{\lambda}\rho$. Таким образом, $\frac{\eta}{D} = \rho$ — плотность газа. Согласно уравнению Менделеева — Клапейрона $pV = \frac{m}{\mu}RT$ или $p = \frac{\rho RT}{\mu}$. Отсюда $\frac{RT}{\mu} = \frac{p}{\rho}$ или $\frac{RT}{\mu} = \frac{pD}{\eta}$, откуда $\eta = \frac{pD\mu}{RT}$; $\eta = 17{,}8$ мкПа·с.

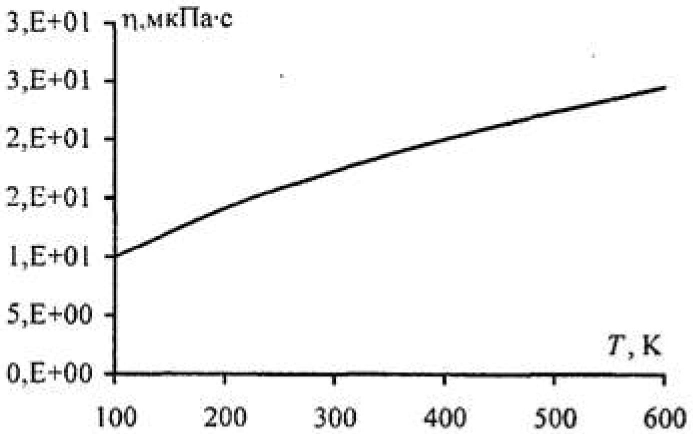
5.141 Найти диаметр σ молекулы кислорода, если при температуре $t = 0$ °С вязкость кислорода $\eta = 18{,}8$ мкПа/с.

Решение

Динамическая вязкость кислорода определяется соотношением $\eta = \frac{1}{3}\bar{v}\bar{\lambda}\rho$ — (1), где $\bar{v} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi\mu}}$ — средняя арифметическая скорость молекул, $\bar{\lambda} = \frac{kT}{\sqrt{2}\pi\sigma^2 p}$ — средняя длина свободного пробега, $\rho = \frac{p\mu}{RT}$ — плотность газа. Подставляя эти выражения в (1), получим $\eta = \frac{2k}{3\pi\sigma^2}\sqrt{\frac{\mu T}{R\pi}}$, откуда $\sigma = \sqrt{\frac{2k}{3\pi\eta}\sqrt{\frac{\mu T}{R\pi}}}$; $\sigma = 0{,}3$ нм.

5.142 Построить график зависимости вязкости η азота от температуры T в интервале $100 \le T \le 600$ К через каждые 100 К.

Решение



Динамическая вязкость азота определяется соотношением $\eta = \frac{1}{3}\bar{v}\bar{\lambda}\rho$ — (1), где $\bar{v} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi\mu}}$ — средняя арифметическая скорость молекул, $\bar{\lambda} = \frac{kT}{\sqrt{2}\pi\sigma^2 p}$ — средняя длина свободного пробега, $\rho = \frac{p\mu}{RT}$ — плотность газа. Подставляя эти выражения в (1), получим $\eta = \frac{2k}{3\pi\sigma^2}\sqrt{\frac{\mu T}{R\pi}}$. Величина $\frac{2k}{3\pi\sigma^2}\sqrt{\frac{\mu}{R\pi}} = const \approx 10^{-6}$, тогда $\eta = 10^{-6}\sqrt{T}$. Характер зависимости вязкости η от температуры T дан на графике.

5.143 Найти коэффициент диффузии D и вязкость η воздуха при давлении $p = 101{,}3$ кПа и температуре $t = 10$ °С. Диаметр молекул воздуха $\sigma = 0{,}3$ нм.

Решение

Коэффициент диффузии (см. задачи 5.134 и 5.135) $D = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{8RT}{\pi\mu}}\frac{T}{\sqrt{2}\pi\sigma^2 p}$; $D = 1{,}45 \cdot 10^{-5}$ м²/с. Кроме того, коэффициент диффузии $D = \frac{1}{3}\bar{v}\lambda$, а коэффициент вязкости $\eta = \frac{1}{3\rho}\bar{v}\lambda$. Таким образом, $\eta = pD$, где плотность ρ можно выразить из уравнения Менделеева — Клапейрона $pV = \frac{m}{\mu}RT$, отсюда $\rho = \frac{m}{V} = \frac{p\mu}{RT}$. Тогда $\eta = \frac{p\mu}{RT}D$; $\eta = 18{,}2$ мкПа·с.

5.144 Во сколько раз вязкость кислорода больше вязкости азота? Температуры газов одинаковы.

Решение

Коэффициент вязкости (см. задачу 5.139) $\eta = \frac{1}{3}\frac{p\mu}{RT}\times \times\sqrt{\frac{8RT}{\pi\mu}}\lambda$. Средняя длина свободного пробега молекул $\overline{\lambda} = \frac{1}{\sqrt{2}\pi\sigma^2 n}$. Тогда $\eta = \frac{1}{3}\frac{p\mu}{RT}\sqrt{\frac{8RT}{\pi\mu}}\frac{1}{\sqrt{2}\pi\sigma^2 n}$. Т. к. температура газов одинакова, то $\frac{\eta_1}{\eta_2} = \sqrt{\frac{\mu_1}{\mu_2}}\left(\frac{\sigma_2}{\sigma_1}\right)^2$; $\frac{\eta_1}{\eta_2} = 1{,}07$.

5.145 Коэффициент диффузии и вязкость водорода при некоторых условиях равны $D = 1{,}42\cdot10^{-4}$ м^2/с и η = 8,5 мкПа·с. Найти число n молекул водорода в единице объема.

Решение

Коэффициенты вязкости и диффузии связаны соотношением $\eta = \rho D$ (см. задачу 5.143). Отсюда плотность $\rho = \frac{\eta}{D}$. Число частиц в единице объема $n = \frac{\rho}{\mu}N_A = \frac{\eta N_A}{\mu D}$; $n = 1{,}8\cdot10^{25}$ м$^{-3}$.

5.146 Коэффициент диффузии и вязкость кислорода при некоторых условиях равны $D = 1{,}22\cdot10^{-5}$ м^2/с и η = 19,5 мкПа·с. Найти плотность ρ кислорода, среднюю длину свободного пробега $\lambda_{ср}$ и среднюю арифметическую скорость $v_{ср}$ его молекул.

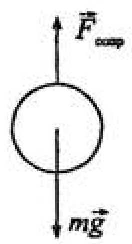
Решение

Коэффициент диффузии газа и его динамическая вязкость определяются следующим соотношением: $D = \frac{1}{3}\overline{v}\overline{\lambda}$ ($\overline{v}$ — средняя арифметическая скорость, $\overline{\lambda}$ — средняя длина свободного пробега молекул); $\eta = \frac{1}{3}\overline{v}\overline{\lambda}\rho$. Таким образом $\frac{\eta}{D} = \rho$ — плотность газа $\rho = 1{,}6$ кг/м^3. Средняя арифметическая скорость $\overline{v} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi\mu}}$ — (2); согласно уравнению Менделеева — Клапейрона $pV = \frac{m}{\mu}RT$ или, после несложных преобразований, $\frac{RT}{\mu} = \frac{p}{\rho}$, но из (2) $\frac{RT}{\mu} = \frac{\overline{v}^2\pi}{8}$, следовательно, $\frac{p}{\rho} = \frac{\overline{v}^2\pi}{8}$, откуда $p = \frac{\rho\overline{v}^2\pi}{8}$. Средняя длина свободного пробега молекул $\overline{\lambda} = \frac{1}{\sqrt{2}\sigma^2\pi n}$, где $n = \frac{p}{kT} = \frac{\rho\overline{v}^2\pi}{8kT} = \frac{\rho R}{k\mu}$, отсюда $\lambda = \frac{k\mu}{\sqrt{2}\sigma^2\pi\rho R}$; $\lambda = 83{,}5$ нм.

Из уравнения (1) $\overline{v} = \frac{3D}{\lambda}$; $\overline{v} = 440$ м/с.

5.147 Какой наибольшей скорости v может достичь дождевая капля диаметром D = 0,3 мм? Диаметр молекул воздуха σ = 0,3 нм. Температура воздуха t = 0 °С. Считать, что для дождевой капли справедлив закон Стокса.

Решение



На каплю действует сила тяжести и сила сопротивления воздуха. По второму закону Ньютона $m\vec{g} + \vec{F}_{сопр} = m\vec{a}$. Когда капля достигнет максимальной скорости ускорение a станет равным нулю, тогда $mg = F_{сопр}$. По закону Стокса $F_{сопр} = 6\pi\eta r v_{max}$. Каплю считаем шаром, поэтому ее объем $V = \frac{4}{3}\pi r^3$, а масса $m = \rho V = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho$. Тогда имеем $\frac{4}{3}\pi r^3 \rho g = 6\pi\eta r v$. Отсюда $v = \frac{4r^2\rho g}{18\eta} = \frac{2(D/2)^2\rho g}{9\eta} = \frac{D^2\rho g}{18\eta}$. Коэффициент вязкости (см. задачу 5.139) $\eta = \frac{1}{3}\frac{p\mu}{RT}\sqrt{\frac{8RT}{\pi\mu}}\lambda$, где $\lambda = \frac{kT}{\sqrt{2}\pi\sigma^2 p}$. Тогда, искомая, максимальная скорость дождевой капли $v = \frac{D^2\rho g}{18}\frac{3RT\sqrt{2}\pi\sigma^2 p}{p\mu kT}\sqrt{\frac{\pi\mu}{8RT}} = \frac{\sqrt{2}D^2\rho g N_A\pi\sigma^2}{6\mu}\sqrt{\frac{\pi\mu}{8RT}}$; $v = 2{,}73$ м/с.

5.148 Самолет летит со скоростью v = 360 км/ч. Считая, что слой воздуха у крыла самолета, увлекаемый вследствие вязкости, d = 4 см, найти касательную силу F_S, действующую на единицу поверхности крыла. Диаметр молекул σ = 0,3 нм. Температура воздуха t = 0 °С.

Решение

По закону Ньютона $F_{тр} = -\eta\frac{\Delta v}{\Delta x}\Delta S$. Знак минуса означает направление градиента скорости, поэтому нас интересует модуль силы. Сила на единицу площади $F_S = \frac{F_{тр}}{\Delta S} = \eta\frac{\Delta v}{\Delta x}$. В нашем случае $\Delta v = v$ и $\Delta x = d$. Коэффициент вязкости (см. задачи 5.139 и 5.147). $\eta = \frac{1}{3}\frac{p\mu}{RT}\sqrt{\frac{8RT}{\mu\pi}}\frac{kT}{\sqrt{2}\pi\sigma^2 p} = \frac{\mu}{3\sqrt{2}N_A\pi\sigma^2}\sqrt{\frac{8RT}{\pi\mu}}$. Отсюда $F_S = \frac{\mu}{3\sqrt{2}N_A\pi\sigma^2}\sqrt{\frac{8RT}{\pi\mu}}\frac{v}{d}$; $F_S = 44{,}77$ мН/м^2.

5.149 Пространство между двумя коаксиальными цилиндрами заполнено газом. Радиусы цилиндров равны r = 5 см и R = 5,2 см. Высота внутреннего цилиндра h = 25 см. Внешний цилиндр вращается с частотой n = 360 об/мин. Для того чтобы внутренней цилиндр оставался неподвижным, к нему надо приложить касательную силу F = 1,38 мН. Рассматривая в первом приближении случай как плоский, найти из данных этого опыта вязкость η газа, находящегося между цилиндрами.

Решение

По закону Ньютона для вязкости $F_{тр} = -\eta \frac{\Delta v}{\Delta x} \Delta S$. Пространство между цилиндрами $\Delta x = R - r$. Линейная скорость вращения внешнего цилиндра $\Delta v = Ln$, где $L = 2\pi R$ — длина окружности внешнего цилиндра. Тогда $\Delta v = 2\pi Rn$. Площадь боковой поверхности внутреннего цилиндра $\Delta S = 2\pi rh$. По третьему закону Ньютона, касательная сила

$F = -F_{тр} = \eta \frac{\Delta v}{\Delta x} \Delta S$. Следовательно, $F = \eta \frac{2\pi Rn}{R - r} 2\pi rh = \eta \frac{4\pi^2 Rrnh}{R - r}$. Отсюда $\eta = \frac{F(R - r)}{4\pi^2 Rrnh}$; $\eta = 17{,}92$ мкПа·с.

5.150 Найти теплопроводность к водорода, вязкость которого η = 8,6 мкПа·с.

Решение

Коэффициент теплопроводности $K = \frac{1}{3} c_V \rho \bar{v}_{ср} \lambda$, а коэффициент вязкости $\eta = \frac{1}{3} \rho \bar{v}_{ср} \lambda$. Отсюда следует, что коэффициенты теплопроводности и вязкости связаны соотношением $K = c_V \eta$. Теплоемкость при постоянном объеме $c_V = \frac{i}{2} \frac{R}{\mu}$, где $i = 5$, т. к. водород — двухатомный газ. Тогда $c_V = \frac{5}{2} \frac{R}{\mu}$, поэтому $K = \frac{5}{2} \frac{R}{\mu} \eta$; $K = 89{,}33$ мВт/(м·К).

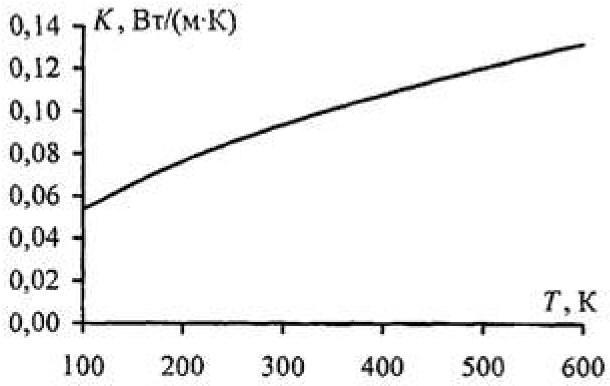
5.151 Найти теплопроводность K воздуха при давлении p = 100 кПа и температуре t = 10 °С. Диаметр молекул воздуха σ = 0,3 нм.

Решение

Коэффициент теплопроводности $K = \frac{1}{3} c_V \rho \bar{v}_{ср} \lambda$. Средняя длина свободного пробега молекул $\lambda = \frac{kT}{\sqrt{2}\pi\sigma^2 p}$. Средняя арифметическая скорость $\bar{v}_{ср} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi\mu}}$. Из уравнения Менделеева — Клапейрона $pV = \frac{m}{\mu} RT$, плотность $\rho = m / V = \frac{p\mu}{RT}$. Теплоемкость при постоянном объеме $c_V = \frac{i}{2} \frac{R}{\mu}$, где для воздуха $i = 5$. Тогда коэффициент теплопроводности $K = \frac{1}{3} \frac{i}{2} \frac{R}{\mu} \frac{p\mu}{RT} \sqrt{\frac{8RT}{\pi\mu}} \frac{kT}{\sqrt{2}\pi\sigma^2 p}$; $K = \frac{ik}{6\sqrt{2}\pi\sigma^2} \times \sqrt{8RT / \pi\mu}$; $K = 13{,}1$ мВт/(м·К).

5.152 Построить график зависимости теплопроводности K от температуры T в интервале $100 \le T \le 600$ К через каждые 100 К.

Решение



Имеем $K = \frac{1}{3}\bar{v}\bar{\lambda}c_V\rho$ — (1), где $\bar{v} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi\mu}}$ — (2); $\bar{\lambda} = \frac{RT}{\sqrt{2}\pi\sigma^2 p}$ — (3); $\rho = \frac{p\mu}{RT}$ — (4). Удельная теплоемкость водорода $c_V = 10400$ Дж/кг·К. Подставляя уравнения (2) — (4) в (1), получим $K = \frac{2kc_V}{3\sigma^2}\sqrt{\frac{\mu}{R\pi^3}}\cdot\sqrt{T}$ или $K = 5{,}4\cdot10^{-3}\sqrt{T}$. Характер зависимости теплопроводности K от температуры T дан на графике.

5.153 В сосуде объемом $V = 2$ л находится $N = 4\cdot10^{22}$ молекул двухатомного газа. Теплопроводность газа $K = 14$ мВт/(м·К). Найти коэффициент диффузии D газа.

Решение

Коэффициент теплопроводности $K = c_V\rho\bar{v}\lambda/3$, а коэффициент диффузии $D = \bar{v}\lambda/3$, следовательно, коэффициенты теплопроводности и диффузии связаны соотношением $K = c_V\rho D$. Теплоемкость при постоянном объеме $c_V = \frac{i}{2}\frac{R}{\mu}$, где $i = 5$, т. к. газ двухатомный. Число частиц в единице объема $n = \frac{\rho}{\mu}N_A$, а в объеме V $N = nV = \frac{\rho V N_A}{\mu}$, отсюда $\rho = \frac{\mu N}{VN_A}$. Тогда $K = \frac{5}{2}\frac{R}{\mu}\frac{\mu N}{VN_A}$; $D = \frac{5kND}{2V}$, откуда $D = \frac{2VK}{5kN}$; $D = 2{,}02\cdot10^{-5}$ м²/с.

5.154 Углекислый газ и азот находится при одинаковых температурах и давлениях. Найти для этих газов отношение: а) коэффициентов диффузии; б)вязкостей; в) теплопроводностей. Диаметры молекул газов считать одинаковыми.

Решение

а) Коэффициент диффузии (см. задачу 5.135) $D = \frac{1}{3} \times \sqrt{\frac{8RT}{\pi\mu}} \frac{rT}{\sqrt{2}\pi\sigma^2 p}$. Т. к. $\sigma_1 = \sigma_2$, то $\frac{D_1}{D_2} = \sqrt{\frac{\mu_2}{\mu_1}}$; $\frac{D_1}{D_2} = 0{,}8$.

б) Коэффициент вязкости (см. задачу 5.148) $\eta = \frac{\mu}{3\sqrt{2}N_A\pi\sigma^2}\sqrt{\frac{8RT}{\pi\mu}}$. Тогда $\frac{\eta_1}{\eta_2} = \sqrt{\frac{\mu_1}{\mu_2}}$; $\frac{\eta_1}{\eta_2} = 1{,}25$.

в) Коэффициент теплопроводности (см. задачу 5.151) $K = \frac{ik}{6\sqrt{2}\pi\sigma^2}\sqrt{\frac{8RT}{\pi\mu}}$, тогда $\frac{K_1}{K_2} = \frac{i_1}{i_2}\sqrt{\frac{\mu_2}{\mu_1}}$; $\frac{K_1}{K_2} = 0{,}96$.

5.155 Расстояние между стенками дьюаровского сосуда d = 8 мм. При каком давлении p теплопроводность воздуха, находящегося между стенками сосуда, начнет уменьшатся при откачке? Температура воздуха t = 17 °С. Диаметр молекул воздуха σ = 0,3 нм.

Решение

Теплопроводность воздуха между стенками сосуда начинает уменьшаться, когда средняя длина свободного пробега молекул станет равной расстоянию между стенками сосуда, т. е. $\lambda = d$. Т. к. $\lambda = \frac{kT}{\sqrt{2}\pi\sigma^2 p}$ (см. задачу 5.120), отсюда $p = \frac{kT}{\sqrt{2}\pi\sigma^2 d}$; $p = 1{,}25$ Па.

5.156 Цилиндрический термос с внутренним радиусом $r_1 = 9$ см и внешним радиусом $r_2 = 10$ см наполнен льдом. Высота термоса $h = 20$ см. Температура льда $t_1 = 0$ °С, температура наружного воздуха $t_2 = 20$ °С. При каком предельном давлении p воздуха между стенками термоса теплопроводность K еще будет зависеть от давления? Диаметр молекул воздуха $\sigma = 0{,}3$ нм, а температуру воздуха между стенками термоса считать равной среднему арифметическому температур льда и наружного воздуха. Найти теплопроводность K воздуха, заключенного между стенками термоса, при давлениях $p_1 = 101{,}3$ кПа и $p_2 = 13{,}3$ мПа, если молярная масса воздуха $\mu = 0{,}029$ кг/моль. Какое количество теплоты Q проходит за время $\Delta t = 1$ мин через боковую поверхность термоса средним радиусом $r = 9{,}5$ см при давлениях $p_1 = 101{,}3$ кПа и $p_2 = 13{,}3$ мПа?

Решение

Теплопроводность начнет зависеть от давления при средней длине свободного пробега молекул $\bar{\lambda} = d$, где d — расстояние между стенками термоса. Т. к. $\bar{\lambda} = \frac{kT}{\sqrt{2}\pi\sigma^2 p}$, то при $\bar{\lambda} = d$ получим $p = \frac{kT}{\sqrt{2}\pi s^2 d} = 980$ мПа. При $p_1 = 101{,}3$ кПа коэффициент теплопроводности (см. задачу 5.151) $K_1 = \frac{ik}{6\sqrt{2}\pi\sigma^2}\sqrt{\frac{8RT}{\pi\mu}} = 13{,}1$ мВт/(м·К). При $p_2 = 13{,}3$ мПа средняя длина свободного пробега $\bar{\lambda}$ больше расстояния d между стенками термоса. Тогда $K = \frac{1}{3}d\bar{v}\rho c_V = \frac{1}{3}(r_2 - r_1)\sqrt{\frac{8RT}{\pi\mu}}\frac{p\mu}{RT}\frac{iR}{2\mu} = \frac{1}{6}(r_2 - r_1)pi\sqrt{\frac{8R}{\pi\mu T}}$.
Подставляя числовые данные, получим $K_2 = 178$ мВт/(м·К).
Количество теплоты $Q = K\frac{\Delta T}{\Delta x}\Delta S \cdot \Delta t$. Но $\Delta S = 2\pi rh = 2\pi h\frac{r_1 + r_2}{2} = \pi h(r_1 + r_2)$. Тогда $Q = K\frac{\Delta T}{\Delta x}\pi h(r_1 + r_2)\cdot \Delta t$.
Подставляя числовые данные, получим $Q_1 = 188$ Дж; $Q_2 = 2{,}55$ Дж.

5.157 Какое количество теплоты Q теряет помещение за время t = 1 час через окно за счет теплопроводности воздуха, заключенного между рамами? Площадь каждой рамы S = 4 м^2, расстояние между ними d = 30 см. Температура помещения t_1 = 18 °С , температура наружного воздуха t_2 = -20 °С. Диаметр молекул воздуха σ = 0,3 нм. Температуру воздуха между рамами считать равной среднему арифметическому температур помещения и наружного воздуха. Давление p = 101,3 кПа.

Решение

Количество теплоты, перенесенное за время t вследствие теплопроводности, определяется формулой $Q = K\frac{\Delta T}{\Delta x}S \cdot t$. Воспользуемся уравнением из задачи 5.152, выражающим зависимость теплопроводности K от температуры T: $K = \frac{2Kc_v}{3\sigma^2}\sqrt{\frac{\mu T}{\pi^2 R}}$. Здесь T — температура воздуха между рамами, $T = \frac{T_1 + T_2}{2} = 272$ К; удельная теплоемкость воздуха $c_V = 717$ Дж/кг·К; молярная масса воздуха $\mu = 0{,}029$. Подставив числовые данные, найдем $K = 12{,}9 \cdot 10^{-3}$ Вт/м·К. Учитывая, что $\Delta x = d$, имеем $Q = K\frac{T_2 - T_1}{d}S \cdot t$; $Q = 24$ кДж.

5.158 Между двумя пластинами, находящимися на расстоянии d = 1 мм друг от друга, находится воздух. Между пластинами поддерживается разность температур ΔT = 1 К. Площадь каждой пластины S = 0,01 м^2. Какое количество теплоты Q передается за счет теплопроводности от одной пластины к другой за время t = 10 мин? Считать, что воздух находится при нормальных условиях. Диаметр молекул воздуха σ = 0,3 нм.

Решение

Количество теплоты, перенесенное за время t вследствие теплопроводности, определяется формулой $Q = K\frac{\Delta T}{\Delta x}S \cdot t$. Воспользуемся уравнением из задачи 5.152, выражающим зависимость теплопроводности K от температуры T: $K = \frac{2Kc_V}{3\sigma^2}\sqrt{\frac{\mu T}{\pi^2 R}}$. Здесь $T = 273$ К. Удельная теплоемкость воздуха $c_V = 717$ Дж/кг·К; молярная масса воздуха $\mu = 0{,}029$. Подставив числовые данные, найдем $K = 13 \cdot 10^{-3}$ Вт/м·К. Учитывая, что $\Delta x = d$, имеем $Q = K\frac{\Delta T}{d}S \cdot t$; $Q = 24$ кДж.

5.159 Масса m = 10 г кислорода находится при давлении p = 300 кПа и температуре t = 10 °С. После нагревания при $p = const$ газ занял объем V = 10 л. Найти количество теплоты Q, полученное газом, изменение ΔW внутренний энергии газа и работу А , совершению газом при расширении.

Решение

Количество теплоты, полученное газом определяется следующим соотношением: $Q = \frac{m}{\mu} C_p \Delta T$ — (1). Молярная теплоемкость кислорода при $p = const$ $C_p = 29{,}1$ Дж/моль·К. Запишем уравнения состояния газа до и после нагревания. $pV_1 = \frac{m}{\mu} RT_1$ — (2); $pV_2 = \frac{m}{\mu} RT_2$ — (3). Вычитая из уравнения (3) уравнение (2), получим $p(V_2 - V_1) = \frac{m}{\mu} R\Delta T$ — (4). Из (2) $V_1 = \frac{mRT_1}{\mu p}$ — (5). Выразим из (4) ΔT с учетом (5): $\Delta T = \frac{\mu p\left(V_2 - \frac{mRT_1}{\mu p}\right)}{mR} = \frac{\mu pV_2 - mRT_1}{mR}$ — (6). Тогда уравнение (1) можно записать в виде $Q = C_p \frac{(\mu pV_2 - mRT_1)}{\mu R}$; $Q = 7{,}92$ кДж. Изменение внутренней энергии кислорода $\Delta W = \frac{5}{2}\frac{m}{\mu} R\Delta T$ или, подставляя (6), $\Delta W = \frac{5}{2}\frac{1}{\mu} \times (\mu pV_2 - mRT_1)$; $\Delta W = 5{,}66$ кДж. Работа, совершаемая при изменении объема газа $A = p\int_{V_1}^{V_2} dV = p(V_2 - V_1)$ или, с учетом (5), $A = p\left(V_2 - \frac{mRT_1}{\mu p}\right)$; $A = 2{,}26$ кДж.

5.160 Масса m = 6,5 г водорода, находящегося при температуре t = 27 °С, расширяется вдвое при p = $const$ за счет притока тепла извне. Найти работу А расширения газа, изменение ΔW внутренний энергии газа и количество теплоты Q, сообщенное газу.

Решение

Работа расширения газа $A = p\int\limits_{V}^{2V} dV = p(2V - V) = pV$. Согласно уравнению Менделеева — Клапейрона $pV = \frac{m}{\mu}RT$ работа $A = \frac{m}{\mu}RT$; $A = 8{,}1$ Дж. Изменение внутренней энергии $\Delta W = \frac{i}{2}\frac{m}{\mu}RT$, где $i = 5$. Т. к. $p = const$, то $\frac{V_1}{T_1} = \frac{V_2}{T_2}$, следовательно, $\frac{V_2}{V_1} = \frac{T_2}{T_1} = 2$. Отсюда $T_2 = 2T_1$ и $\Delta T = T_2 - T_1 = 2T_1 - T_1 = T_1 = t + 273^o$. Тогда $\Delta W = \frac{5}{2}\frac{m}{\mu}RT_1$; $\Delta W = 20{,}25$ кДж. Согласно первому началу термодинамики $Q = \Delta W + A$; $Q = 28{,}35$ кДж.

5.161 В закрытом сосуде находится масса m_1 = 20 г азота и масса m_2 = 32 г кислорода. Найти изменение ΔW внутренней энергии смеси газов при охлаждении ее на ΔT = 28 К.

Решение

Изменение внутренней энергии газа $\Delta W = \frac{m}{\mu}\frac{i}{2}R\Delta T$. Для двухатомных газов количество степеней свободы $i = 5$, следовательно, для смеси кислорода и азота имеем; $\Delta W = \frac{5}{2}R\Delta T\left(\frac{m_1}{\mu_1} + \frac{m_2}{\mu_2}\right)$; $\Delta W = 1$ кДж.

5.162 Количество ν = 2 кмоль углекислого газа нагреваетсяври постоянном давлении на ΔT = 50 К. Найти изменение ΔW внутренней энергии газа, работу А расширения газа и количество теплоты Q, сообщенное газу.

Решение

Изменение внутренней энергии газа $\Delta W = \frac{m}{\mu}\frac{i}{2}R\Delta T$. В условиях данной задачи $\Delta W = \nu 3R\Delta T$; $\Delta W = 2{,}5$ МДж. Работа, совершаемая при расширении газа, $A = p\Delta V$. Согласно уравнению Менделеева — Клапейрона $p\Delta V = \frac{m}{\mu}R\Delta T$, следовательно, $\Delta V = \frac{mR\Delta T}{\mu p}$, тогда $A = \frac{mR\Delta T}{\mu} = \nu R\Delta T$; $A = 0{,}83$ МДж. Количество теплоты, сообщенное газу, $Q = \nu \cdot C_p\Delta T$. Молярная теплоемкость углекислого газа $C_p = 33{,}2$ Дж/моль·К. $Q = 3{,}32$ МДж.

5.163 Двухатомному газу сообщено количество теплоты Q = 2,093 кДж. Газ расширяется при $p = const$. Найти работу A расширения газа.

Решение

Т. к. по условию давление постоянно, то количество тепла, сообщенное газу $Q = c_p m\Delta T$, где $c_p = \frac{i+2}{2}\frac{R}{\mu}$ и $i = 5$, т. к. газ двухатомный. Тогда $c_p = \frac{7}{2}\frac{R}{\mu}$ и $Q = \frac{7}{2}\frac{m}{\mu}R\Delta T$. Изменение внутренней энергии $\Delta W = \frac{5}{2}\frac{m}{\mu}R\Delta T$. Из первого закона термодинамики следует, что $A = Q - \Delta W = \frac{7}{2}\frac{m}{\mu}R\Delta T - \frac{5}{2}\frac{m}{\mu}R\Delta T = \frac{m}{\mu}R\Delta T$. Т. к. $Q = \frac{7}{2}\frac{m}{\mu}R\Delta T$, то $\frac{m}{\mu}R\Delta T = \frac{2Q}{7}$, следовательно, работа расширения газа $A = \frac{2Q}{7}$; $A = 598$ Дж.

5.164 При изобарическом расширении двухатомного газа была совершена работа A = 156,8 Дж. Какое количество теплоты Q было сообщено газу?

Решение

Количество теплоты, сообщенное газу, $dQ = C_p dT$, откуда $Q = C_p\int_{T_1}^{T_2} dT$; $Q = C_p(T_1 - T_2)$ — (1). Работа, совершаемая при расширении газа, $dA = pdV$; $A = p\int_{V_1}^{V_2} dV$; $A = p \times (V_2 - V_1)$. Из уравнения Менделеева — Клапейрона $p\Delta v = \nu R\Delta T$, тогда $A = \nu R(T_2 - T_1)$ — (2). Решая совместно (1) и (2), получим $Q = C_p\frac{A}{\nu R}$, где $C_p = \nu\frac{7}{2}R$. Отсюда $Q = \frac{7}{2}A$; $Q = 550$ Дж.

5.165 В сосуде объемом V = 5 л находится газ при давлении p = 200 кПа и температуре.

Решение

Воспользуемся уравнением (2) из предыдущей задачи. $A = \nu R\Delta T$, откуда $\Delta T = \frac{A}{\nu R}$. Согласно уравнению Менделеева — Клапейрона $pV = \nu RT$, откуда $\nu = pV / RT$. Тогда $\Delta T = \frac{AT}{pV}$; $\Delta T = 57$ К.

5.166 Масса m = 7 г углекислого газа была нагрета на ΔT = 10 К в условиях свободного расширения. Найти работу A расширения газа и изменение ΔW его внутренней энергии.

Решение

Работа по расширению газа $A = \nu R\Delta T = \frac{m}{\mu}R\Delta T$ (см. уравнение (2) из задачи 2.164), $A = 13{,}2$ Дж. Изменение внутренней энергии газа $\Delta W = \frac{m}{\mu}\frac{i}{2}R\Delta T$, для CO_2 — $i = 6$, тогда $\Delta W = 3\cdot\left(\frac{m}{\mu}R\Delta T\right)$, т. е. $\Delta W = 3A$; $\Delta W = 39{,}6$ Дж.

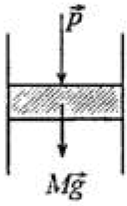
5.167 Количество ν = 1 кмоль многоатомного газа нагревается на ΔT = 100 К в условиях свободного расширения. Найти количество теплоты Q, сообщенное газу, изменение ΔW его внутренней энергии и работу A расширения газа.

Решение

Работа расширения газа (см. задачу 5.160) $A = \frac{m}{\mu}R\Delta T = \nu R\Delta T$; $A = 831$ кДж. Изменение внутренней энергии $\Delta W = \frac{i}{2}\frac{m}{\mu}R\Delta T$, где $i = 6$, т. к. газ многоатомный, тогда $\Delta W = 3\nu R\Delta T$; $\Delta W = 2{,}49$ МДж. Согласно первому закону термодинамики $Q = \Delta W + A$; $Q = 3{,}32$ МДж.

5.168 В сосуде под поршнем находится масса m = 1 г азота. Какое количество теплоты Q надо затратить, чтобы нагреть азот на ΔT = 10 К? На сколько при этом поднимется поршень? Масса поршня M = 1 кг, площадь его поперечного сечения S = 10 см^2. Давление над поршнем p = 100 кПа.

Решение



Согласно первому закону термодинамики $Q = \Delta W + A$. Изменение внутренней энергии газа $\Delta W = \frac{i}{2}\frac{m}{\mu}R\Delta T$, где количество степеней свободы $i = 5$, поскольку азот двухатомный газ. Работа газа по подъему поршня (см. задачу 5.160) $A = \frac{m}{\mu}R\Delta T$. Тогда количество теплоты необходимое для нагрева азота $Q = \frac{5}{2}\frac{m}{\mu}R\Delta T + \frac{m}{\mu}R\Delta T = \frac{7}{2}\frac{m}{\mu}R\Delta T$; $Q = 10{,}39$ Дж. При расширении газ совершает работу против сил тяжести и против сил атмосферного давления. Тогда $A = (Mg + pS)\Delta h$, но т. к. $A = \frac{m}{\mu}R\Delta T$, то $(Mg + pS)\Delta h = \frac{m}{\mu}R\Delta T$. Отсюда найдем $\Delta h = \frac{mR\Delta T}{\mu(Mg + pS)}$; $\Delta h = 2{,}7$ см.

5.169 В сосуде под поршнем находится гремучий газ. Какое количество теплоты Q выделяется при взрыве гремучего газа, если известно, что внутренняя энергия газа изменилась при этом на ΔW = 336 Дж и поршень поднялся на высоту Δh = 20 см? Масса поршня М = 2 кг, площадь его поперечного сечения S = 10 см^2. Над поршнем находится воздух при нормальных условиях.

Решение

Работа гремучего газа по подъему поршня (см. задачу 5.168) $A = (Mg + pS)\Delta h$. Согласно первому закону термодинамики $Q = A + \Delta W = (Mg + pS)\Delta h + \Delta W$; $Q = 360{,}12$ Дж.

5.170 Масса m = 10,5 г азота изотермически расширяется при температуре t = -23 °С, причем его давление изменится от p_1 = 250 кПа до p_2 = 100 кПа. Найти работу А, совершенную газом при расширении.

Решение

Работа, совершаемая при изотермическом изменении объема газа, $A = RT\frac{m}{\mu}ln\frac{V_2}{V_1}$, где $T = 250$ К. Из закона Бойля — Мариотта $p_1V_1 = p_2V_2$ следует, что $\frac{V_2}{V_1} = \frac{p_1}{p_2}$, поэтому работа $A = RT\frac{m}{\mu}ln\frac{p_1}{p_2}$; $A = 713{,}85$ Дж.

5.171 При изотермическом расширении массы $m = 10$ г азота, находящегося при температуре $t = 17$ °С, была совершена работа $A = 860$ Дж. Во сколько раз изменилось давление азота при расширении?

Решение

Работа, совершаемая при изотермическом расширении (см. задачу 5.170), $A = RT\frac{m}{\mu}ln\frac{p_1}{p_2}$. Отсюда $ln\frac{p_1}{p_2} = \frac{A\mu}{RTm}$, тогда $\frac{p_1}{p_2} = exp\left(\frac{A\mu}{RTm}\right)$; $\frac{p_1}{p_2} = 2,72$.

5.172 Работа изотермического расширения массы $m = 10$ г некоторого газа от объема V_1, до $V_2 = 2V_l$ оказалась равной $A = 575$ Дж. Найти среднюю квадратичную скорость $v_{ср.кв.}$ молекул газа при этой температуре.

Решение

Работа по расширению газа $dA = pdV$, откуда $A = \int_{V_1}^{V_2} pdV$. Согласно уравнению Менделеева — Клапейрона $pV = \frac{m}{\mu}RT$, следовательно, $p = \frac{mRT}{\mu V}$. Тогда работа $A = \int_{V_1}^{V_2}\frac{m}{\mu}RT\frac{dV}{V} = \frac{m}{\mu}RT\,ln\frac{V_2}{V_1}$. Откуда выразим температуру $T = \frac{A\mu}{mR\cdot ln\frac{V_2}{V_1}} = \frac{A\mu}{mR\,ln2}$ — (1). Средняя квадратичная скорость молекул $\sqrt{\overline{v^2}} = \sqrt{\frac{3RT}{\mu}}$. Из (1) $\frac{RT}{\mu} = \frac{A}{m\,ln2}$, тогда $\sqrt{\overline{v^2}} = \sqrt{\frac{3A}{m\,ln2}}$; $\sqrt{\overline{v^2}} = 500$ м/с.

5.173 Гелий, находящийся при нормальных условиях, изотермически расширяется от объема $V_1 = 1$ л до $V_2 = 2$ л. Найти работу A, совершенную газом при расширении, и количество теплоты Q, сообщенное газу.

Решение

Работа, совершаемая при изотермическом изменении объема газа, $A = RT\frac{m}{\mu}ln\frac{V_2}{V_1}$. Из уравнения Менделеева — Клапейрона $pV_1 = \frac{m}{\mu}RT$, тогда работа $A = pV_1\,ln\frac{V_2}{V_1}$; $A = 70$ Дж. согласно первому закону термодинамики $Q = \Delta W + A$, но т. к. $T = const$, то изменение внутренней энергии $\Delta W = 0$, поэтому здесь $Q = A$; $Q = 70$ Дж.

5.174 При изобарическом расширении газа, занимавшего объем $V = 2$ м^3, давление его меняется от $p_1 = 0{,}5$ МПа до $p_2 = 0{,}4$ МПа. Найти работу A, совершенную при этом.

Решение

Работа, совершаемая при изотермическом расширении газа, $A = \nu RT\, ln\frac{V_2}{V_1}$ (см. задачу 5.172). Согласно уравнению Менделеева — Клапейрона $p_1V_1 = \nu RT$; $p_2V_2 = \nu RT$, откуда $T = \frac{p_1V_1}{\nu R}$; $V_2 = \frac{\nu RT}{p_2}$. Тогда $A = \nu R\frac{p_1V_1}{\nu R}\, ln\frac{\nu Rp_1V_1}{V_1p_2\nu R}$;

$A = p_1V_1\, ln\frac{p_1}{p_2}$; $A = 223$ кДж.

5.175 До какой температуры t_2 охладится воздух, находящийся при $t_1 = 0$ °C, если он расширяется адиабатически от объема V_1 до $V_2 = 2V_1$.

Решение

Воздух в первом приближении можно считать азотом, т.е. число степеней свободы $i = 5$. Показатель адиабаты $\gamma = \frac{c_p}{c_V}$, где $c_p = \frac{i+2}{2}\frac{R}{\mu}$ и $c_V = \frac{i}{2}\frac{R}{\mu}$, тогда $\gamma = \frac{i+2}{2}$;

$\gamma = 1{,}4$. Из уравнения Пуассона $\frac{T_1}{T_2} = \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{\gamma-1}$. Т. к. по условию $V_2 = 2V_1$, то $\frac{T_1}{T_2} = \left(\frac{2V_1}{V_1}\right)^{\gamma-1} = 2^{0.4}$. Отсюда $T = 206.89$ К.

5.176 Объем $V_1 = 7{,}5$ л кислорода адиабатически сжимается до объема $V_2 = 1$ л, причем в конце сжатия установилось давление $p_2 = 1{,}6$ МПа. Под каким давлением p_1 находится газ до сжатия?

Решение

Согласно уравнению Пуассона $pV^\gamma = const$, где показатель адиабаты $\gamma = \frac{C_p}{C_V}$, для кислорода $\gamma = 1{,}4$;

$p_1V_1^\gamma = p_2V_2^\gamma$, откуда $p_1 = p_2\left(\frac{V_2}{V_1}\right)^\gamma$; $p_1 = 95$ кПа.

5.177 При адиабатическом сжатии воздуха в цилиндрах двигателя внутреннего сгорания давление изменится от $p_1 = 0,1$ МПа до $p_2 = 3,5$ МПа. Начальная температура воздуха $t = 40$ °С. Найти температуру воздуха в конце сжатии.

Решение

Показатель адиабаты для воздуха (см. задачу 5.175) $\gamma = 1,4$. Из уравнения Пуассона $\frac{T_1}{T_2} = \left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}$, где $T_1 = 273$ К. Тогда $T_2 = \frac{T_1}{\left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}}$; $T_2 = 862,86$ К.

5.178 Газ расширяется адиабатически, причем объем его увеличивается вдвое, а термодинамическая температура падает в 1,32 раза. Какое число степеней свободы i имеют молекулы этого газа?

Решение

Показатель адиабаты (см. задачу 5.175) $\gamma = \frac{i+2}{i}$. Из уравнения Пуассона $\frac{T_1}{T_2} = \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{\gamma-1}$. По условию $\frac{T_1}{T_2} = 1.32$ и $\frac{V_2}{V_1} = 2$, тогда $2^{\gamma-1} = ln1,32$ или $\left(\frac{i+2}{i} - 1\right) \cdot ln2 = ln1,32$. Отсюда $\frac{i+2-i}{i} = \frac{2}{i} = \frac{ln1,32}{ln2} = 0,4$. Тогда $i = \frac{2}{0,4} = 5$.

5.179 Двухатомный газ, находящийся при давлении $p_1 = 2$ МПа и температуре $t_1 = 27$ °С, сжимается адиабатически объема V_1 до $V_2 = 0,5V_1$. Найти температуру t_2 и давление p_2 газа после сжатия.

Решение

Показатель адиабаты для двухатомного газа $\gamma = 1,4$ (см. задачу 5.175). Из уравнения Пуассона $\frac{p_1}{p_2} = \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma}$ или $\frac{T_1}{T_2} = \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{\gamma-1}$. По условию $\frac{V_2}{V_1} = 0,5$, тогда $\frac{p_1}{p_2} = 0,5^{1,4}$, $p_2 = 5,28$ МПа; $T_1 / T_2 = 0,5^{1,4-1}$, $T_2 = 395,85$ К $= 122,85°$ С.

5.180 В сосуде под поршнем находится гремучий газ, занимающий при нормальных условиях объем V_1 = 0,1 л. При быстром сжатии газ воспламеняется. Найти температуру T воспламенения гремучего газа, если известно, что работа сжатия A = 46,35 Дж.

Решение

Процесс быстрого сжатия гремучего газа в первом приближении можно считать адиабатическим. Гремучий газ представляет из себя смесь водорода и кислорода, а т. к. оба газа двухатомные, то показатель адиабаты (см. задачу 5.175) $\gamma = 1{,}4$. Работа, совершаемая над газом при адиабатическом сжатии, $A = \dfrac{p_1V_1(T_2 - T_1)}{(\gamma-1)T_1}$. Отсюда $T_2 - T_1 = \dfrac{AT_1(\gamma-1)}{p_1V_1}$ тогда температура воспламенения гремучего газа $T_2 = \dfrac{AT_1(\gamma-1)}{p_1V_1} + T_1 = T_1\left[\dfrac{A(\gamma-1)}{p_1V_1} + 1\right]$; $T_2 = 774{,}13$ К.

5.181 В сосуде под давлением находится газ при нормальных условиях. Расстояние между дном сосуда и дном поршня h = 25 см. Когда на поршень положили груз массой m = 20 кг, поршень опустится на Δh = 13,4 см. Считая сжатие адиабатическим, найти для данного газа отношение c_p/c_v. Площадь поперечного сечения поршня S = 10 см^2. Массой поршня пренебречь.

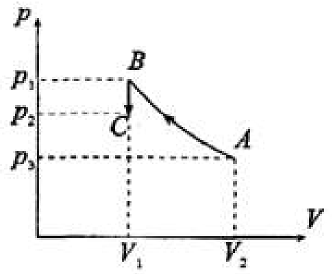
Решение

Т. к. по условию сжатие адиабатическое, то $\dfrac{c_p}{c_V} = \gamma$ — показатель адиабаты. Из уравнения Пуассона $\dfrac{p_1}{p_2} = \left(\dfrac{V_2}{V_1}\right)^\gamma$. Когда на поршень положили груз, давление стало равным $p_2 = p_1 + \dfrac{mg}{S}$. Начальный и конечный объемы соответственно равны $V_1 = Sh$ и $V_2 = S(h - \Delta h)$, тогда $\dfrac{V_2}{V_1} = \dfrac{h-\Delta h}{h}$. Следовательно, $\dfrac{p_1}{p_1 + mg/S} = \left(\dfrac{h-\Delta h}{h}\right)^\gamma$ или $\dfrac{p_1}{p_1S + mg} = \left(\dfrac{h-\Delta h}{h}\right)^\gamma$. Чтобы выразить γ, прологарифмируем полученное выражение $ln\left(\dfrac{p_1S}{p_1S+mg}\right) = \gamma\, ln\left(\dfrac{h-\Delta h}{h}\right)$, откуда $\dfrac{c_p}{c_V} = \gamma = \dfrac{ln(p_1S/(p_1S+mg))}{ln((h-\Delta h)/h)} = \dfrac{ln(p_1S) - ln(p_1S+mg)}{ln(h-\Delta h) - ln\,h}$.

Подставив числовые значения, получим $\dfrac{c_p}{c_V} = 1{,}4$.

5.182 Двухатомный газ занимает объем $V_1 = 0{,}5$ л при давлении $p = 50$ кПа. Газ сжимается адиабатически до некоторого объема V_2 и давления p_2. Затем он охлаждается при $V_2 = const$ до первоначальной температуры, причем его давление становится равным $p_0 = 100$ кПа. Начертить график этого процесса. Найти объем V_2 и давление p_2.

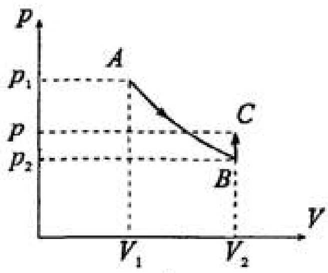
Решение



Для двухатомного газа (см. задачу 5.175) $\gamma = 1{,}4$. Из уравнения Пуассона $\frac{p_1}{p_2} = \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^\gamma$ или $\frac{T_1}{T_2} = \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{\gamma-1}$. Т. к. $V_2 = const$, то $\frac{p_2}{T_2} = \frac{p_0}{T_1}$, откуда $\frac{T_1}{T_2} = \frac{p_0}{p_2}$. Тогда имеем $\frac{p_1}{p_2} = \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^\gamma$ — (1) и $\frac{p_0}{p_2} = \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{\gamma-1}$ — (2). Разделим (1) на (2), тогда $\frac{p_1}{p_0} = \frac{(V_2/V_1)^\gamma}{(V_2/V_1)^{\gamma-1}} = \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{[\gamma-(\gamma-1)]} = \frac{V_2}{V_1}$. Отсюда $V_2 = \frac{p_1 V_1}{p_0} = 0{,}25$ л. Из (1) $p_2 = \frac{p_1}{(V_2/V_1)^\gamma} = 132$ кПа.

5.183 Газ расширяется адиабатически так, что его давление падает от $p_1 = 200$ кПа до $p_2 = 100$ кПа. Затем он нагревается при постоянном объеме до первоначальной температуры, причем его давление становится равным $p = 122$ кПа. Найти отношение c_p/c_V для этого газа. Начертить график этого процесса.

Решение



Из уравнения Пуассона $\frac{T_1}{T_2} = \left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}$. Т. к. $V = const$, то $\frac{p_2}{T_2} = \frac{p}{T_1}$ или $\frac{T_1}{T_2} = \frac{p}{p_2}$. Тогда $\frac{p}{p_2} = \left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}$. Прологарифмируем полученное выражение $ln\left(\frac{p}{p_2}\right) = ln\left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}$ или $ln\left(\frac{p}{p_2}\right) = \frac{\gamma-1}{\gamma} ln\left(\frac{p_1}{p_2}\right)$. Отсюда $\frac{\gamma-1}{\gamma} = \frac{ln(p/p_2)}{ln(p_1/p_2)}$ или $\frac{1}{\gamma} = 1 - \frac{ln(p/p_2)}{ln(p_1/p_2)}$. Окончательно получим $\gamma = \frac{1}{1-(ln(p/p_2)/ln(p_1/p_2))} = 1{,}4$.

5.184 Количество ν = 1 кмоль азота, находящегося при нормальных условиях, расширяется адиабатически от объема V_1 до $V_2 = 5V_1$. Найти изменение ΔW внутренней энергии газа и работу A, совершенную газом при расширении.

Решение

Изменение внутренней энергии при адиабатическом процессе $\Delta W = -A$ или $\Delta W = \frac{i}{2}\nu R(T_2 - T_1)$. Из уравнения Пуассона найдем $T_2 = T_1\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1}$. Для азота количество степеней свободы $i = 5$. Тогда $\Delta W = \frac{5}{2}\nu RT_1\left(\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1} - 1\right)$; $\Delta W = -2{,}69$ МДж; $A = 2{,}69$ МДж.

5.185 Необходимо сжать воздух от объема V_1 = 10 л до V_2 = 2 л. Как выгоднее его сжимать (адиабатически или изотермически)?

Решение

Работа, совершаемая при адиабатическом сжатии. $A_1 = \frac{RT_1}{\gamma - 1}\frac{m}{\mu}\left(1 - \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1}\right)$, где $\gamma = \frac{c_p}{c_V}$. Работа, совершаемая при изотермическом сжатии, $A_2 = RT\frac{m}{\mu}ln\frac{V_2}{V_1}$. Отсюда $\frac{A_1}{A_2} = \frac{1 - (V_1/V_2)^{\gamma-1}}{(\gamma - 1)ln(V_2/V_1)}$; $\frac{A_1}{A_2} = 1{,}4$. Следовательно, выгоднее сжимать воздух изотермически.

5.186 При адиабатическом сжатии количества ν = 1 кмоль двухатомного газа была совершена работа A = 146 кДж. На сколько увеличилась температура газа при сжатии?

Решение

Для двухатомного газа (см. задачу 5.175) $\gamma = 1{,}4$. Работа над газом при адиабатическом сжатии $A = \frac{RT_1}{\gamma - 1}\frac{m}{\mu}\times$ $\times\left(1 - \frac{T_2}{T_1}\right) = \frac{RT_1}{\gamma - 1}\nu\frac{T_1 - T_2}{T_1}$; $A = \frac{R\nu(T_1 - T_2)}{\gamma - 1} = \frac{R\nu\Delta T}{\gamma - 1}$. Отсюда $\Delta T = \frac{A(\gamma - 1)}{R\nu}$; $\Delta T \approx 7$ К.

5.187 Во сколько раз уменьшится средняя квадратичная скорость молекул двухатомного газа при адиабатическом увеличении объема газа в два раза?

Решение

Для двухатомного газа (см. задачу 5.175) $\gamma = 1{,}4$. Средняя квадратичная скорость молекул $\sqrt{\overline{v^2}} = \sqrt{\dfrac{3RT}{\mu}}$, тогда $\dfrac{\sqrt{\overline{v_1^2}}}{\sqrt{\overline{v_2^2}}} = \dfrac{\sqrt{3RT_1/\mu}}{\sqrt{3RT_2/\mu}} = \sqrt{\dfrac{3RT_1}{\mu}\dfrac{\mu}{3RT_2}} = \sqrt{\dfrac{T_1}{T_2}}$. Из уравнения Пуассона $T_1/T_2 = (V_2/V_1)^{\gamma-1}$, отсюда $\dfrac{\sqrt{\overline{v_1^2}}}{\sqrt{\overline{v_2^2}}} = \sqrt{\left(\dfrac{V_2}{V_1}\right)^{\gamma-1}} = \left(\dfrac{V_2}{V_1}\right)^{\frac{\gamma-1}{2}}$; $\dfrac{\sqrt{\overline{v_1^2}}}{\sqrt{\overline{v_2^2}}} = 1{,}15$.

5.188 Масса m = 10 г кислорода, находящегося при нормальных условиях, сжимается до объема V_2 = 1,4 л. Найти давление p_2 и температуру t_2 кислорода после сжатия, если кислород сжимается: а) изотермически; б) адиабатически. Найти работу A сжатия в каждом из этих случаев.

Решение

а) При изотермическом сжатии газа $T = const$, поэтому $T_2 = T_1 = 273$ К. Из уравнения Менделеева — Клапейрона $p_2V_2 = \dfrac{m}{\mu}RT_1$, давление $p_2 = \dfrac{mRT_1}{\mu V_2}$; $p_2 = 506{,}39$ кПа. Работа при изотермическом сжатии $A = RT\dfrac{m}{\mu}ln\dfrac{V_2}{V_1}$. Из закона Бойля — Мариотта $p_1V_1 = p_2V_2$ имеем $\dfrac{V_2}{V_1} = \dfrac{p_1}{p_2}$, тогда $A = RT_1\dfrac{m}{\mu}ln\dfrac{p_1}{p_2}$; $A = -1{,}14$ кДж. б) Поскольку кислород двухатомный газ, то $\gamma = 1{,}4$ (см. задачу 5.175). Из уравнения Пуассона $\dfrac{p_1}{p_2} = \left(\dfrac{V_2}{V_1}\right)^{\gamma}$ — (1) или $\dfrac{T_1}{T_2} = \left(\dfrac{V_2}{V_1}\right)^{\gamma-1}$ — (2).

Разделим (1) на (2) $\frac{p_1T_2}{p_2T_1}=\left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{[\varkappa-(\gamma-1)]}=\frac{V_2}{V_1}$ или $V_1=\frac{p_2V_2T_1}{p_1T_2}$. Согласно уравнению Менделеева — Клапейрона $p_2V_2=\frac{m}{\mu}RT_2$, тогда $V_1=\frac{(m/\mu)RT_2T_1}{p_1T_2}=\frac{mRT_1}{\mu p_1}$. Подставим в (1) $\frac{p_1}{p_2}=\left(\frac{V_2\mu p_1}{mRT_1}\right)^{\gamma}$, откуда $p_2=\frac{p_1}{(V_2\mu p_1/(mRT_1))^{\gamma}}$; $p=965$ кПа. Подставим в (2) $\frac{T_1}{T_2}=\left(\frac{V_2\mu p_1}{RT_1}\right)^{\gamma-1}$, откуда $T_2=\frac{T_1}{(V_2\mu p_1/(mRT_1))^{\gamma-1}}$; $T_2=520$ К. Работа при адиабатическом сжатии $A=\frac{RT_1}{\gamma-1}\frac{m}{\mu}\left(1-\frac{T_2}{T_1}\right)$; $A=-1{,}605$ кДж.

5.189 Масса m = 28 г азота, находящегося при температуре t = 40 °C и давлении p_1 = 100 кПа, сжимается до объема V_2 = 13 л. Найти температуру t_2 и давление p_2 азота после сжатия, если азот сжимается: а) изотермически; б) адиабатически. Найти работу A сжатия в каждом из этих случаев.

Решение

а) При изотермическом сжатии газа (см. задачу 5.188) температура $T_2=T_1=313\,\text{К}=40°\,\text{C}$, давление $p_2=\frac{mRT_1}{\mu V_1}$; $p_2=200$ кПа, работа $A=RT_1\frac{m}{\mu}\ln\frac{p_1}{p_2}$; $A=-1{,}8$ кДж.

б) Давление $p_2=\frac{p_1}{(V_2\mu p_1/(mRT_1))^{\gamma}}$; $p_2=264$ кПа. Температура $T_2=\frac{T_2}{(V_2\mu p_1/(mRT_1))^{\gamma-1}}$; $T_2=413$ К. Работа $A=\frac{RT_1}{\gamma-1}\frac{m}{\mu}\left(1-\frac{T_2}{T_1}\right)$; $A=-2{,}08$ кДж.

5.190 Во сколько раз возрастает длина свободного пробега молекул двухатомного газа, если его давление падает в двое при расширении газа: а) изотермически; б) адиабатически?

Решение

Средняя длина свободного пробега молекул (см. задачу 5.120) $\lambda = \frac{kT}{\sqrt{2}\pi\sigma^2 p}$. Тогда $\frac{\lambda_2}{\lambda_1} = \frac{T_2}{T_1}\frac{p_1}{p_2}$. а) При изотермическом расширении $T = const$, поэтому $\frac{\lambda_2}{\lambda_1} = \frac{p_1}{p_2} = 2$. б) При адиабатическом расширении из уравнения Пуассона имеем $\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}$, тогда $\frac{\lambda_2}{\lambda_1} = \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}\frac{p_1}{p_2}$, где $\gamma = 1{,}4$; т. к. газ двухатомный (см. задачу 5.175). Следовательно, $\frac{\lambda_2}{\lambda_1} = 1{,}64$.

5.191 Два различных газа, из которых один одноатомный, а другой двухатомный, находятся при одинаковых температурах и занимают одинаковые объемы. Газы сжимаются адиабатически так, что объем их уменьшается вдвое. Какой из газов нагреется больше и во сколько раз?

Решение

Показатель адиабаты (см. задачу 5.120) $\gamma = \frac{i+2}{i}$. У одноатомного газа число степеней свободы $i_1 = 3$, поэтому $\gamma_1 = \frac{5}{3} = 1{,}67$, а у двухатомного $\gamma = 1{,}4$. Из уравнения Пуассона имеем $\frac{T_1}{T_2} = \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{\gamma-1}$, откуда $T_2 = \frac{T_1}{(V_2/V_1)^{\gamma-1}}$. По условию $\frac{V_2}{V_1} = 0{,}5$, следовательно, отношение температур $k = \frac{T_{2_1}}{T_{2_2}} = \frac{0{,}5^{\gamma_1-1}}{0{,}5^{\gamma_2-1}}$; $k = 0{,}5^{\gamma_1-\gamma_2} = 1{,}2$. Значит, больше нагреется одноатомный газ в 1,2 раза.

5.192 Масса m = 1 кг воздуха, находящегося при давлении p_1 = 150 кПа и температуре t_1 = 30 °С, расширяется адиабатически и давление при этом падает до p_2 = 100 кПа. Во сколько раз увеличился объем воздуха? Найти конечную температуру t_2 и работу A, совершенную газом при расширении.

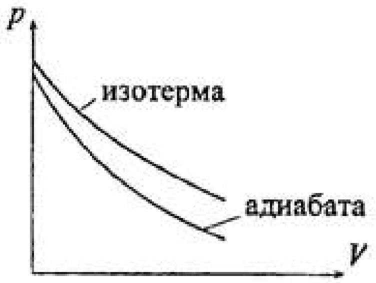
Решение

Воздух в первом приближении можно считать двухатомным газом, поэтому показатель адиабаты $\gamma = 1{,}4$. Из уравнения Пуассона $\frac{p_1}{p_2} = \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{\gamma}$, откуда $\frac{V_2}{V_1} = \left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{\frac{1}{\gamma}}$; $\frac{V_2}{V_1} = 1{,}34$. Кроме того, уравнение Пуассона может быть записано в виде: $\frac{T_1}{T_2} = \left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}$, откуда $T_2 = \frac{T_1}{(p_1/p_2)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}}$; $T_2 = 720$ К. работа расширения газа при адиабатическом процессе $A = \frac{RT_1}{\gamma - 1}\frac{m}{\mu}\left[1 - \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1}\right]$; $A = 24$ кДж.

5.193 Количество ν = 1 кмоль кислорода находится при нормальных условиях, а затем объем его увеличивается до $V = 5V_0$. Построить график зависимости $p = F(V)$, приняв за единицу по оси абсцисс значение V_0, если кислород расширяется: а) изотермически; б) адиабатически. Значения давления р найти для объемов, равных: V_0, $2V_0$, $3V_0$, $4V_0$, $5V_0$.

Решение

а) При изотермическом процессе по закону Бойля — Мариотта $p_0V_0 = pV$, откуда $p = \frac{p_0V_0}{V}$.

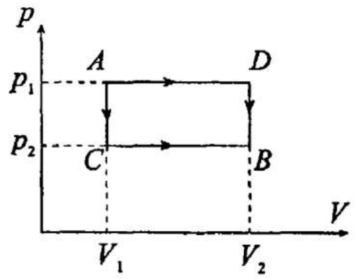


б) При адиабатическом процессе из уравнения Пуассона следует, что $\frac{p_0}{p} = \left(\frac{V}{V_0}\right)^{\gamma}$, откуда $p = \frac{p_0}{(V/V_0)^{\gamma}}$.

V	V_0	$2V_0$	$3V_0$	$4V_0$	$5V_0$
р, кПа (изотерма)	101,300	38,386	21,759	14,545	10,643
р, кПа (адиабата)	101,300	50,650	33,767	25,325	20,260

5.194 Некоторая масса кислорода занимает объем V_1 = 3 л при температуре t_1 = 27 °С и давлении p_1 = 820 кПа. В другом состоянии газ имеет параметры V_2 = 4,5 л и p_2 = 600 кПа. Найти количество теплоты Q, полученное газом, работу A, совершенную газом при расширении, изменение ΔW внутренней энергии газа при переходе газа из одного состояния в другое: а) по участку ACB; б) по участку ADB.

Решение



а) По участку ACB: Участок AC — изохора, т. е. $A_1 = 0$, поскольку $\Delta V = 0$. Следовательно, $Q_1 = \Delta W_1 = \frac{5}{2}\frac{m}{\mu}R\Delta T$. Согласно уравнению Менделеева — Клапейрона $p_1V_1 = \frac{m}{\mu}RT_1$ — (1) и $p_2V_1 = \frac{m}{\mu}RT_2$ — (2). Вычтем уравнение (2) из (1), тогда $(p_1 - p_2)V_1 = \frac{m}{\mu}R\Delta T$. Отсюда $Q_1 = \Delta W_1 = \frac{5}{2}(p_1 - p_2)V_1$; $Q_1 = 1{,}65$ кДж. Участок CB — изобара, следовательно, $A_2 = p_2(V_2 - V_1)$; $A_2 = 0{,}9$ кДж. Изменение внутренней энергии $\Delta W_2 = \frac{5}{2}\frac{m}{\mu}R\Delta T$. Согласно уравнению Менделеева — Клапейрона $p_2V_1 = \frac{m}{\mu}RT_1$ — (3) и $p_2V_2 = \frac{m}{\mu}RT_2$ — (4). Вычтем (3) из (4), тогда $p_2(V_2 - V_1) = \frac{m}{\mu}R\Delta T$. Отсюда $\Delta W_2 = \frac{5}{2}p_2(V_2 - V_1)$; $\Delta W_2 = 2{,}25$ кДж. Таким образом, на всем участке ACB: работа $A = A_2 = 0{,}9$ кДж; изменение внутренней энергии $\Delta W = \Delta W_2 - \Delta W_1 = 0{,}6$ кДж. Согласно первому началу термодинамики количество тепла $Q = \Delta W + A = 1{,}5$ кДж. б) Аналогично на участке ADB: работа $A = A_1 = p_1(V_2 - V_1) = 1{,}23$ кДж; изменение внутренней энергии $\Delta W = \Delta W_1 - \Delta W_2 = \frac{5}{2}p_1(V_2 - V_1) - \frac{5}{2}(p_1 - p_2)\times$ $\times V_2 = 0{,}6$ кДж; количество тепла $Q = \Delta W + A = 1{,}83$ кДж.

5.195 Идеальная тепловая машина, работающая по циклу Карно, за цикл получает от нагревателя количество теплоты $Q_1 = 2{,}512$ кДж. Температура нагревателя $T_1 = 400$ К, температура холодильника $T_2 = 300$ К. Найти работу A, совершаемую машиной за один цикл, и количество теплоты Q_2, отдаваемое холодильнику за один цикл.

Решение

Работа, совершаемая тепловой машиной, определяется выражением $A = Q_1 - Q_2 = \eta Q_1$, где Q_1 — количество теплоты, полученное машиной от нагревателя, Q_2 — количество теплоты, отдаваемое холодильнику, η — к. п. д. машины. $\eta = \dfrac{T_1 - T_2}{T_1} = 0{,}25$. Отсюда $A = 630$ Дж; $Q_2 = Q_1 - A = 1{,}88$ кДж.

5.196 Идеальная тепловая машина, работающая по циклу Карно, совершает за один цикл работу $A = 2{,}94$ кДж и отдает за один цикл холодильнику количество теплоты $Q_2 = 13{,}4$ кДж. Найти кпд. η цикла.

Решение

К.п.д. цикла Карно $\eta = \dfrac{A}{Q_1}$ — (1), где Q_1 — количество тепла, подведенного к рабочему телу. Т. к. по условию машина является идеальной, то $\eta = \dfrac{T_1 - T_2}{T_1} = \dfrac{Q_1 - Q_2}{Q_1}$ — (2). Сравнивая выражения (1) и (2), получим $A = Q_1 - Q_2$, откуда $Q_1 = A + Q_2$. Тогда $\eta = \dfrac{A}{A + Q_2}$; $\eta = 18\%$.

5.197 Идеальная тепловая машина, работающая по циклу Карно, совершает за один цикл работу $A = 73{,}5$ кДж. Температура нагревателя $t_1 = 100$ °С, температура холодильника $t_2 = 0$ °С. Найти кпд. η цикла, количество теплоты Q_1, получаемое машиной за один цикл от нагревателя, и количество теплоты Q_2, отдаваемое за один цикл холодильнику.

Решение

К. п. д. идеального цикла Карно $\eta = \dfrac{T_1 - T_2}{T_1}$; $\eta = 26{,}8\%$. С другой стороны, $\eta = \dfrac{A}{Q_1}$, откуда $Q_1 = \dfrac{A}{\eta}$; $Q_1 = 274$ кДж. Т. к. машина идеальная, то количество тепла, отданное холодильнику $Q_2 = Q_1 - A$; $Q_2 = 200$ кДж.

5.198 Идеальная тепловая машина работает по циклу Карно. При этом 80% количества теплоты, получаемого от нагревателя, передается холодильнику. Машина получает от нагревателя количество теплоты Q_1 = 6,28 кДж. Найти кпд η цикла и работу А, совершаемую за один цикл.

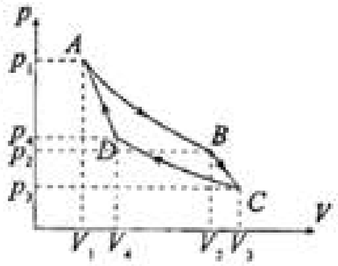
Решение

Поскольку $\frac{Q_2}{Q_1} = 0{,}8$, то $Q_2 = 0{,}8Q_1 = 5{,}024$ кДж. По условию, машина идеальная, значит, $A = Q_2 - Q_1$; $A = 1{,}256$ кДж и $\eta = \frac{A}{Q_1}$; $\eta = 20\,\%$.

5.199 Идеальная тепловая машина работает по циклу Карно. Воздух при давлении p_1 = 708 кПа и температуре t_1 = 127 °С занимает объем V_1 = 2 л. После изотермического расширения воздух занял объем V_2 = 5 л; после адиабатического расширения объем стал равный V_3 = 8 л. Найти а) координаты пересечения изотерм и адиабат; б) работу А, совершаемую на каждом участке цикла; в) полную работу А, совершаемую за весь цикл; г) кпд η цикла; д) количество теплоты Q_1, полученное от нагревателя за один цикл; е) количество теплоты Q_2, отданное холодильнику за один цикл.

Решение

а) Запишем уравнение изотермы AB: $pV = \frac{m}{\mu}RT_1$ — (1). Поскольку точка A принадлежит AB, то $p_1V_1 = \frac{m}{\mu}RT_1$, откуда $\frac{m}{\mu} = \nu = \frac{p_1V_1}{RT_1}$; $\nu = 0{,}427$ моль



Тогда (1) можно записать в виде $pV = 0{,}427RT_1 = 1{,}42$ кДж. По закону Бойля — Мариотта для точки B $p_2 = \frac{pV}{V_2} =$ $= 284$ кПа. Точки B и C принадлежат адиабате BC, следовательно, $p_2V_2^\gamma = p_3V_3^\gamma$, откуда $p_3 = p_2\left(\frac{V_2}{V_3}\right)^\gamma =$ $= 146$ кПа. Уравнение изотермы CD имеет вид $pV = \nu RT_2 = p_3V_3$, отсюда $T_2 = \frac{p_3V_3}{\nu R}$; $T_2 = 330$ К. Координаты точек D и A удовлетворяют уравнению адиабаты DA, следовательно, $\left(\frac{V_4}{V_1}\right)^{\gamma-1} = \frac{T_1}{T_2}$, откуда $V_4 = 3{,}2$ л. Кроме того,

$\left(\frac{V_4}{V_1}\right)^\gamma = \frac{p_1}{p_4}$, откуда $p_4 = p_1\left(\frac{V_1}{V_4}\right)^\gamma = 365$ кПа. Таким образом, координаты искомых точек: $A(2;708)$, $B(5;284)$, $C(8;146)$, $D(3,2;365)$, здесь объем измеряется в литрах, давление — в килопаскалях.

б) Работа на участке AB (изотерма): $A_1 = RT_1\frac{m}{\mu}ln\frac{V_2}{V_1} = 1300$ Дж. Работа на участке BC (адиабата): $A_2 = \frac{RT_1}{\gamma-1}\frac{m}{\mu}\left[1-\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1}\right] = \frac{RT_1}{\gamma-1}\frac{m}{\mu}\left(1-\frac{T_2}{T_1}\right) = 620$ Дж. Работа на участке CD (изотерма): $A_3 = RT_2\frac{m}{\mu}ln\frac{V_4}{V_3} = -1070$ Дж.

Работа на участке DA (адиабата): $A_4 = \frac{RT_2}{\gamma-1}\frac{m}{\mu}\left(1-\frac{T_1}{T_2}\right) = -620$ Дж.

в) Работа за полный цикл $A = A_1 + A_2 + A_2 + A_4 = 230$ Дж.

г) К. п. д. цикла $\eta = \frac{(T_1 - T_2)}{T_1} = 0,175$.

д) Количество теплоты, полученное от нагревателя за один цикл, $Q = \frac{A}{\eta} = 1300$ Дж.

е) Количество теплоты, отданное холодильнику за один цикл $Q_2 = Q_1 - A = 1070$ Дж.

5.200 Количество $\nu = 1$ кмоль идеального газа совершает цикл, состоящий из двух изохор и двух изобар. При этом объем газа изменяется от $V_1 = 25$ м^3 до $V_2 = 5$ м^3 и давление изменяется от $p_1 = 100$ кПа до $p_2 = 200$ кПа. Во сколько раз работа, совершаемая при таком цикле, меньше работы, совершаемой в цикле Карно, изотермы которого соответствуют наибольшей и наименьшей температурам рассматриваемого цикла, если при изотермическом расширении объем увеличился в 2 раза?

Решение

Работа, совершаемая при цикле из двух изобар и двух изохор, $A_1 = p_1(V_2 - V_1) - p_2(V_2 - V_1) = (p_1 - p_2)(V_2 - V_1)$; $A_1 = -2500$ кДж. Работа, совершаемая по циклу Карно, $A_2 = A_{1из} + A_{1ад} + A_{2из} + A_{2ад}$. Из уравнения Менделеева — Клапейрона $pV = \nu RT$ имеем $T = \frac{pV}{\nu R}$. Тогда температура при изотермическом расширении и сжатии соответственно $T_1 = \frac{p_1V_1}{\nu R}$ и $T_2 = \frac{p_2V_2}{\nu R}$. Значит, работа при изотермическом расширении и сжатии $A_{1из} = RT_1\nu\, ln\,2 = p_1V_1\, ln\,2$; $A_{2из} = RT_2\nu\, ln\,0,5 = p_2V_2\, ln\,0,5$. Идеальный газ является одноатомным, поэтому показатель адиабаты $\gamma = 1,67$ (см. задачу 5.191). Тогда работа при адиабатическом расширении и сжатии $A_{1ад} = \frac{RT_1}{\gamma-1}\nu\left(1-\frac{T_2}{T_1}\right) = \frac{p_1V_1}{\gamma-1}\times\left(1-\frac{p_2V_2}{p_1V_1}\right)$ и $A_{2ад} = \frac{RT_2}{\gamma-1}\nu\left(1-\frac{T_1}{T_2}\right) = \frac{p_2V_2}{\gamma-1}\left(1-\frac{p_1V_1}{p_2V_2}\right)$, откуда $A_2 = p_2V_2\left[ln\,0,5 + \left(1-\frac{p_1V_1}{p_2V_2}\right)\right] + p_1V_1\left[ln\,2 + \left(1-\frac{p_2V_2}{p_1V_1}\right)\right]$.

Подставляя числовые данные, получим: $A_2 = -5198$ кДж, тогда $\frac{A_2}{A_1} = 2,1$.

5.201 Идеальная холодильная машина, работающая по обратному циклу Карно, совершает за один цикл работу A = 37 кДж. При этом она берет тепло от тела с температурой t_2 = -10 °С и передает тепло телу с температурой t_1 = 17 °С, Найти кпд η цикла, количество теплоты Q_2, отнятое у холодного тела за один цикл, и количество теплоты Q_1, переданное более горячему телу за один цикл.

Решение

Поскольку холодильная машина работает по обратному циклу, то для перехода тепла от менее нагретого тела к более нагретому необходимо, чтобы внешние силы совершили положительную работу. Количество теплоты Q_2, отнятое у холодного тела, вместе с работой внешних сил A равно количеству теплоты Q_1, переданному более нагретому телу, $Q_2 = Q_1 - A = \frac{A}{\eta} = \frac{1-\eta}{\eta}A$. Поскольку $\eta = \frac{(T_1 - T_2)}{T_1} = 0{,}093$, то $Q_2 = 360$; $Q_1 = Q_2 + A = 379$ кДж.

Таким образом холодильная машина за каждый цикл передает более горячему телу количество теплоты 397кДж, из которых 37кДж за счет механической работы, а 360кДж от холодного тела.

5.202 Идеальная холодильная машина работает как тепловой насос по обратному циклу Карно. При этом она берет тепло от воды с температурой t_2 = 2 °С и передает его воздуху с температурой t_1 = 27 °С. Найти: а) коэффициент η_1 — отношение количества теплоты, переданного воздуху за некоторый промежуток времени, к количеству теплоты, отнятому за это же время от воды; б) коэффициент η_2 — отношение количества теплоты, отнятого за некоторый промежуток времени от воды, к затраченной на работу машины энергии за этот же промежуток времени (коэффициент η_2 называется холодильным коэффициентом машины); в) коэффициент η_3 — отношение затраченной на работу машины энергии за некоторый промежуток времени к количеству теплоты, переданному за это же время воздуху (коэффициент η_3 — кпд цикла). Найти соотношение между коэффициентами η_1, η_2, и η_3.

Решение

Согласно условию задачи $\eta_1 = \frac{Q_1}{Q_2}$ — (1); $\eta_2 = \frac{Q_2}{A} = \frac{Q_2}{Q_1 - Q_2}$ — (2); $\eta_3 = \frac{A}{Q_1} = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1}$ — (3). Кроме того, к. п. д. цикла $\eta_3 = \frac{T_1 - T_2}{T_1} = 0{,}083$. Из (3) имеем $Q_2 = \frac{Q_1}{(1-\eta_3)}$. Тогда из (1) $\eta_1 = \frac{1}{1-\eta_3} = 1{,}09$. Из (2) имеем $\frac{1}{\eta_2} = \eta_1 - 1 = \frac{1}{1-\eta_3} - 1$, откуда $\eta_2 = \frac{1-\eta_3}{\eta_3} = 11$.

5.203 Идеальная холодильная машина, работающая по обратному циклу Карно, передает тепло от холодильника с водой при температуре $t_2 = 0$ °С кипятильнику с водой при температуре $t_1 = 100$ °С. Какую массу m_2 воды нужно заморозить в холодильнике, чтобы превратить в пар массу $m_1 = 1$ кг воды в кипятильнике?

Решение

К. п. д. идеальной холодильной машины $\eta = \frac{T_2}{T_1 - T_2} = 2{,}73$. Количество тепла, отдаваемое холодильнику $Q_2 = \lambda m_2$, где $\lambda = 335$ кДж/кг — удельная теплота плавления льда. Количество тепла, принимаемое кипятильником $Q_1 = rm_1$, где $r = 2{,}26$ МДж/кг — удельная теплота парообразования воды. С другой стороны, $\eta = \frac{Q_2}{Q_1 - Q_2}$, откуда $\eta = (Q_1 - Q_2) = Q_2$ или $\eta Q_1 - \eta Q_2 = Q_2$. Отсюда $Q_1 = \frac{Q_2(1+\eta)}{\eta}$ или $rm_1 = \frac{\lambda m_2(1+\eta)}{\eta}$. Окончательно $m_2 = \frac{rm_1\eta}{\lambda(1+\eta)}$; $m_2 = 4{,}94$ кг.

5.204 Помещение отапливается холодильной машиной, работающей по обратному циклу Карно. Во сколько раз количество теплоты Q, получаемое помещением от сгорания дров в печке, меньше количества теплоты Q', переданного помещению холодильной машиной, которая приводится в действие тепловой машиной, потребляющей ту же массу дров? Тепловой двигатель работает между температурами $t_1 = 100$ °С и $t_2 = 0$ °С. Помещение требуется поддерживать при температуре $t'_1 = 16$ °С. Температура окружающего воздуха $t'_2 = -10$ °С.

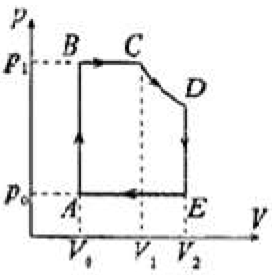
Решение

Пусть к. п. д. тепловой машины $\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1}$, а к. п. д. холодильной машины $\eta' = \frac{T'_1 - T'_2}{T'_1}$. Тогда за счет количества тепла Q совершается работа $A = \eta Q$, а помещению передается количество теплоты $Q' = \frac{A}{\eta'}$. Отсюда $\frac{Q'}{Q} = \frac{\eta A}{\eta' A} = \frac{(T_1 - T_2)T'_1}{(T'_1 - T'_2)T_1}\frac{Q'}{Q} = 3$. Т. е. от сгорания дров в печке помещение получит в три раза меньше тепла, чем при отоплении его холодильной машиной.

5.205 Рабочий цикл идеальной паровой машины изображен на рисунке. В начале доступа пара из котла в цилиндр давление в нем возрастает при $V_0 = const$ от p_0 до p_1 (ветвь AB). При дальнейшем поступлении пара до объема V_1 поршень движется слева направо при $p_1 = const$ (ветвь BC). При дальнейшем движении поршня вправо доступ пара из котла в цилиндр прекращается, происходит адиабатическое расширение пара до объема V_2 (ветвь CD). При крайнем правом положении поршня пар из цилиндра выходит в холодильник — давление падает при $V_2 = const$ до давления p_0 (ветвь DE). При обратном движении поршень выталкивает оставшийся пар при $p_0 = const$; объем при этом уменьшается от V_2 до V_0 (ветвь EA). Найти работу A этой машины, совершаемую за каждый цикл, если V_0 = 0,5 л, V_1 = 1,5 л, V_2 = 3,0 л, p_0 = 0,1 МПа, p_1 = 1,2 МПа и показатель адиабаты $\gamma = c_p/c_V$ = 1,33.

Решение

Из рисунка видно, что работа за один цикл равна $A = A_{BC} + A_{CD} - A_{EA}$ или $A = p_1(V_1 - V_0) + \frac{p_1V_1}{\gamma - 1}\left[1 - \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1}\right] - p_0(V_2 - V_0)$, подставляя числовые данные, получим $A = 1{,}92$ кДж.



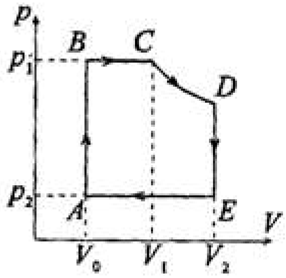
5.206 Паровая машина мощностью P = 14,7 кВт потребляет за время t = 1 ч работы массу m = 8,1 кг угля с удельной теплотой сгорания q = 33 МДж/кг. Температура котла t_1 = 200 °С, температура холодильника t_2 = 58 °С. Найти фактический кпд η машины и сравнить его с кпд η' идеальной тепловой машины, работающей по циклу Карно между теми же температурами.

Решение

Работа, совершаемая паровой машиной, $A = Pt$. Теплота, выделяемая при сгорании угля, $Q = qm$. Фактический к. п. д. машины $\eta = \frac{A}{Q} = \frac{Pt}{qm}$; $\eta = 19{,}8\,\%$. К. п. д. идеальной тепловой $\eta' = \frac{T_1 - T_2}{T_1} = 30\,\%$.

5.207 Паровая машина мощностью P = 14,7 кВт имеет площадь поршня S = 0,02 м^2; ход поршня h = 45 см. Изобарический процесс BC (рис.) происходит при движении поршня на одну треть его хода. Объемом V_0, по сравнению с объемами V_1 и V_2, пренебречь. Давление пара в котле p_1 = 1,6 МПа, давление пара в холодильнике p_2 = 0,1 МПа. Сколько циклов за время t = 1 мин делает машина, если показатель адиабаты γ = 1,3?

Решение



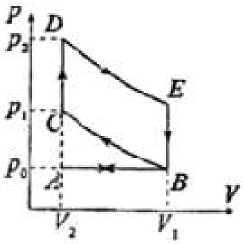
На изохорных участках работа $A_{AB} = A_{DE} = 0$, т. к. $\Delta V = 0$. На изобарном участке $A_{BC} = \frac{1}{3} p_1 Sh$, т. к. по условию поршень проходит $\frac{1}{3}$ хода. На адиабатном участке (см. задачу 5.200) $A_{CD} = p_1 V_1 \left(1 - \frac{T_2}{T_1}\right)$, где $V_1 = \frac{2}{3} Sh$. Из уравнения Пуассона $\frac{T_1}{T_2} = \left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}$ или $\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}$, тогда $A_{CD} = \frac{2}{3} p_1 Sh \left[1 - \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}\right]$. На изобарном участке $A_{EA} = p_2 Sh$, тогда полная работа одного цикла

$$A_1 = A_{BC} + A_{CD} - A_{EA} = \frac{1}{3} p_1 Sh + \frac{2}{3} p_1 Sh \left[1 - \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}\right] - p_2 Sh;$$

$A_1 = 8{,}43$ кДж. Работа, совершаемая за время t: $A_t = Pt = 882$ кДж, число циклов $n = \frac{A_t}{A_1} = 104{,}6$.

5.208 Цикл карбюраторного и газового четырехтактного двигателя внутреннего сгорания изображен на рисунке. При первом ходе поршня в цилиндр всасывается горючее (в карбюраторных двигателях горючая смесь представляет собой смесь паров бензина с воздухом, приготовляемую в карбюраторах, в газовых двигателях рабочая смесь «газ — воздух» поступает из газогенераторной установки), при этом $p_0 = const$ и объем увеличивается от V_2 до V_1 (ветвь AB). При втором ходе поршня горючее адиабатически сжимается от V_1 до V_2, при этом температура повышается от T_0 до T_1 и давление — от p_0 до p_1 (ветвь BC). Далее происходит зажигание (взрыв) горючего от искры; при этом давление возрастает от p_1 до p_2 при $V_2 = const$ и температура возрастает от T_1 до T_2 (ветвь CD). Третий ход поршня — адиабатическое расширение горючего от V_2 до V_1, температура падает до T_3 (ветвь DE — рабочий ход). При крайнем положении поршня (точка E) открывается выпускной клапан, давление падает при $V_1 = const$ до p_0 (ветвь EB). Четвертый ход поршня — изобарическое сжатие (ветвь BA — выталкивание отработанного газа). Найти кпд η цикла, если степень сжатия $V_1/V_2 = 5$ и показатель адиабаты $\gamma = 1{,}33$.

Решение



К. п. д. цикла $\eta = \frac{A}{Q}$, где A — полная работа за весь цикл и Q — количество теплоты, выделяющееся при сгорании горючего. Т. к. $A_{AB} = -A_{BA}$ и $A_{CD} = A_{EB} = 0$, то $A = A_{BC} - A_{DE} = \frac{m}{\mu}\frac{R(T_0 - T_3)}{\gamma - 1}\left[1 - \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1}\right]$ — (1). Но величина $\frac{R}{(\gamma-1)} = C_V$ и $\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1} = \frac{T_1}{T_0} = \frac{T_2}{T_3}$; поэтому (1) можно записать как $A = \frac{m}{\mu}C_V(T_0 - T_3)\left(1 - \frac{T_2}{T_3}\right)$. Т. к. $Q = \frac{m}{\mu}C_V(T_2 - T_1)$, то $\eta = \frac{A}{Q} = \frac{(T_0 - T_3)\left(1 - \frac{T_2}{T_3}\right)}{T_2 - T_1} = \frac{T_2 - T_3}{T_2}$;

$$\eta = 1 - \frac{T_3}{T_2} = 1 - \frac{1}{\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1}} = 0{,}412 = 41{,}2\% .$$

5.209 В цилиндрах карбюраторного двигателя внутреннего сгорания газ сжимается политропически до $V_2 = V_1/6$. Начальное давление $p_1 = 90$ кПа, начальная температура $t_1 = 127$ °C. Найти давление p_2 и температуру t_2 газа в цилиндрах после сжатия. Показатель политропы $n = 1{,}3$.

Решение

Уравнение политропического процесса $p_1V_1^n = p_2V_2^n$. По условию $V_2 = \frac{V_1}{6}$, следовательно, $p_1V_1^n = p_2\left(\frac{V_1}{6}\right)^n$, откуда $p_2 = p_1 \cdot 6^n = 934$ кПа. Из уравнения политропического процесса $T_1V_1^{n-1} = T_2V_2^{n-1}$ или $T_1V_1^{n-1} = T_2\left(\frac{V_1}{6}\right)^{n-1}$, откуда $T_2 = T_1 \cdot 6^{n-1} = 684{,}7$ К.

5.210 В цилиндрах карбюраторного двигателя внутреннего сгорания газ сжимается политропически так, что после сжатия температура газа становится равной t_2 = 427 °С. Начальная температура газа t_1 = 140 °С. Степень сжатия V_2/V_1 = 5,8. Найти показатель политропы n.

Решение

Из уравнения политропического процесса (см. задачу 5.209): $T_2 = T_1 \cdot 5{,}8^{n-1}$ или $\frac{T_2}{T_1} = 5{,}8^{n-1}$. Прологарифмируем полученное выражение: $ln\frac{T_2}{T_1} = ln\,5{,}8^{n-1}$ или $ln\frac{T_2}{T_1} = (n-1)\times$ $\times ln\,5{,}8$, откуда $n = \frac{ln(T_2/T_1)}{ln\,5{,}8} + 1$; $n = 1.3$.

5.211 Диаметр цилиндра карбюраторного двигателя внутреннего сгорания D = 10 см, ход поршня h = 11 см. Какой объем V должна иметь камера сжатия, если известно, что начальное давление газа p_1 = 0,1 МПа, начальная температура газа t_1 = 127 °С и давление в камере после сжатия p_2 = 1 МПа? Какова будет температура t_2 газа в камере после сжатия? Найти работу A, совершенную при сжатии. Показатель политропы n = 1,3.

Решение

Изменение объема в результате сжатия $V_1 - V_2 = Sh$ — (1), где S — площадь сечения цилиндра. Согласно уравнению Пуассона $\frac{p_1}{p_2} = \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^\gamma$ — (2). Площадь сечения цилиндра $S = \pi \cdot D^2/4 = 7{,}85 \cdot 10^{-3}$ м^2. Решая совместно уравнения (1) и (2), найдем $V_2 = \frac{Sh}{\sqrt[\gamma]{\frac{p_2}{p_1}} - 1}$; $V_2 = 176 \cdot 10^{-6}$ м^3. Уравнение Пуассона также можно записать в виде $\frac{T_1}{T_2} = (p_1/p_2)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}$, откуда $T_2 = 680$ К. Работа при сжатии $A = \frac{p_1V_1}{\gamma-1}\frac{T_1 - T_2}{T_1}$, где $V_1 = Sh + V_2 = 1{,}04 \cdot 10^{-3}$ м^3; $A = 243$ Дж.

5.212 Найти кпд η карбюраторного двигателя внутреннего сгорания, если показатель политропы n = 1,33 и степень сжатия: а) $V_1/V_2 = 4$; б) $V_1/V_2 = 6$; в) $V_1/V_2 = 8$.

Решение

К. п. д карбюраторного двигателя внутреннего сгорания $\eta = \frac{T_2 - T_1}{T_2}$. Из уравнения политропического процесса $\frac{T_1}{T_2} = \left(\frac{V_2}{V_2}\right)^{n-1}$, следовательно, $T_2 = T_1\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{n-1}$. Тогда к. п. д.

$$\eta = \frac{T_1(V_1/V_2)^{n-1} - T_1}{T_1(V_1/V_2)^{n-1}} = 1 - \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{n-1}.$$

а) Степень сжатия $\frac{V_1}{V_2} = 4$, тогда $\eta = 36{,}7\,\%$;

б) Степень сжатия $\frac{V_1}{V_2} = 6$, тогда $\eta = 44{,}6\,\%$;

в) Степень сжатия $\frac{V_1}{V_2} = 8$, тогда $\eta = 49{,}6\,\%$.

5.213 Карбюраторный двигатель мощностью P = 735,5 Вт потребляет за время t = 1 ч минимальную массу m = 265 г бензина. Найти потери бензина на трение, теплопроводность и пр. Степень сжатия $V_1/V_2 = 6{,}2$. Удельная теплота сгорания бензина q = 46 МДж/кг. Показатель политропы n = 1,2.

Решение

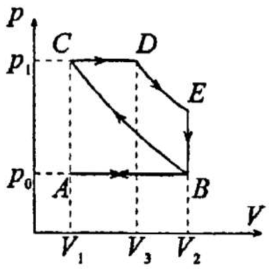
Фактический к. п. д. двигателя $\eta = \frac{Pt}{mq}$; $\eta = 0{,}22 = 22\%$.

Теоретический к. п. д. $\eta' = 1 - \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{n-1}$; $\eta' = 0{,}3 = 30\%$.

Тогда потери бензина составляют 8%.

5.214 Цикл четырехтактного двигателя Дизеля изображен на рисунке. Ветвь AB — в цилиндры засасывается воздух ($p_0 = 0{,}1$ МПа). Ветвь BC — воздух адиабатически сжимается до давления p_1. В конце такта сжатия в цилиндры впрыскивается топливо, которое воспламеняется в горячем воздухе и сгорает, при этом поршень движется вправо, сначала изобарически (ветвь CD), а затем адиабатически (ветвь DE). В конце адиабатического расширения открывается выпускной клапан, давление падает до p_0 (ветвь EB). При движении поршня влево смесь удаляется из цилиндров (ветвь BA). Найти кпд η двигателя Дизеля.

Решение



Полная работа цикла $A = Q_1 - Q_2$ — (1), где Q_1 — количество теплоты, выделившееся при сгорании топлива (участок CD), Q_2 — количество теплоты, отданное наружу (участок EB). Участок CD — изобара, следовательно, $Q_1 = \frac{m}{\mu} C_p (T_2 - T_1)$ — (2), где T_1 и T_2 — температура в начале и в конце расширения. Участок EB — изохора, следовательно, $Q_1 = \frac{m}{\mu} C_V (T_3 - T_0)$ — (3), где T_3 и T_0 — температура в начале и в конце процесса. Подставляя (2) и (3) в формулу (1), имеем $A = \frac{m}{\mu} C_V [\gamma (T_2 - T_1) - (T_3 - T_0)]$ — (4), откуда $\eta = \frac{A}{Q_1} = 1 - \frac{1}{\gamma} \frac{T_3 - T_0}{T_2 - T_1}$ — (5). Кроме того, температуры T_0, T_1 и T_3 можно выразить через T_2. Для изобары CD имеем $\frac{T_2}{T_1} = \frac{V_3}{V_1} = \beta$ — степень изобарического расширения, и, следовательно, $T_1 = T_2 / \beta$. Для адиабаты DE имеем $\frac{T_2}{T_3} = \left(\frac{V_2}{V_3}\right)^{\gamma - 1} = \delta^{\gamma - 1}$, где δ — степень адиабатического расширения; следовательно, $T_3 = \frac{T_2}{\delta^{\gamma - 1}}$. Для адиабаты BC имеем $\frac{T_1}{T_0} = \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{\gamma - 1} = \varepsilon^{\gamma - 1}$, где ε — степень адиабатического сжатия; следовательно, $T_0 = \frac{T_1}{\delta^{\gamma - 1}} = \frac{T_2}{\beta \varepsilon^{\gamma - 1}}$. Подставляя полученные значения T_0, T_1 и T_3 в (5) и учитывая, что $\beta = \frac{\varepsilon}{\delta}$, получим $\eta = 1 - \frac{\beta \gamma - 1}{\gamma \varepsilon^{\gamma - 1} (\beta - 1)}$.

5.215 Двигатель внутреннего сгорания Дизеля имеет степень адиабатического сжатия ε = 16 и степень адиабатического расширения δ = 6,4. Какую минимальную массу m нефти потребляет двигатель мощностью P = 36,8 кВт за время t = 1 ч? Показатель адиабаты γ = 1,3. Удельная теплота сгорания нефти q = 46 МДж/кг.

Решение

К. п. д. двигателя $\eta = \frac{A}{Q} = \frac{Pt}{mq}$ — (1), откуда $m = \frac{Pt}{\eta q}$. С другой стороны, $\eta = 1 - \frac{\beta\gamma - 1}{\gamma\varepsilon^{\gamma-1}(\beta - 1)}$ — (2) (см. задачу 2.214). В условиях данной задачи $\beta = \frac{\varepsilon}{\delta} = \frac{16}{6,4} = 2,5$; $\gamma = 1,3$; $\beta\gamma = 3,29$; $\beta^\gamma - 1 = 2,29$; $\varepsilon^{\gamma-1} = 2,30$; $\beta - 1 = 1,5$. Подставляя эти данные в (2), получим $\eta = 0,49 = 49\%$. Тогда $m = 5,9$ кг.

5.216 Найти изменение ΔS энтропии при превращении массы m = 10 г льда (t = -20 °С) в пар (t_n = 100 °С).

Решение

Изменение энтропии при переходе вещества из состояния 1 в состояние 2 $\Delta S = \int_1^2 \frac{dQ}{T}$, где, согласно первому началу термодинамики, $dQ = dU + dA = \frac{m}{\mu}C_V dT + pdV$. Т. к. из уравнения Менделеева — Клапейрона давление $p = \frac{m}{\mu}\frac{RT}{V}$, то $dQ = \frac{m}{\mu}C_V dT + \frac{m}{\mu}\frac{RT}{V}dV$. При переходе из одного агрегатного состояния в другое, общее изменение энтропии складывается из изменений ее в отдельных процессах. При нагревании льда от T до T_0 (T_0 — температура плавления) $\Delta S_1 = \int_T^{T_0} \frac{mc_л dT}{T} = mc_л \ln\frac{T_0}{T}$, где $c_л = 2,1$ кДж/(кг·К) — удельная теплоемкость льда. При плавлении льда $\Delta S_2 = \int_1^2 \frac{dQ}{T_0} = \frac{m\lambda}{T_0}$, где $\lambda = 0,33$ МДж/кг — удельная теплота плавления. При нагревании воды от T_0 до $T_п$ $\Delta S_3 = \int_{T_0}^{T_п} \frac{mc_в dT}{T} = mc_в \ln\frac{T_п}{T_0}$, где $c_в = 4,19$ кДж/(кг·К) — удельная теплоемкость воды. При испарении воды при температуре $T_п$ $\Delta S_4 = \int_1^2 \frac{dQ}{T_п} = \frac{mr}{T_п}$, где $r = 2,26$ МДж/кг — удельная теплота парообразования. Общее изменение энтропии $\Delta S = \Delta S_1 + \Delta S_2 + \Delta S_3 + \Delta S_4$; $\Delta S = mc_л \ln\frac{T_0}{T} + \frac{m\lambda}{T_0} + mc_в \ln\frac{T_п}{T_0} + \frac{mr}{T_п}$; $\Delta S = 88$ Дж/К.

5.217 Найти прирост ΔS энтропии при превращении массы 1 г воды при (t = 0 °C) в пар ($t_п$ 100 °C).

Решение

Общее изменение энтропии ΔS складывается из изменения энтропии ΔS_1 при нагревании массы m воды от температуры T до температуры $T_п$ и изменения энтропии ΔS_2 при испарении массы m воды. $\Delta S_1 = mc\,ln\dfrac{T_п}{T}$, где $c = 4{,}19$ кДж/кг·К — удельная теплоемкость воды. $\Delta S_2 = \dfrac{mr}{T_п}$, где $r = 2{,}26$ МДж/кг — удельная теплота парообразования. Тогда $\Delta S = m\left(c\,ln\dfrac{T_п}{T} + \dfrac{r}{T_п}\right)$; $\Delta S = 7{,}4$ Дж/К.

5.218 Найти изменение ΔS энтропии при плавлении массы m = 1 кг льда (t = 0 °C).

Решение

При, плавлении массы m льда при температуре T имеем $\Delta S = \dfrac{m\lambda}{T}$, где $\lambda = 0.33$ МДж/кг — удельная теплота плавления. $\Delta S = 1209$ Дж/кг.

5.219 Массу m = 640 г расплавленного свинца при температуре плавления $t_{пл}$ вылили на лед (t = 0 °C). Найти изменение ΔS энтропии при этом процессе.

Решение

Предположим, что система «свинец — лед» замкнута, т.е. потерь тепла во внешнюю среду не происходит и весь образовавшийся пар сконденсировался и остался внутри системы в виде воды. Тогда изменение энтропии системы ΔS будет складываться из изменения энтропии свинца ΔS_1 при затвердевании, изменения энтропии свинца ΔS_2 при охлаждении до $t = 0°$ C и изменения энтропии льда при таянии ΔS_3. Т. е. $\Delta S = \Delta S_1 + \Delta S_2 + \Delta S_3$. Задачу рассматриваем при условии, что льда имеется достаточное количество для поддержания температуры $t = 0°$ C. Обозначим $T_1 = 600$ К — температура плавления свинца, $T_2 = 273$ К — температура льда. Имеем $dS_1 = dQ_1 / T$ или $\Delta S_1 = -\int_1^2 \dfrac{dQ_1}{T_1} = -\dfrac{m\lambda}{T_1}$, где $\lambda = 22.6$ кДж/кг — удельная теплота плавления (кристаллизации) свинца. $dS_2 = \frac{dQ_2}{T}$, откуда $\Delta S_2 = \int_{T_1}^{T_2} \frac{mc_c dT}{T} = mc_c \ln\frac{T_2}{T_1}$, где $c_c = 126$ Дж/(кг·К) — удельная теплоемкость свинца. $dS_3 = \frac{dQ_3}{T}$ или $\Delta S_3 = \frac{Q_3}{T_2}$. В соответствии с законом сохранения энергии $Q_3 = Q_1 + Q_2 = \lambda m + cm(T_1 - T_2)$, отсюда $\Delta S_3 = \frac{\lambda m + cm(T_1 - T_2)}{T_2}$. Следовательно, полное изменение энтропии системы $\Delta S = -\frac{m\lambda}{T_1} + mc_c \ln\frac{T_2}{T_1} + \frac{\lambda m + cm(T_1 - T_2)}{T_2}$. Подставляя в полученную формулу числовые данные, окончательно получаем $\Delta S = -\frac{0{,}64 \cdot 22{,}6 \cdot 10^3}{600} + 0{,}64 \cdot 126 \cdot (-0{,}79) + \frac{22{,}6 \cdot 10^3 \cdot 0{,}64 + 126 \cdot 0{,}64(600 - 273)}{273} = 62{,}2$ Дж/К.

5.220 Найти изменение ΔS энтропии при переходе массы m = 8 г кислорода от объема V_1 = 10 л при температуре t_1 = 80 °С к объему V_2 = 40 л при температуре t_2 = 300 °С.

Решение

Изменение энтропии при переходе вещества из состояния 1 в состояние 2 $\Delta S = \int_1^2 \frac{dQ}{T}$, где, согласно первому началу термодинамики, $dQ = dU + dA = \frac{m}{\mu} C_V dT + pdV$. Т. к. из уравнения Менделеева — Клапейрона давление $p = \frac{m}{\mu} \times \frac{RT}{V}$, то $dQ = \frac{m}{\mu} C_V dT + \frac{m}{\mu}\frac{RT}{V} dV$. Тогда $\Delta S = \int_1^2 \frac{m}{\mu} C_V dT + \int_1^2 \frac{m}{\mu}\frac{RT}{V} dV$; $\Delta S = \frac{m}{\mu} C_V \cdot \ln\frac{T_2}{T_1} + \frac{m}{\mu} R \ln\frac{V_2}{V_1} = 5.4$ Дж/кг.

5.221 Найти изменение ΔS энтропии при переходе массы m = 6 г водорода от объема V_1 = 20 л под давлением p_1 = 150 кПа к объему V_2 = 60 л под давлением p_2 = 100 кПа.

Решение

Имеем $\Delta S = \frac{m}{\mu} C_V \ln\frac{T_2}{T_1} + \frac{m}{\mu} R \ln\frac{V_2}{V_1}$ (см. задачу 5.220). Т. к. из уравнения Менделеева — Клапейрона $\frac{T_2}{T_1} = \frac{p_2 V_2}{p_1 V_1}$, то $\Delta S = \frac{m}{\mu} C_V \ln\frac{p_2}{p_1} + \frac{m}{\mu} C_V \ln\frac{V_2}{V_1} + \frac{m}{\mu} R \ln\frac{V_2}{V_1}$; $\Delta S = \frac{m}{\mu} C_V \ln\frac{p_2}{p_1} + \frac{m}{\mu} C_p \ln\frac{V_2}{V_1}$; $\Delta S = 71$ Дж/К.

5.222 Масса m = 6,6 г водорода расширяется изобарически от объема V_1 до объема $V_2 = 2V_1$. Найти изменение ΔS энтропии при этом расширении.

Решение

В предыдущей задаче мы выразили изменение энтропии через параметры p и V: $\Delta S = \frac{m}{\mu} C_V \ln\frac{p_2}{p_1} + \frac{m}{\mu} C_p \ln\frac{V_2}{V_1}$. При $p = const$ первое слагаемое обращается в ноль, тогда $\Delta S = \frac{m}{\mu} C_p \ln\frac{V_2}{V_1} = 66{,}3$ Дж/К.

5.223 Найти изменение ΔS энтропии при изобарическом расширении массы m = 8 г гелия от объема V_1 = 10 л до объема V_2 = 25 л.

Решение

Изменение энтропии $\Delta S = \int_1^2 \frac{dQ}{T}$, где $dQ = c_p m dT$, т. к. $p = const$. Теплоемкость при постоянном давлении $C_p = \frac{i+2}{2}\frac{R}{\mu}$, тогда $\Delta S = \int_1^2 c_p m \frac{dT}{T} = \frac{i+2}{2}\frac{m}{\mu} R \ln T \Big|_1^2 = \frac{i+2}{2}\frac{m}{\mu} R \ln\frac{T_2}{T_1}$. Т. к. гелий — одноатомный газ, то число степеней свободы $i = 3$, и т. к. $p = const$, то $\frac{V_1}{T_1} = \frac{V_2}{T_2}$ или $\frac{V_2}{V_1} = \frac{T_2}{T_1}$, следовательно, $\Delta S = \frac{5}{2}\frac{m}{\mu} R \ln\frac{V_2}{V_1}$; $\Delta S = 38{,}1$ Дж/К.

5.224 Найти изменение ΔS энтропии при изотермическом расширении массы m = 6 г водорода от давления p_1= 100 кПа до давления p_2 = 50 кПа.

Решение

Имеем $\Delta S = \frac{m}{\mu} C_V \ln\frac{T_2}{T_1} + \frac{m}{\mu} R \ln\frac{V_2}{V_1}$ (см. задачу 5.220). Т. к. при изотермическом процессе $\frac{V_2}{V_1} = \frac{p_1}{p_2}$, а $\ln\frac{T_2}{T_1} = 0$, то изменение ΔS энтропии при изотермическом расширении: $\Delta S = \frac{m}{\mu} R \ln\frac{p_1}{p_2} = 17{,}3$ Дж/К.

5.225 Масса m = 10,5 г азота изотермически расширяется от объема V_1 = 2 л до объема V_2 = 5 л. Найти изменение ΔS энтропии при этом процессе.

Решение

Изменение энтропии $\Delta S = \int_1^2 \frac{dQ}{T}$, где $dQ = pdV$. Из уравнения Менделеева — Клапейрона $pV = \frac{m}{\mu} RT$ давление $p = \frac{m}{\mu}\frac{RT}{V}$, тогда $dQ = \frac{m}{\mu} RT \frac{dV}{V}$, а изменение энтропии $\Delta S = \frac{m}{\mu} R \int_1^2 \frac{dV}{V} = \frac{m}{\mu} R \ln\frac{V_2}{V_1}$; $\Delta S = 2{,}85$ Дж/К.

5.226 Масса m = 10 г кислорода нагревается от температуры t_1 = 50 °C до температуры t_2 = 150 °С. Найти изменение ΔS энтропии, если нагревание происходит: а) изохорически; б) изобарически.

Решение

а) При изохорическом нагревании $dQ = c_V m dT$, тогда изменение энтропии $\Delta S = \int_1^2 \frac{dQ}{T} = c_V m \int_1^2 \frac{dT}{T} = \frac{i}{2}\frac{m}{\mu} R \ln\frac{T_2}{T_1}$. Т. к. кислород — двухатомный газ, то число степеней свободы $i = 5$ и изменение энтропии $\Delta S = \frac{7}{2}\frac{m}{\mu} R \ln\frac{T_2}{T_1}$; $\Delta S = 1{,}75$ Дж/К. б) При изобарическом расширении (см. задачу 5.223), изменение энтропии $\Delta S = \frac{7}{2}\frac{m}{\mu} R \ln\frac{T_2}{T_1}$; $\Delta S = 2{,}45$ Дж/К.

5.227 При нагревании количества $\nu = 1$ кмоль двухатомного газа его термодинамическая температура увеличивается от T_1 до $T_2 = 1{,}5T_1$. Найти изменение ΔS энтропии, если нагревание происходит: а) изохорически; б) изобарически.

Решение

Т. к. по условию газ двухатомный, то число степеней свободы $i = 5$. а) При изохорическом нагревании (см. задачу 5.226) изменение энтропии $\Delta S = \frac{5}{2}\frac{m}{\mu}R\ln\frac{T_2}{T_1} = \frac{5}{2}\nu R\ln\frac{T_2}{T_1}$; $\Delta S = 8{,}5$ кДж/К. б) При изобарическом нагревании изменение энтропии $\Delta S = \frac{7}{2}\frac{m}{\mu}R\ln\frac{T_2}{T_1} = \frac{7}{2}\nu R\ln\frac{T_2}{T_1}$; $\Delta S = 11{,}8$ кДж/К.

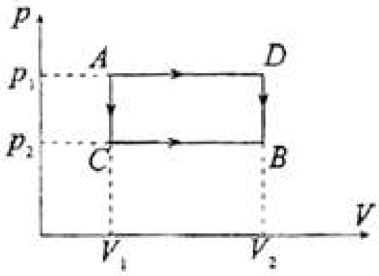
5.228 В результате нагревания массы $m = 22$ г азота его термодинамическая температура увеличилась от T_1 до $T_2 = 1{,}2T_1$, а энтропия увеличилась на $\Delta S = 4{,}19$ Дж/К. При каких условиях производилось нагревание азота (при постоянном объеме или при постоянном давлении)?

Решение

Изменение энтропии (см. задачу 5.226) $\Delta S = \frac{x}{2}\frac{m}{\mu}R\ln\frac{T_2}{T_1}$, причем если $x = 7$, то $p = const$, а если $x = 5$, то $V = const$. Тогда $x = \frac{2\mu\Delta S}{mR\ln(T_2/T_1)}$; $x = 7$, значит, нагревание производилось при постоянном давлении.

5.229 Некоторая масса кислорода занимает объем $V_1 = 3$ л при температуре $t_1 = 27$ °С и давлении $p_1 = 820$ кПа. В другом состоянии газ имеет параметры $V_2 = 4{,}5$ л и $p_2 = 600$ кПа. Найти изменение ΔS энтропии при переходе газа из состояния A в состояние B, если переход совершается: а) по участку ACB; б) по участку ADB.

Решение



а) По участку ACB, изменение энтропии $\Delta S = \Delta S_{AC} + \Delta S_{CB}$, где при $V_1 = const$ (см. задачу 5.226) $\Delta S_{AC} = \frac{7}{2}\frac{m}{\mu}R\ln\frac{T_2}{T_1}$, а при давлении $p_2 = const$ $\Delta S_{CB} = \frac{7}{2}\frac{m}{\mu}R \times \ln\frac{T_2}{T_1}$. Тогда на всем участке ACB $\Delta S = 7\frac{m}{\mu}R\ln\frac{T_2}{T_1}$. Из уравнения Менделеева — Клапейрона $p_1V_1 = \frac{m}{\mu}RT_1$ имеем $\frac{m}{\mu}R = \frac{p_1V_1}{T_1}$, следовательно,

$\Delta S = \frac{7p_1V_1}{T_1} ln\frac{T_2}{T_1}$. Учитывая, что $\frac{p_1V_1}{T_1} = \frac{p_2V_2}{T_2}$ или $\frac{T_2}{T_1} = \frac{p_2V_2}{p_1V_1}$, окончательно находим $\Delta S = \frac{7p_1V_1}{T_1} ln\frac{p_2V_2}{p_1V_1}$; $\Delta S = 5{,}4$ Дж/К. б) По участку ADB, изменение энтропии $\Delta S = \Delta S_{AD} + \Delta S_{DB}$, где $\Delta S_{AD} = \frac{7}{2}\frac{m}{\mu} R ln\frac{T_2}{T_1}$ и $S_{DB} = \frac{7}{2}\frac{m}{\mu} R ln\frac{T_2}{T_1}$, отсюда, $\Delta S = 7\frac{m}{\mu} R ln\frac{T_2}{T_1} = \frac{7p_1V_1}{T_1} ln\frac{T_2}{T_1}$ или $\Delta S = \frac{7p_1V_1}{T_1} ln\frac{p_2V_2}{p_1V_1}$; $\Delta S = 5.4$ Дж/К. Таким образом, изменение энтропии ΔS не зависит от того, каким образом осуществляется переход газа из одного состояния в другое.

5.230 Объем $V_1 = 1$ м^3 воздуха, находящегося при температуре $t_1 = 0$ °C и давлении $p_1 = 98$ кПа, изотермически расширяется от объема V_1 до объема $V_2 = 2V_1$. Найти изменение ΔS энтропии при этом процессе.

Решение

При изотермическом расширении изменение энтропии (см. задачу 5.225) $\Delta S = \frac{m}{\mu} R ln\frac{V_2}{V_1}$. Из уравнения Менделеева — Клапейрона $p_1V_1 = \frac{m}{\mu} RT_1$ имеем $\frac{m}{\mu} R = \frac{p_1V_1}{T_1}$, тогда изменение энтропии $\Delta S = \frac{p_1V_1}{T_1} ln\frac{V_2}{V_1} = \frac{p_1V_1}{T_1} ln\frac{2V_1}{V_1} = 500$ Дж/К.

5.231 Изменение энтропии на участке между двумя адиабатами в цикле Карно $\Delta S = 4{,}19$ кДж/К. Разность температур между двумя изотермами $\Delta T = 100$ К. Какое количество теплоты Q превращается в работу в этом цикле?

Решение

Изменение энтропии $\Delta S = \int \frac{dQ}{T} = \frac{Q}{T_1}$, откуда $T_1 = \frac{Q}{\Delta S}$ — температура нагревателя. К. п. д. цикла Карно $\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1} = \frac{\Delta T \Delta S}{Q}$. С другой стороны, $\eta = \frac{A}{Q}$, тогда $\frac{\Delta T \Delta S}{Q} = \frac{A}{Q}$, откуда $A = \Delta S \Delta T$; $A = 419$ кДж.

§ 6. Реальные газы

6.1 В каких единицах системы СИ выражаются постоянные a и b, входящие в уравнение Ван-дер-Ваальса?

Решение

Постоянные a и b из уравнения Ван-дер-Ваальса выражаются соотношениями $a = \frac{27T_к^2R^2}{64p_к}$; $b = \frac{T_кR}{8p_к}$. Подставив единицы измерения величин, входящих в данные уравнения, получим $[a] = \left[\frac{Па \cdot м^3}{моль^2}\right]$; $[b] = \left[\frac{м^3}{моль}\right]$.

6.2 Пользуясь данными о критических величинах $T_к$ и $p_к$ для некоторых газов (смотри таблицу) найти для них постоянные a и b , входящие в уравнение Ван-дер-Ваальса.

Решение

Постоянные a и b из уравнения Ван-дер-Ваальса выражаются соотношениями $a = \frac{27T_к^2R^2}{64p_к}$; $b = \frac{T_кR}{8p_к}$. Воспользовавшись данными о критических величинах $T_к$ и $p_к$ из таблицы 7, составим следующую таблицу:

Вещество	a, Па·м^6/моль^2	b, 10^{-5} м^3/моль
Водяной пар	0,556	3,06
Углекислый газ	0,364	4,26
Кислород	0,136	3,16
Аргон	0,136	3,22
Азот	0,136	3,85
Водород	0,0244	2,63
Гелий	0,00343	2,34

6.3 Какую температуру Т имеет масса $m = 2$ г азота, занимающего объем $V = 820$ см^3 при давлении $p = 0,2$ МПа? Газ рассматривать как: а) идеальный; б) реальный.

Решение

а) Идеальные газы подчиняются уравнению Менделеева — Клапейрона $pV = \frac{m}{\mu}RT$, откуда $T = \frac{\mu pV}{mR} = 280$ К.

б) Реальные газы подчиняются уравнению Ван-дер-Ваальса $\left(p + \frac{m^2}{\mu^2}\frac{a}{V^2}\right)\left(V - \frac{m}{\mu}b\right) = \frac{m}{\mu}RT$, следовательно, температура $T = \frac{\mu}{mR}\left(p + \frac{m^2}{\mu^2}\frac{a}{V^2}\right)\left(V - \frac{m}{\mu}b\right) = 280$ К. Таким образом, при данном давлении газ ведет себя как идеальный.

6.4 Какую температуру T имеет масса m = 3,5 г кислорода занимающего объем V = 90 см^3 при давлении p = 2,8 МПа? Газ рассматривать как: а) идеальный; б) реальный.

Решение

Если рассматривать кислород в данных условиях как идеальный газ, то его состояние описывается уравнением Менделеева — Клапейрона: $pV = \frac{m}{\mu}RT$, откуда $T = \frac{\mu pV}{mR}$.

$T = \frac{0.032 \cdot 2{,}8 \cdot 10^6 \cdot 90 \cdot 10^{-6}}{3{,}5 \cdot 10^{-3} \cdot 8{,}31} = 277$ К. Если рассматривать газ как реальный, то его состояние описывается уравнением Ван-дер-Ваальса: $\left(p + \frac{m^2}{\mu^2}\frac{a}{V^2}\right)\left(V - \frac{m}{\mu}b\right) = \frac{m}{\mu}RT$. Воспользовавшись полученными в задаче 6.2 константами a и b, выразим из последнего уравнения температуру $T = \frac{\mu\left(p + \left(m^2/\mu^2\right)\left(a/V^2\right)\right)\left(V - bm/\mu\right)}{mR}$. Подставляя в полученное выражение числовые данные, найдем

$$T = \frac{0{,}032\left(2{,}8 \cdot 10^6 + \frac{3{,}5^2 \cdot 10^{-6}}{0{,}032^2}\frac{0{,}136}{90^2 \cdot 10^{-12}}\right)}{3{,}5 \cdot 10^{-3} \cdot 8{,}31} \times$$

$$\times \frac{\left(90 \cdot 10^{-6} - \frac{3{,}5 \cdot 10^{-3}}{0{,}032} 3{,}16 \cdot 10^{-5}\right)}{3{,}5 \cdot 10^{-3} \cdot 8{,}31} = 285{,}7 \text{ К}.$$

6.5 Масса m = 10 г гелия занимает объем V = 100 см^3 при давлении p = 100 МПа. Найти температуру T газа, считая его: а) идеальным; б) реальным.

Решение

Идеальный газ подчиняется уравнению Менделеева — Клапейрона: $pV = \frac{m}{\mu}RT$, откуда $T = \frac{\mu pV}{mR}$; $T = 482$ К.

Состояние реального газа описывается уравнением Ван-дер-Ваальса, откуда выразим температуру $T = \frac{\mu\left(p + \left(m^2/\mu^2\right)\left(a/V^2\right)\right)\left(V - bm/\mu\right)}{mR}$ (см. задачу 6.4).

Значения постоянных a и b были получены в задаче 6.2. Подставив числовые данные, найдем T = 204 К.

6.6 Количество $\nu = 1$ кмоль углекислого газа находится при температуре $t = 100$ °С. Найти давление p газа, считая его: а) реальным; б) идеальным. Задачу решить для объемов $V_1 = 1$ м^3 и $V_2 = 0{,}05$ м^3.

Решение

а) Для реального газа, согласно уравнению Ван-дер-Ваальса, $\left(p + \nu^2 \dfrac{a}{V^2}\right)(V - \nu b) = \nu RT$, откуда $p = \dfrac{\nu RT}{V - \nu b} - \nu^2 \dfrac{a}{V^2}$. В таблице из задачи 6.2 найдем для углекислого газа: $a = 0{,}364$ Па·м^6/моль^2 ; $b = 4{,}26 \cdot 10^{-5}$ м^3/моль. Подставив числовые данные, получим $p_1 = 2{,}87$ МПа ; $p_2 = 277$ МПа.

б) Согласно уравнению Менделеева — Клапейрона $pV = \nu RT$, откуда $p = \dfrac{\nu RT}{V}$. Подставив числовые данные, получим $p_1 = 3{,}09$ МПа ; $p_2 = 61{,}8$ МПа.

6.7 В закрытом сосуде объемом $V = 0{,}5$ м^3 находится количество $\nu = 0{,}6$ кмоль углекислого газа при давлении $p = 3$ МПа. Пользуясь уравнением Ван-дер-Ваальса, найти, во сколько раз надо увеличить температуру газа, чтобы давление увеличилось вдвое.

Решение

Из уравнения Ван-дер-Ваальса $T_1 = \dfrac{\mu}{mR}\left(p + \dfrac{m^2}{\mu^2}\dfrac{a}{V^2}\right) \times \left(V - \dfrac{m}{\mu} b\right)$; $T_2 = \dfrac{\mu}{mR}\left(2p + \dfrac{m^2}{\mu^2}\dfrac{a}{V^2}\right)\left(V - \dfrac{m}{\mu} b\right)$ (см. задачу 6.3). Тогда $\dfrac{T_2}{T_1} = \dfrac{2p + p_i}{p + p_i}$, где $p_i = \dfrac{\nu^2 a}{V^2}$; $\dfrac{T_2}{T_1} = 1{,}85$.

6.8 Количество $\nu = 1$ кмоль кислорода находится при температуре $t = 27$ °С и давлении $p = 10$ МПа. Найти объем V газа, считая, что кислород при данных условиях ведет себя как реальный газ.

Решение

Чтобы найти объем из уравнения Ван-дер-Ваальса, необходимо решить уравнение третьей степени. В результате мы получили бы три корня, один из которых соответствует газообразному состоянию вещества. Его можно найти более простым методом последовательных приближений. Из уравнения Ван-дер-Ваальса для некоторого количества ν кислорода имеем $V = \dfrac{\nu RT}{p + \nu^2 a / V^2} + \nu b = \dfrac{\nu RT}{p + p_i} + \nu b$ — (1).

В качестве первого приближения возьмем объем, получаемый из уравнения Менделеева — Клапейрона $V_1 = \frac{\nu RT}{p} = 0{,}24\ м^3$. Тогда $p_i = \frac{\nu^2 a}{V_1^2} = 2{,}4$ МПа. Подставляя p_i в (1), получим второе приближение $V_2 = 0{,}232\ м^3$. Тогда $p_i = \frac{\nu^2 a}{V_2^2} = 2{,}53$ МПа, откуда третье приближение $V_3 = 0{,}231\ м^3$. Далее $p_i = \frac{\nu^2 a}{V_3^2} = 2{,}55$ МПа; $V_4 = 0{,}231\ м^3$. Таким образом, искомый объем $V = 231$ л.

6.9 Количество $\nu = 1$ кмоль азота находится при температуре $t = 27$ °С и давлении $p = 5$ МПа. Найти объем V газа, считая, что азот при данных условиях ведет себя как реальный газ.

Решение

Чтобы найти объем из уравнения Ван-дер-Ваальса, необходимо решить уравнение третьей степени. В результате мы получили бы три корня, один из которых соответствует газообразному состоянию вещества. Его можно найти более простым методом последовательных приближений. Из уравнения Ван-дер-Ваальса для некоторого количества ν имеем $V = \frac{\nu RT}{p + \nu^2 a/V^2} + \nu b = \frac{\nu RT}{p + p_i} + \nu b$ — (1).

В качестве первого приближения возьмем объем, получаемый из уравнения Менделеева — Клапейрона $V_1 = \frac{\nu RT}{p}$. Тогда $p_i = \frac{\nu^2 a}{V_1^2}$. Подставляя p_i в (1), получим второе приближение V_2. Тогда $p_i = \frac{\nu^2 a}{V_2^2} = 2{,}53$ МПа, откуда третье приближение V_3. Далее $p_i = \frac{\nu^2 a}{V_3^2}$; $V_4 = 0{,}490 м^3$.

Таким образом, искомый объем $V = 490$ л.

6.10 Найти эффективный диаметр σ молекулы кислорода, считая известными для кислорода критические значения $T_к$ и $P_к$.

Решение

Поскольку $b \approx 4V$, где V — объем всех молекул, $V = V_0 N_А$, где V_0 — объем одной молекулы, и, кроме того, $b = \frac{T_к R}{8 p_к}$, то $4V_0 N_А = \frac{T_к R}{8 p_к}$. Отсюда $V_0 = \frac{RT_к}{32 N_А p_к} = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{1}{6}\pi\sigma^3$. Отсюда $\sigma = \sqrt[3]{\frac{3RT_к}{16\pi N_А p_к}}$; $\sigma = 294 \cdot 10^{-12}$ м.

6.11 Найти эффективный диаметр σ молекулы азота двумя способами: а) по данному значению средней длины свободного пробега молекул при нормальных условиях $\lambda_{ср}$ = 95 нм; б) по известному значению постоянной b в уравнении Ван-дер-Ваальса.

Решение

а) Средняя длина свободного пробега молекул (см. задачу 5.120) $\lambda = \frac{kT}{\sqrt{2}\pi\sigma^2 p}$, следовательно, $\sigma^2 = \frac{kT}{\sqrt{2}\pi p\lambda}$. Тогда $\sigma = \sqrt{\frac{kT}{\sqrt{2}\pi p\lambda}}$; $\sigma = 298\cdot10^{-12}$ м. б) Постоянная Ван-дер-Ваальса b, вычисленная по формуле $b = \frac{2}{3}N_A\pi\sigma^3$, откуда $\sigma^3 = \frac{3b}{2\pi N_A}$. Тогда $\sigma = \sqrt[3]{\frac{3b}{2\pi N_A}}$; $\sigma = 313\cdot10^{-12}$ м.

6.12 Найти среднюю длину свободного пробега $\lambda_{ср}$ молекул углекислого газа при нормальных условиях. Эффективный диаметр σ молекулы вычислить, считая известными для углекислого газа критические значения $T_к$ и $p_к$.

Решение

Критическое давление и критическая температура соответственно равны: $p_к = \frac{a}{27b^2}$ — (1) и $T_к = \frac{8a}{27bR}$ — (2). Из (1) $a = 27b^2 p_к$, подставим в (2) $T_к = \frac{8\cdot27b^2 p_к}{27bR} = \frac{8bp_к}{R}$. Тогда постоянная Ван-дер-Ваальса $b = \frac{T_к R}{8p_к}$. Эффективный диаметр молекулы (см. задачу 6.11(б)) $\sigma = \sqrt[3]{\frac{3b}{2\pi N_A}} = \sqrt[3]{\frac{3T_к R}{16\pi p_к N_A}} = \sqrt[3]{\frac{3T_к k}{16\pi p_к}}$. Тогда средняя длина свободного пробега молекул газа $\lambda = \frac{kT}{\sqrt{2}\pi\sigma^2 p} =$

$$= \frac{kT}{\sqrt{2}\pi p\left(3T_к k/(16\pi p_к)\right)^{\frac{2}{3}}};\ \lambda = 80 \text{ нм}.$$

6.13 Найти коэффициент диффузии D гелия при температуре t = 17 °С и давлении p = 150 КПа. Эффективный диаметр атома σ вычислить, считая известными для гелия критические значения $T_к$ и $p_к$.

Решение

Средняя длина свободного пробега молекул (см. задачу 6.12) $\lambda = \dfrac{kT}{\sqrt{2}\pi p\left(3T_к k/(16\pi p_к)\right)^{\frac{2}{3}}}$. Коэффициент диффузии $D = \dfrac{1}{3}\bar{v}\lambda$, где $\bar{v} = \sqrt{\dfrac{8RT}{\pi\mu}}$ — средняя арифметическая скорость молекул гелия. Тогда коэффициент диффузии $D = \dfrac{1}{3}\sqrt{\dfrac{8RT}{\pi\mu}}\dfrac{kT}{\sqrt{2}\pi p\left(3T_к k/(16\pi p_к)\right)^{\frac{3}{2}}}$; $D \approx 3{,}5\cdot10^{-5}$ м^2/с.

6.14 Построить изотермы $p = F(v)$ для количества v = 1 кмоль углекислого газа при температуре t = 0 ºС рассматривать как: а) идеальный; б) реальный. Значения V (в л/моль) для реального газа взять следующие: 0,07, 0,08, 0,10, 0,12, 0,14, 0,16, 0,18, 0,20, 0,25, 0,30, 0,35 и 0,40; для идеального газа — в интервале $0{,}2 \le V \le 0{,}4$ л/моль.

Решение

а) Для идеального газа, исходя из уравнения Менделеева — Клапейрона, имеем $pV = \nu RT$, отсюда $p = \dfrac{\nu RT}{V}$.

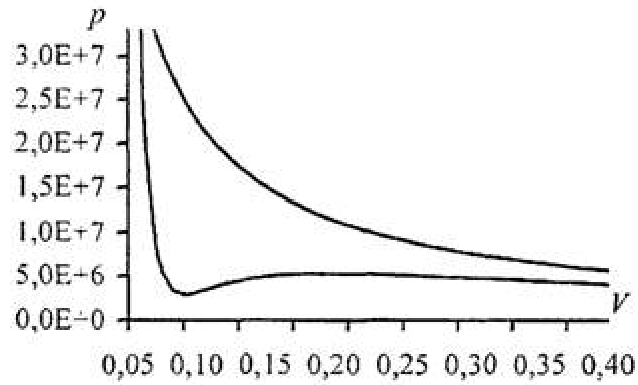
б) Для реального газа из уравнения Ван-дер-Ваальса $\left(p + \nu^2\dfrac{a}{V^2}\right)\left(V - \dfrac{m}{\mu}b\right) = \nu RT$ имеем $p + \nu^2\dfrac{a}{V^2} = \dfrac{\nu RT}{V - \nu b}$ или $p = \dfrac{\nu RT}{V - \nu b} - \nu^2\dfrac{a}{V^2}$. Зависимость $p(V)$ дана в таблицах и на графике, где верхняя изотерма соответствует идеальному газу, нижняя — реальному.

Для реального газа:

V, л/моль	0.07	0.08	0.09	0.10	0.12	0,14	0.16	0.18	0.20	0,25	0.30	0.35	0.40
$P.10^4$ Па	85.1	37.8	29.2	31,2	40.3	47.2	51.1	52,8	53,1	51,1	47,7	44,1	40.7

Для идеального газа:

V, л/моль	0.20	0.22	0.23	0.25	0.27	0.28	0,30	0,32	0,33	0.35	0,37	0,38	0.4
$P.10^4$ Па	85.1	37.8	29.2	31,2	40.3	47,2	51.1	52,8	53,1	51,1	47,7	44,1	40.7



6.15 Найти давление p_i, обусловленное силами взаимодействия молекул, заключенных в количестве ν = 1 кмоль газа при нормальных условиях. Критическая температура и критическое давление этого газа равны $T_к$ = 417 К и $p_к$ = 7,7 МПа.

Решение

Давление, обусловленное силами взаимодействия молекул $p_i = \frac{m^2}{\mu^2}\frac{a}{V^2} = \nu^2\frac{a}{V^2}$, где $a = \frac{27T_к^2R^2}{64p_к}$ — постоянная Ван-дер-Ваальса. Тогда $p_i = \frac{27\nu^2T_к^2R^2}{64p_кV^2}$. Из уравнения Менделеева — Клапейрона $pV = \nu RT$ выразим объем $V = \frac{\nu RT}{p}$, тогда $V^2 = \frac{\nu^2R^2T^2}{p^2}$, следовательно, окончательно $p_i = \frac{27\nu^2T_к^2R^2p^2}{64p_к\nu^2R^2T^2} = \frac{27T_к^2p^2}{64p_кT^2}$; $p_i = 1{,}31$ кПа.

6.16 Для водорода силы взаимодействия между молекулами незначительны; преимущественную роль играют собственные размеры молекул. Написать уравнение состояния такого полуидеального газа. Какую ошибку мы допустим при нахождении количества водорода ν, находящегося в некотором объеме при температуре t = 0 °С и давлении p = 280 МПа, не учитывая собственного объема молекул?

Решение

Поскольку силы взаимодействия между молекулами водорода незначительны, то в уравнении Ван-дер-Ваальса можно не учитывать параметр p_i. Уравнение такого газа будет иметь вид $p\left(V - \frac{m}{\mu}b\right) = \frac{m}{\mu}RT$ — (1). Количество ν водорода без учета собственного объема молекул можно найти из уравнения Менделеева — Клапейрона: $\nu = \frac{pV}{RT}$ — (2). С учетом собственного объема молекул из уравнения (1) $\delta = \frac{\nu - \nu'}{\nu'}$. Подставляя в последнее уравнение (2) и (3), получим $\delta = \frac{pb}{RT}$; $\delta = 0{,}33 = 33\%$.

6.17 В сосуде объемом V = 10 л находится масса m = 0,25 кг азота при температуре t = 27 °С. Какую часть давления газа составляет давление, обусловленное силами взаимодействия молекул? Какую часть объема сосуда составляет собственный объем молекул?

Решение

Давление, обусловленное силами взаимодействия молекул $p_i = \frac{m^2}{\mu^2}\frac{a}{V^2}$. Из уравнения Менделеева — Клапейрона $pV = \frac{m}{\mu}RT$ имеем $p = \frac{m}{\mu}\frac{RT}{V}$, тогда $\frac{p_i}{p} = \frac{m^2}{\mu^2}\frac{a}{V^2}\frac{\mu}{m}\frac{V}{RT} = \frac{m}{\mu}\frac{a}{VRT}$; $\frac{p_i}{p} = 4{,}9\%$. Собственный объем молекул найдем, воспользовавшись постоянной b Ван-дер-Ваальса, равной учетверенному объему молекул, содержащихся в одном моле реального газа. В уравнении Ван-дер-Ваальса $\left(p + \frac{\nu^2 a}{V^2}\right)(V - \nu b) = \nu RT$ поправка νb означает учетверенный объем молекул всего газа, т.е. $\nu b = 4V_i$. Отсюда $V_i = \frac{\nu b}{4}$ или $V_i = \frac{m}{4\mu}b$, тогда $\frac{V_i}{V} = \frac{mb}{4\mu V}$; $\frac{V_i}{V} = \frac{0{,}25 \cdot 3{,}85 \cdot 10^{-5}}{4 \cdot 0{,}028 \cdot 10^{-2}} = 0{,}85\%$.

6.18 Количество ν = 0,5 кмоль некоторого газа занимает объем V_1 = 1 м^3. При расширении газа до объема V_2 = 1,2 м^3 была совершена работа против сил взаимодействия молекул A = 5,684 кДж. Найти постоянную а, входящую в уравнение Ван-дер-Ваальса.

Решение

Работа, совершенная против сил взаимодействия молекул, $A = \int_{V_1}^{V_2} p_i dV$, где $p_i = \frac{m^2 a}{\mu^2 V^2}$. Таким образом, $A = \frac{m^2 a}{\mu^2}\int_{V_1}^{V_2}\frac{dV}{V^2} = \frac{m^2 a}{\mu^2}\left(\frac{1}{V_1} - \frac{1}{V_2}\right) = \frac{m^2 a(V_2 - V_1)}{\mu^2 V_1 V_2}$, откуда выразим $a = \frac{A\mu^2 V_1 V_2}{m(V_2 - V_1)} = \frac{AV_1V_2}{\nu^2(V_2 - V_1)} = 0{,}136$ Па·м^6/моль^2.

6.19 Масса m = 20 кг азота адиабатически расширяется в вакуум от объема V_1 = 1 м^3 до объема V_2 = 1 м^3. Найти понижение температуры ΔT при этом расширении, считая известной для азота постоянную а, входящую в уравнение Ван-дер-Ваальса (смотри ответ 6.2).

Решение

Работа газа при адиабатическом расширении $A=\frac{RT_1}{\gamma-1}\times\frac{m}{\mu}\left(1-\frac{T_2}{T_1}\right)=\frac{RT_1}{\gamma-1}\frac{m}{\mu}\frac{T_1-T_2}{T_1}$; $A=\frac{R}{\gamma-1}\frac{m}{\mu}(T_1-T_2)=\frac{R}{\gamma-1}\times\frac{m}{\mu}\Delta T$, где $\gamma=\frac{i+2}{i}$ — показатель адиабаты, тогда $\gamma-1=\frac{i+2}{i}-\frac{i}{i}=\frac{2}{i}$. Следовательно, работа $A=\frac{iR}{2}\frac{m}{\mu}\Delta T$ — (1). С другой стороны, работа, совершенная против сил взаимодействия молекул, $A=\int_{V_1}^{V_2}p_i dV$, где $p_i=\frac{m^2a}{\mu^2V^2}$, значит, $A=\frac{m^2a}{\mu^2}\int_{V_1}^{V_2}\frac{dV}{V^2}=\frac{m^2a}{\mu^2}\left(\frac{1}{V_1}-\frac{1}{V_2}\right)=\frac{m^2a(V_2-V_1)}{\mu^2V_1V_2}$ — (2). Т. к. в (1) и (2) левые части равны, то можно приравнять и правые части, тогда $\frac{iR}{2}\frac{m}{\mu}\Delta T=\frac{m^2a(V_2-V_1)}{\mu^2V_1V_2}$, откуда $\Delta T=\frac{2ma(V_2-V_1)}{iR\mu V_1V_2}$; $\Delta T=2.33$ К.

6.20 Количества ν = 0,5 кмоль трехатомного газа адиабатически расширяется в вакуум от объема V_1 = 0,5 м^3 до объема V_2 = 3 м^3 Температура газа при этом понижается па ΔT = 122 К. Найти постоянною а, входящую в уравнение Ван-дер-Ваальса.

Решение

Понижение температуры при расширении (см. задачу 6.19) $\Delta T=\frac{2ma(V_2-V_1)}{iR\mu V_1V_2}=\frac{2\nu a(V_2-V_1)}{iRV_1V_2}$. Т. к. газ трехатомный, то число степеней свободы $i=6$. Следовательно, постоянная Ван-дер-Ваальса $a=\frac{\Delta TiRV_1V_2}{2\nu(V_2-V_1)}$; $a=0{,}364$ Па·м^6/моль^2.

6.21 Какое давление р надо приложить, чтобы углекислый газ превратить в жидкую углекислоту при темперах t_1 = 31 °C и t_2 = 50 °C? Какой наибольший объем V_{max} может занимать масса m = 1 кг жидкой углекислоты? Какое наибольшее давление p_{max}. насыщенного пара жидкой углекислоты?

Решение

Температура $t_1=31°$ C — критическая температура углекислого газа, тогда необходимое давление $p=p_к=7{,}38$ МПа. Поскольку температура t_2 больше критической температуры, то ни при каком давлении нельзя превратить углекислый газ в жидкую кислоту. Наибольший объем $V_{max}=\frac{3b}{\mu}=2{,}9$ л; наибольшее давление $p_{max}=p_к=7{,}38$ МПа.

6.22 Найти плотность $\rho_к$ водяного пара в критическом состоянии, считая известными для него постоянную b, входящую в уравнение Ван-дер-Ваальса.

Решение

Критический молярный объем водяного пара $V_{0к} = 3b$. Тогда критическая плотность $\rho_к = \frac{\mu}{V_{0к}} = \frac{\mu}{3b}$; $\rho_к = 196$ кг/м^3.

6.23 Найти плотность $\rho_к$ гелия в критическом состоянии, считая известными для гелия критические значения $T_к$ и $p_к$.

Решение

Критическая плотность реального газа (см. задачу 6.22) $\rho_к = \frac{\mu}{3b}$. Постоянная Ван-дер-Ваальса $b = \frac{T_к R}{8p_к}$, тогда $\rho_к = \frac{8p_к\mu}{3T_к R}$; $\rho_к = 56.77$ кг/м^3.

6.24 Количество $\nu = 1$ кмоль кислорода занимает объем $V = 56$ л при давлении $p = 93$ МПа. Найти температуру t газа, пользуясь уравнением Ван-дер-Ваальса.

Решение

Если ввести приведенные величины $\pi = \frac{p}{p_к}$; $\tau = \frac{T}{T_к}$; $\omega = \frac{V_0}{V_{0к}}$, то приведенное уравнение Ван-дер-Ваальса для одного моля имеет вид $\left(\pi + \frac{3}{\omega^2}\right)(3\omega - 1) = 8\tau$, откуда $\tau = \frac{1}{8}\left(\pi + \frac{3}{\omega^2}\right)(3\omega - 1)$. Найдем приведенные величины: приведенный молярный объем $\omega = \frac{V_0}{V_{0к}}$, где $V_0 = \frac{V}{\nu}$; $V_0 = 0.56\cdot10^{-4}$ м^3/моль и $V_{0к} = 3b = \frac{3T_к R}{8p_к}$; $V_{0к} = 9{,}5\cdot10^{-5}$ м^3/моль, тогда $\omega = 0{,}59$; приведенное давление $\pi = \frac{p}{p_к} = 18.4$. Тогда $\tau = 2.6$ и, следовательно, $T = \tau T_к = 400$ К.

6.25 Количество ν = 1 кмоль гелия занимает объем V = 0,237 м^3 при температуре t = -200 °С. Найти давление p газа, пользуясь уравнением Ван-дер-Ваальса в приведенных величинах.

Решение

Если ввести приведенные величины $\pi = \frac{p}{p_к}$; $\tau = \frac{T}{T_к}$; $\omega = \frac{V_0}{V_{0к}}$, то приведенное уравнение Ван-дер-Ваальса для одного моля имеет вид $\left(\pi + \frac{3}{\omega^2}\right)(3\omega - 1) = 8\tau$, откуда $\pi + \frac{3}{\omega^2} = \frac{8\tau}{3\omega - 1}$ или $\pi = \frac{8\tau}{3\omega - 1} - \frac{3}{\omega^2}$. Найдем приведенные величины: приведенная температура $\tau = \frac{T}{T_к}$; $\tau = 14.03$; приведенный молярный объем $\omega = \frac{V_0}{V_{0к}}$, где $V_0 = \frac{V}{\nu}$; $V_0 = 2{,}37 \cdot 10^{-4}$ м^3/моль и $V_{0к} = 3b = \frac{3T_к R}{8p_к}$; $V_{0к} = 7{,}05 \times$ $\times 10^{-5}$ м^3/моль, тогда $\omega = 3.36$. Следовательно, приведенное давление $\pi = 12.09$. Окончательно давление газа $p = \pi p_к$; $p = 2{,}78$ МПа.

6.26 Во сколько раз давление газа больше его критического давления, если известно, что его объем и температура вдвое больше критических значений этих величин?

Решение

По условию $\tau = 2$, $\omega = 2$. Исходя из приведенного уравнения Ван-дер-Ваальса для одного моля, приведенное давление (см. задачу 6.25) $\pi = \frac{8\tau}{3\omega - 1} - \frac{3}{\omega^2}$; $\pi = 2{,}45$.

§ 7. Насыщенные пары и жидкости

7.1 В таблице 8 дано давление водяного пара, насыщающего пространство при разных температурах. Как составить из этих данных таблицу m масс водяного пара в объеме V = 1 м^3 воздуха, насыщенного водяным паром при разных температурах? Для примера решить задачу при температуре t = 50 °С.

Решение

Из уравнения Менделеева — Клапейрона $m = \dfrac{pV\mu}{RT}$ — (1). При $T = 323$ К давление насыщенного пара $p_н = 12{,}3$ кПа. Молярная масса водяного пара $\mu = 0{,}018$ кг/моль, тогда из (1) получим $m = 82$ г.

7.2 Найти плотность $\rho_н$ насыщенного водяного пара при температуре t = 50 °С.

Решение

По таблице 8 находим давление водяного пара, насыщающего пространство при температуре $t = 50°$ С. Оно равно $p_н = 12{,}302$ кПа. Из уравнения Менделеева — Клапейрона $pV = \dfrac{m}{\mu}RT$ выразим плотность $\rho = \dfrac{m}{V} = \dfrac{p\cdot\mu}{RT}$. Подставляя в полученное выражение числовые данные, найдем: $\rho = \dfrac{12{,}302\cdot10^3\cdot0.018}{8.31\cdot323} = 0{,}082$ кг/м^3.

7.3 Во сколько раз плотность $\rho_н$ насыщенного водяного пара при температуре t = 16 °С меньше плотности ρ воды.

Решение

Плотность насыщенного пара (см. задачу 7.2) $\rho_н = \dfrac{p_н\mu}{RT}$, где $p_н = 1{,}809$ кПа, тогда $\rho = 0.014$ кг/м^3 и отношение плотностей $\dfrac{\rho_к}{\rho_н} = 73754$.

7.4 Во сколько разных плотность $\rho_{н1}$ насыщенного водяного пара при температуре t_1 = 200 °С больше плотности $\rho_{н2}$ насыщенного водяного пара при температуре t_1 = 100 °С?

Решение

Давления насыщенного пара при температуре t_1 и t_2 соответственно равны $p_{н1} = 1549890$ Па и $p_{н2} = 101080$ Па. Плотность насыщенного пара (см. задачу 7.2) $\rho_н = \dfrac{p_н\mu}{RT}$, тогда отношение плотностей $\dfrac{\rho_{н1}}{\rho_{н2}} = \dfrac{p_{н1}T_2}{p_{н2}T_2} = 12{,}09$.

7.5 Какая масса m водяного пара содержится в объеме $V = 1$ м^3 воздуха в летний день при температуре $t = 30$ °С и относительной влажности $\omega = 0{,}75$?

Решение

Относительная влажность определяется соотношением $\omega = \frac{p}{p_н}$, где p — давление водяного пара, находящегося в воздухе, и $p_н$ — давление водяного пара, насыщающего пространство при данной температуре. Из уравнения Менделеева—Клапейрона $m = \frac{pV\mu}{RT} = \frac{\omega p_н V\mu}{RT}$ — (1). При $T = 303$ К давление насыщенного пара $p_н = 4.23$ кПа. Молярная масса водяного пара $\mu = 0{,}018$ кг/моль. Тогда из (1) получим $m = 22.5$ г.

7.6 В замкнутом объеме $V = 1$ м^3 относительная влажность воздуха $\omega = 0{,}6$ при температуре $t = 20$ °С. Какая масса Δm воды должна еще испариться в этот объем, чтобы водяной пар стал насыщенным?

Решение

По определению, относительная влажность $\omega = \frac{p}{p_н}$, где p — давление водяного пара, содержащегося в воздухе, $p_н$ — давление насыщенного пара при той же температуре. Из уравнения Менделеева—Клапейрона $pV = \frac{m}{\mu}RT$ имеем $(p_н - p)V = \frac{\Delta m}{\mu}RT$, где $p = \omega \cdot p_н$, тогда $p_н(1-\omega)V = \frac{\Delta m}{\mu}RT$, откуда $\Delta m = \frac{pV\mu(1-\omega)}{RT} = 6{,}88$ г.

7.7 Температура комнаты $t_1 = 18$ °С, относительная влажность $\omega = 0{,}5$. В металлический чайник налили холодную воду, какова температура t_2 воды, при которой чайник перестанет запотевать?

Решение

Давление водяного пара, содержащегося в воздухе, при температуре $t_1 = 18°$ С равно $p_1 = \omega \cdot p_{01}$, где p_{01} — давление насыщенного пара при той же температуре. Сравним давление p_1 с давлением p_{02} насыщенного водяного пара при температуре t_2. Если $p_1 < p_{02}$, пар конденсироваться не будет, т.е. чайник перестает запотевать при $p_1 = p_{02}$. Отсюда $\omega \cdot p_{01} = p_{02}$. Определив по таблице 8 значение p_{01}, вычислим $p_{02} = 1034$ Па, что соответствует температуре $t_2 \approx 7°$ С.

7.8 Найти число n молекул насыщенного водяного пара, содержащихся в единице объема при температуре $t_1 = 30$ °С.

Решение

При $t = 30°$ С, по таблице 8 находим для данной температуры $p_н = 4229$ Па. Из уравнения Менделеева—Клапейрона $p_н V = \nu RT$ найдем число молей $\nu = \frac{p_н V}{RT}$. Число частиц в объеме V равно $N = \nu N_А = \frac{p_н V N_А}{RT}$, а в единице объема $n = \frac{N}{V} = \frac{p_н N_А}{RT} = 1{,}011 \cdot 10^{24}$ м$^{-3}$.

7.9 Масса $m = 0{,}5$ г водяного пара занимает объем $V_1 = 10$ л при температуре $t = 50$ °С, какова при этом относительная влажность ω? Какая масса Δm пара сконденсируется, если изотермически уменьшить объем от V_1 до $V_2 = V_1/2$?

Решение

Из таблицы находим давление насыщенного пара при температуре $T = 323$ К, которое равно $p_0 = 12302$ Па. Из уравнения Менделеева — Клапейрона $pV_1 = \frac{m}{\mu} RT$ находим давление $p = \frac{mRT}{\mu V_1}$. Тогда относительная влажность $\omega = \frac{p}{p_0} = \frac{mRT}{p_0 \mu V_1}$; $\omega = 0{,}606 \cdot 100\% = 60{,}6\%$. Найдем массу водяного пара при относительной влажности 100% или $\omega_1 = 1$, тогда давление $p = p_0 = 12302$ Па. Учитывая, что $V_2 = \frac{V_1}{2}$ из уравнения Менделеева — Клапейрона $\frac{p_0 V_1}{2} = \frac{m - \Delta m}{\mu} RT$ находим $m - \Delta m = \frac{p_0 V_1 \mu}{2RT}$. Отсюда масса сконденсированного пара равна $\Delta m = m - \frac{p_0 V_1 \mu}{2RT} = 87{,}5$ мг.

7.10 В камере Вильсона объемом $V = 1$ л заключен воздух, насыщенный водяным паром. Начальная температура камеры $t_1 = 20$ °С. При движении поршня объем камеры увеличился до $V_2 = 1{,}25V_1$. Расширение считать адиабатическим, причем показатель адиабаты $\chi = C_p/C_v = 1{,}4$. Найти: а) давление водяного пара до расширения; б) массу m_1 водяного пара в камере до расширения; в) плотность ρ_1 водяного пара до расширения; г) температуру t_2 пара после расширения (изменением температуры из-за выделения тепла при конденсации пара пренебречь); д) массу Δm и сконденсированного пара; е) плотность ρ_2 водяного пара после конденсации; ж) степень перенасыщения, т.е. отношение плотности водяного пара после расширения (но до конденсации) к плотности водяного пара, насыщающего пространство при температуре, установившейся после конденсации.

Решение

а) До расширения насыщенный водяной пар находится при температуре $t_1 = 20°$ С, следовательно, давление этого пара $p_1 = 2{,}33$ кПа см. таблицу 8. б) Масса водяного пара до расширения $m_1 = \frac{p_1 \mu V_1}{RT_1} = 17{,}2 \cdot 10^{-6}$ кг. в) $\rho_1 = \frac{p_1 \mu}{RT_1} = 17{,}2 \times 10^{-3}$ кг/м^3. г) Т.к. процесс считается адиабатическим, то $T_2 = \frac{T_1}{(V_2/V_1)^{\gamma-1}} = 268$ К. д) При температуре $t_2 = -5°$ С давление насыщенного водяного пара $p_2 = 399$ Па. Масса пара в камере, соответствующая этому значению, $m_2 = \frac{p_2 \mu V_2}{RT_2} = 4{,}0 \cdot 10^{-5}$ кг. Следовательно, масса сконденсированного пара $\Delta m = m_1 - m_2 = (17{,}2 - 4{,}0) = 13{,}2 \cdot 10^{-6}$ кг. е) $\rho_2 = \frac{p_2 \mu}{RT_2} = 3{,}2 \cdot 10^{-3}$ кг/м^3. ж) Т. к. плотность водяного пара после расширения (но до конденсации) $\rho_3 = \frac{m_1}{V_2} = \frac{17{,}2 \cdot 10^{-6}}{1{,}25 \cdot 10^{-3}}$ кг/м^3 $= 13{,}7 \cdot 10^{-3}$ кг/м^3, то степень перенасыщения $s = \frac{\rho_3}{\rho_2} = 4{,}3$.

7.11 Найти удельный объем v воды в жидком и парообразном состояниях при нормальных условиях.

Решение

По определению, удельный объем жидкости и пара соответственно $v_ж = \frac{V_ж}{m} = \frac{V_{0ж}}{\mu}$ и $v_п = \frac{V_п}{m} = \frac{V_{0п}}{\mu}$. Молярный объем жидкости $V_{0ж} = \mu / \rho$, тогда удельный объем жидкости $v_ж = \frac{V_{0ж}}{\mu} = \frac{1}{\rho} = 10^{-3}$ м^3/кг. Молярный объем пара найдем из соотношения: $V_{0п} = \frac{RT}{p - p_п}$, тогда удельный объем пара $v_п = \frac{RT}{\mu(p - p_н)} = 1{,}25$ м^3/кг.

7.12 Пользуясь первым законом термодинамики и данным таблицы 7 и 8. Найти удельную теплоту парообразования r воды при t = 200 °С. Для воды критическая температура $T_к$ = 647 K, критическое давление p = 22 МПа. Проверить правильность полученного результата по данным таблицы 9.

Решение

Количество теплоты Q при испарении тратится на преодоление сил взаимодействия молекул и на работу расширения. Таким образом, согласно первому закону термодинамики имеем $Q = r_0 = \Delta W + A$ — (1), где r_0 — молярная теплота парообразования, ΔW — изменение молярной внутренней энергии сил взаимодействия при испарении, A — молярная работа, совершаемая против внешнего давления. $A = p_н\left(V_{0п} - V_{0ж}\right)$ — (2), где $p_н$ — давление насыщенного пара, $V_{0ж}$ — молярный объем жидкости, $V_{0п}$ — молярный объем пара. Имеем $V_{0ж} = \dfrac{\mu}{\rho} = 18 \cdot 10^{-6}$ м³/моль, где μ — молярная масса и ρ — плотность воды. Из уравнения Менделеева — Клапейрона $V_{0п} = \nu RT / p_н$. При $T = 473$ К имеем (см. таблицу 8) $p_н = 1{,}55$ МПа и $V_{0н} = 2{,}5$ л/моль. Считая, что изменение внутренней энергии взаимодействия молекул при испарении соответствует уравнению Ван-дер-Ваальса (см. задачу 6.18), имеем $\Delta W = \dfrac{\nu^2 a\left(V_{0п} - V_{0ж}\right)}{V_{0ж} V_{0п}}$ — (3), где $a = 5{,}56 \cdot 10^2$ Па·м⁶/моль². Поскольку $V_{0ж} << V_{0п}$, то из (1) — (3) получим $r_0 = \dfrac{a}{V_{0ж}} + p_н V_{0н} = \dfrac{a\rho}{\mu} + RT = 35$ кДж/моль. Следовательно, удельная теплота парообразования воды $r = \dfrac{r_0}{\mu} = 1{,}95$ МДж/кг. Из таблицы 9, для температуры $t = 200°$ С значение $r = 1{,}94$ МДж/кг.

7.13 Какая часть теплоты парообразования воды при температуре t = 100 °С идет на увеличение внутренней энергии системы?

Решение

Согласно первому началу термодинамики $r_0 = \Delta W + A$, где $r_0 = r\mu$ — молярная теплота парообразования; ΔW — изменение внутренней энергии; $A = p_н\left(V_{0п} - V_{0ж}\right)$ — работа, совершаемая против сил внешнего давления. Тогда $\dfrac{\Delta W}{r_0} = \dfrac{r_0 - A}{r_0} = \dfrac{r\mu - p_н\left(V_{0п} - V_{0ж}\right)}{r\mu}$. Молярные объемы жидкости и пара соответственно равны $V_{0ж} = \dfrac{\mu}{\rho}$ и $V_{0п} = \dfrac{RT}{p_н}$, следовательно, $\dfrac{\Delta W}{r_0} = \dfrac{r\mu - p_н\left(RT/p_н - \mu/\rho\right)}{r\mu}$; $\dfrac{\Delta W}{r_0} = 1 - \dfrac{p_н}{r\mu}\left(\dfrac{RT}{p_н} - \dfrac{\mu}{\rho}\right)$; $\dfrac{\Delta W}{r_0} = 0{,}924 \cdot 100\% = 92{,}4\%$.

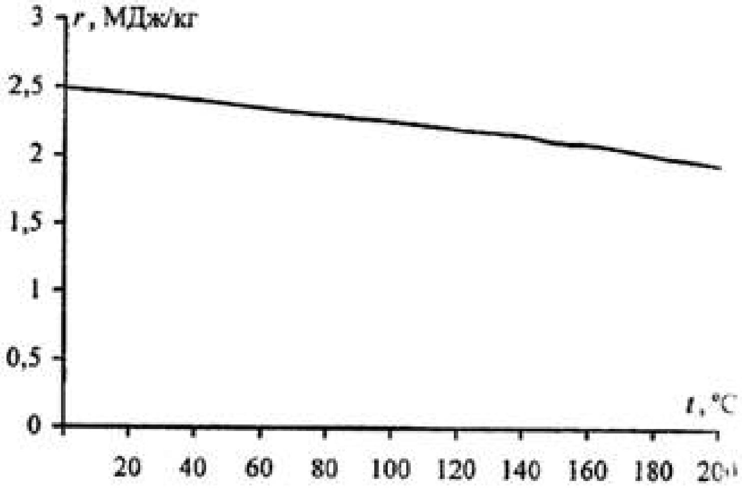
7.14 Удельная теплота парообразования бензола (C_6H_6) при температуре t = 77° C равна r = 398 кДж/кг. Найти изменение внутренней энергии ΔW при испарении массы Δm = 20 г бензола.

Решение

Изменение внутренней энергии (см. задачу 7.13) $\Delta W = r_0 - A = \Delta m r - A$. Работа против сил внешнего давления $A = p\Delta V = \frac{\Delta m}{\mu} RT$, где $\mu = 0{,}078$ — молярная масса бензола. Тогда $\Delta W = \Delta m\left(r - RT/\mu\right) = 7{,}21$ кДж.

7.15 Пользуясь уравнением Клаузиуса — Клапейрона и данными таблицы 8, найти удельную теплоту парообразования r воды при температуре t = 5 °С. Проверить правильность полученного результата по данным таблицы 9.

Решение



Из уравнения Клаузиуса – Клапейрона $\frac{dp}{dT} = \frac{r_0}{T(V_{0п} - V_{0ж})}$ — (1). Считая, что насыщенные пары подчиняются уравнению Менделеева — Клапейрона, для $\nu = 1$ моль имеем $V_{0п} = \frac{RT}{p}$. Т. к. (см. таблицу 8) при $t = 5°$ C давление насыщенного пара $p_н = 870$ Па, то $V_{0п} = 2{,}65$ м^3/моль. Кроме того, $V_{0ж} = \frac{\mu}{\rho} \le 18 \cdot 10^{-6}$ м^3/моль. Таким образом, $V_{0ж} << V_{0п}$, и тогда уравнение (1) можно записать как $\frac{dp}{dT} = \frac{r_0 p}{RT^2}$ или $\frac{dp}{p} = \frac{r_0}{R}\frac{dT}{T^2}$ — (2). Для небольшого интервала температур $T_2 - T_1$ молярную теплоту испарения r_0 можно считать постоянной, и тогда, интегрируя уравнение (2), получим $\int_{p_1}^{p_2}\frac{dp}{p} = \frac{r_0}{R}\int_{T_1}^{T_2}\frac{dT}{T^2}$; $\quad ln\frac{p_2}{p_1} = -\frac{r_0}{R}\left(\frac{1}{T_2} - \frac{1}{T_1}\right)$;

$ln\frac{p_2}{p_1} = -\frac{r_0(T_2 - T_1)}{RT_1T_2}$ — (3), откуда $r_0 = \frac{RT_1T_2\,ln\left(\frac{p_2}{p_1}\right)}{T_2 - T1}$ — (4).

Здесь p_1 и p_2 — давления насыщенного пара при температурах T_1 и T_2. Для величин T_1 и T_2 можно взять значения $t_1 = 4°\ C$ $t_2 = 6°\ C$. Тогда $p_1 = 811$ Па, $p_2 = 932$ Па (см. таблицу 8) и $\frac{p_2}{p_1} = 1{,}15$. Подставляя в (4) числовые данные, получим $r_0 = 45$ кДж/моль. Отсюда удельная теплота парообразования $r = \frac{r_0}{\mu} = 2{,}49$ МДж/кг. Построив по данным таблицы 9 график $r = f(t)$, найдем, что при $t = 5°\ C$ имеем $r = 2{,}48$ МДж/кг.

7.16 Давления насыщенного ртутного пара при температурах $t_1 = 100$ °C и $t_2 = 120$ °C равны $p_1 = 37{,}3$ Па и $p_2 = 101{,}3$ Па. Найти среднее значение удельной теплоты парообразования r ртути в указанном интервале температур.

Решение

Из уравнения Клаузиуса — Клапейрона $\frac{dp}{dt} = \frac{r_0}{T(V_{0н} - V_{0ж})}$, где молярные объемы пара и жидкости соответственно равны $V_{0н} = \frac{RT}{p_н}$ и $V_{0ж} = \frac{\mu}{\rho}$, имеем $\frac{dp}{pt} = \frac{r_0 p}{RT^2}$ или $\frac{dp}{p} = \frac{r_0}{R}\frac{dT}{T^2}$. Проинтегрировав полученное уравнение, получим $ln\frac{p_2}{p_1} = \frac{r_0(T_2 - T_1)}{RT_1T_2}$ или $r_0 = \frac{RT_1T_2\,ln(p_2/p_1)}{T_2 - T_1}$. Тогда $r = \frac{r_0}{\mu} = \frac{RT_1T_2\,ln(p_2/p_1)}{\mu(T_2 - T_1)}$; $r = 0{,}304 \cdot 10^6$ Дж/кг.

7.17 Температура кипения бензола (C_6H_6) при давлении $p = 0{,}1$ МПа равна $t_к = 80{,}2$ °C. Найти давление p насыщенного пара бензола при температуре $t = 75{,}6$ °C. Среднее значение удельной теплоты парообразования бензола в данном интервале температур принять равным $r = 0{,}4$ МДж/кг.

Решение

Среднее значение удельной теплоты парообразования (см. задачу 7.16) $r = \frac{RT_1T_2\,ln(p_2/p_1)}{\mu(T_2 - T_1)}$. В нашем случае $p_2 = p$ и $p_1 = p_н$, тогда $ln\frac{p}{p_н} = \frac{r\mu(T_2 - T_1)}{RT_1T_2}$. Возьмем от обоих частей данного уравнения экспоненту $\frac{p}{p_н} = exp\left(\frac{r\mu(T_2 - T_1)}{RT_1T_2}\right)$, откуда $p_н = \frac{p}{exp(r\mu(T_2 - T_1)/(RT_1T_2))} \approx 87 \cdot 10^3$ Па.

7.18 Давления насыщенного пара этилового спирта (C_2H_5OH) при температурах t_1 = 40 °С и t_2 = 60°С равны p_1 = 17,7 кПа и p_2 = 67,9кПа. Найти изменение энтропии ΔS при испарении массы Δm = 1 г этилового спирта, находящегося при температуре t = 50 °С.

Решение

Из уравнения Клаузиуса – Клапейрона $\frac{dp}{dT} = \frac{r_0}{T(V_{0п} - V_{0ж})}$ – (1), считая, что насыщенные пары подчиняются уравнению Менделеева — Клапейрона, имеем для одного моля $V_{0п} = \frac{RT}{p}$. Кроме того, $V_{0ж} << V_{0п}$. Тогда уравнение (1) можно записать следующим образом: $\frac{dp}{dT} = \frac{r_0 p}{RT^2}$ или $\frac{dp}{p} = \frac{r_0}{R}\frac{dT}{T^2}$ — (2). Интегрируя уравнение (2), получим $ln\frac{p_2}{p_1} = \frac{r_0(T_2 - T_1)}{RT_1T_2}$ — (3), откуда $r_0 = \frac{RT_1T_2\, ln(p_2/p_1)}{T_2 - T_1}$ — (4). Изменение энтропии $\Delta S = \frac{\nu r_0}{T}$, где $\nu = \frac{\Delta m}{\mu}$ и с учетом (4) $\Delta S = \frac{RT_1T_2\, ln(p_2/p_1)\Delta m}{(T_2 - T_1)\mu T} = 2{,}92$ Дж/К.

7.19 Изменение энтропии при испарении количества $\Delta\nu$ = 1 моль некоторой жидкости, находящейся при температуре t_1 = 50° С, равно ΔS = 133 Дж/К. Давление насыщенного пара при температуре t_1 = 50 °С равно p_1 = 12,33 кПа. На сколько меняется давление насыщенного пара жидкости при изменении температуры от t_1 = 50 °С до t_2 = 51 °С?

Решение

Изменение энтропии (см. задачу 7.18) равно $\Delta S = \frac{RT_1T_2\, ln(p_2/p_1)\Delta m}{(T_2 - T_1)\mu T_1}$. Преобразуя это выражение, получим: $\Delta S = \frac{RT_1T_2\, ln(p_2/p_1)\Delta\nu}{(T_2 - T_1)T_1}$; $\Delta S = \frac{RT_2\, ln(p_2/p_1)\Delta\nu}{T_2 - T_1}$, откуда $ln\left(\frac{p_2}{p_1}\right) = \frac{(T_2 - T_1)\Delta S}{RT_2\Delta\nu}$. Возьмем от обеих частей экспоненту и найдем отношение $\frac{p_2}{p_1} = exp\left(\frac{(T_2 - T_1)\Delta S}{RT_2\Delta\nu}\right)$, откуда $p_2 = p_1\, exp\left(\frac{(T_2 - T_1)\Delta S}{RT_2\Delta\nu}\right)$. Тогда изменение давления насыщенного пара $\Delta p = p_2 - p_1 = p_1\left(exp\left(\frac{(T_2 - T_1)\Delta S}{RT_2\Delta\nu}\right) - 1\right)$

$$\Delta p = 12{,}33\cdot 10^3\left(exp\left(\frac{(324 - 323)\cdot 133}{8{,}31\cdot 324\cdot 1}\right) - 1\right) = 624 \text{ Па}.$$

7.20 До какого предельного давления p можно откачать сосуд при помощи ртутно-диффузионного насоса, работающего без ртутной ловушки, если температура водяной рубашки насоса t = 15 °C? Давление насыщенного ртутного пара при температуре t_0 = 0 °C равно p_0 = 0,021 Па, среднее значение удельной теплоты парообразования ртути в данном интервале температур принять равным r = 10,08 МДж/кг.

Решение

До давления $p = 93$ мПа, т. е. до давления насыщенного ртутного пара при $t = 15°$ C.

7.21 При температуре t_0 = 0 °C плотность ртути ρ_0 = 13,6·10^3 кг/м^3. Найти ее плотность ρ при температуре t = 300 °C. Коэффициент объемного расширения ртути β = 1,85·10^{-4} К$^{-1}$.

Решение

Имеем $\rho_0 = \dfrac{m}{V_0}$ и $\rho = \dfrac{m}{V}$, где $V = V_0(1 + \beta t)$. Тогда $\rho = \dfrac{\rho_0}{1 + \beta t} = 12{,}9 \cdot 10^3$ кг/м^3.

7.22 При температуре t_1 = 100 °C плотность ртути ρ_1 = 13,4·10^3 кг/м^3. При какой температуре t_2 плотность ртути ρ_2 = 13,4·10^3 кг/м^3? Коэффициент объемного расширения ртути β = 1,8·10^{-4} К$^{-1}$.

Решение

Относительное изменение объема при нагревании $\dfrac{\Delta V}{V} = \beta(t_1 - t_2)$. По определению, плотность $\rho = \dfrac{M}{V}$, тогда $\rho_1 = \dfrac{m}{V}$ — (1), а $\rho_2 = \dfrac{m}{V - \Delta V}$ — (2). Разделим (2) на (1) $\dfrac{\rho_2}{\rho_1} = \dfrac{V}{V - \Delta V} = \dfrac{1}{1 - \dfrac{\Delta V}{V}} = \dfrac{1}{1 - \beta(t_1 - t_2)}$, откуда $\beta(t_1 - t_2) = 1 - \dfrac{\rho_1}{\rho_2}$. Тогда изменение температуры $t_1 - t_2 = \dfrac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_2 \beta}$ и, окончательно, $t_2 = t_1 - \dfrac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_2 \beta} = 227{,}2°$ C.

7.23 Найти плотность ρ морской воды на глубине h = 5 км, если плотность ее на поверхности $\rho_0 = 1{,}03 \cdot 10^3$ кг/м^3. Сжимаемость воды $k = 4{,}8 \cdot 10^{-10}$ Па$^{-1}$. Указание: при вычислении гидростатического давления морской воды ее плотность приближенно полагать равной плотности воды на поверхности.

Решение

Относительное изменение объема при сжатии $\frac{\Delta V}{V_0} = -k\Delta p$, где k [Па$^{-1}$] — сжимаемость, величина, показывающая, на какую часть уменьшился объем жидкости при увеличении давления на 1 Па. Изменение давления Δp равно давлению водяного столба высотой h, которое по закону Паскаля $\Delta p = \rho_0 gh$, т.к. по условию плотность приблизительно равна плотности на поверхности. Плотность у поверхности воды $\rho_0 = \frac{m}{V_0}$, а на глубине $h - \rho = \frac{m}{V_0 + \Delta V}$ [illegible] да отношение плотностей $\frac{\rho_0}{\rho} = \frac{V_0 + \Delta V}{V_0} = 1 + \frac{\Delta V}{V_0}$ [illegible] h. Отсюда плотность морской воды на глубине [illegible] на $\rho = \frac{\rho_0}{1 - k\rho_0 gh} = 1{,}055$ кг/м^3.

7.24 При нормальных условиях сжимаемость тела $L = 9 \cdot 10^{-11}$ Па$^{-1}$, коэффициент объемного расширения $24 \cdot 10^{-3}$ К. На сколько необходимо увеличить внешнее давление, чтобы при нагревании на Δt = 1 К объем бензола не изменился?

Решение

Относительное изменение объема жидкости при [illegible]ре-вании и сжатии соответственно $\frac{\Delta V}{V} \beta\Delta T$ и $\frac{\Delta V}{V} = k$ [illegible]. По условию объем бензола не меняется, поэтому $\beta\Delta T$ [illegible] Δp, откуда $\Delta p = \frac{\beta\Delta T}{k} = 1{,}38 \cdot 10^6$ Па.

7.25 Коэффициент объемного расширения ртути $\beta = 32 \cdot 10^{-4}\ K^{-1}$.Чтобы при нагревании ртути на Δt = 1 К ее объем не изменился, необходимо увеличить внешнее давление Δp = 4,7 МПа. Найти сжимаемость k ртути.

Решение

Чтобы объем не изменился (см. задачу 7.24), необ[illegible]мо, чтобы $\beta\Delta T = k\Delta p$. Отсюда сжимаемость ртути $k = \frac{\beta\Delta T}{\Delta p} = 3{,}87 \cdot 10^{-11}$ Па$^{-1}$.

7.26 Найти разность уровней Δh ртути в двух одинаковых сообщающихся стеклянных трубках, если левое колено поддерживается при темпере $t_0 = 0$ °С, а правое нагрето до температуры $t = 100$ °С. Высота левого колена $h = 90$ см. Коэффициент объемного расширение ртути $\beta = 1{,}82 \cdot 10^{-4}$ К$^{-1}$. Расширением стекла пренебречь.

Решение

Относительное изменение объема жидкости при нагревании $\frac{\Delta V}{V_0} = \beta\Delta T$. Т. к. площадь поперечного сечения трубок одинакова и равна S, то объем в холодном колене $V_0 = Sh_0$, а в подогретом колене $V_0 + \Delta V = S(h_0 + \Delta h)$, тогда $\frac{V_0 + \Delta V}{V_0} = 1 + \frac{\Delta V}{V_0} = 1 + \beta\Delta T = \frac{h_0 + \Delta h}{h_0}$. Отсюда разность уровней $\Delta h = h_0(1 + \beta\Delta T) - h_0 = h_0\beta\Delta T = 16{,}4$ см.

7.27 Ртуть налита в стеклянный сосуд высотой $L = 10$ см. При температуре $t = 20$ °С уровень ртути на $h = 1$ мм ниже верхнего края сосуда. На сколько можно нагреть ртуть, чтобы она не вылилась из сосуда? Коэффициент объемного расширения ртути $\beta = 1{,}82 \cdot 10^{-4}$ K^{-1}. Расширением стекла пренебречь.

Решение

Начальный объем ртути $V_0 = S(L - h)$, где S — площадь поперечного сечения сосуда, а ее конечный объем $V_0 + \Delta V = SL$. Тогда $\frac{V_0 + \Delta V}{V_0} = 1 + \beta\Delta T = \frac{L}{L - h}$, откуда после преобразования получаем $\Delta T = \frac{h}{(L - h)\beta} = 55{,}5$ К.

7.28 Стеклянный сосуд, наполненный до краев ртутью, при температуре $t = 0$°С имеет массу $M = 1$ кг. Масса пустого сосуда $M_0 = 0{,}1$ кг. Найти массу m ртути, которая может поместиться в сосуде при температуре $t = 100$ °С. Коэффициент объемного расширения ртути $\beta = 1{,}82 \cdot 10^{-4}$ К$^{-1}$. Расширением стекла пренебречь.

Решение

Масса ртути, находящаяся в сосуде при температуре t_0, равна $m_0 = M - M_0$, тогда плотность ртути при данной температуре $\rho = \frac{m}{V}$. Отношение плотностей (см. задачу 7.22) $\frac{\rho}{\rho_0} = \frac{m}{m_0}$, тогда $\frac{m}{m_0} = \frac{1}{1 - \beta(t - t_0)}$, откуда $m_0 = m(1 - \beta(t - t_0)) = (M - M_0)(1 - \beta(t - t_0)) = 884$ г.

7.29 Решить предыдущую задачу, если коэффициент объемного расширения стекла $\beta' = 3\cdot10^{-5}$ К$^{-1}$.

Решение

При нагревании объем сосуда стал $V = V_0(1+\beta' t)$, соответственно плотность ртути $\rho = \frac{m}{V} = \frac{m}{V_0(1+\beta' t)}$ — (1). С другой стороны, $\rho = \frac{\rho_0}{1+\beta t} = \frac{m_0}{V_0(1+\beta t)}$ — (2). Приравнивая уравнения (1) и (2), получим $m = \frac{m_0(1+\beta' t)}{1+\beta t} = 887$ г.

7.30 Стеклянный сосуд наполнен до краев жидким маслом при температуре $t_0 = 0$ °С. При нагревании сосуда с маслом температуры $t = 100$ °С вытекло 6% налитого масла. Найти коэффициент объемного расширения масла, если коэффициент объемного расширения стекла $\beta = 3\cdot10^{-5}$ К$^{-1}$.

Решение

При нагревании объем сосуда увеличился и стал равным $V_1 = V_0(1+\beta t)$, и объем масла также увеличился и стал равным $V_2 = V_0(1+\beta' t)$. Количество масла, которое вытекло, $\Delta V = V_2 - V_1 = V_0[(1+\beta' t)-(1+\beta t)] = V_0 t(\beta' - \beta)$. По условию $\frac{\Delta V}{V_0} = 0{,}06$, тогда $(\beta' - \beta)t = 0.06$, откуда $\beta' = \frac{0{,}06}{t} + \beta = 6{,}3\cdot10^{-4}$ К$^{-1}$.

7.31 Какую относительную ошибку мы допустим при нахождении коэффициента объемного расширения масла в условиях предыдущей задачи, если пренебрежем расширением стекла?

Решение

Коэффициент объемного расширения масла с учетом расширения стекла (см. задачу 7.30) $\beta' = 6{,}3\cdot10^{-4}$ К$^{-1}$. Если не учитывать расширения стекла, то количество масла, которое вытекло, $\Delta V = V_2 - V_0 = V_0[(1+\beta_0 t)-1] = V_0\beta_0 t$, где β_0 – коэффициент объемного расширения масла без учета расширения стекла. Тогда $\Delta V / V = \beta_0 t = 0.06$, тогда $\beta_0 = \frac{0{,}06}{t} = 6\cdot10^{-4}$ К$^{-1}$. Отсюда относительная ошибка $x = \frac{\beta' - \beta_0}{\beta} = 0{,}05\cdot100\% = 5\%$.

7.32 Температура помещения t = 37 °С, атмосферное давление p_0 = 101,3 кПа. Какое давление p покажет ртутный барометр, находящийся в этом помещении? Коэффициент объемного Расширения ртути β = $1{,}82\cdot10^{-4}$ K^{-1}. Расширением стекла пренебречь.

Решение

Т. к. температура в помещении постоянна, то по закону Бойля — Мариотта $pV_0 = p_0V$, где $V = V_0(1+\beta t)$ — фактический объем ртути в барометре. Тогда $pV_0 = p_0V_0 \times$ $\times(1+\beta t)$, откуда $p = p_0(1+\beta t) = 102$ кПа.

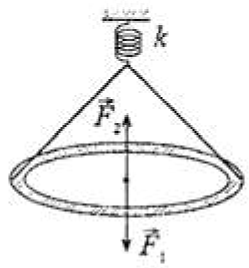
7.33 Какую силу F нужно приложить к горизонтальному алюминиевому кольцу высотой h = 10 мм, внутренним диаметром d_1 = 50 мм и внешним диаметром d_2 = 52 мм, чтобы оторвать его от поверхности воды? Какую часть найденной силы составляет сила поверхностного натяжения?

Решение

Будем считать, что кольцо касается воды только своей нижней поверхностью, не погружаясь. Сила, необходимая для отрыва кольца от поверхности воды $F = F_1 + F_2$, где F_1 — сила тяжести, F_2 — сила поверхностного натяжения. $F_1 = \rho h\frac{\pi}{4}\left(d_2^2 - d_1^2\right)g = 40$ мН. При отрыве кольца водяная пленка разрывается по внутренней — d_2 и внешней — d_1 сторонам кольца. $F_2 = \pi\alpha(d_1 + d_2) = 23{,}5$ мН. Отсюда $F = 63{,}5$ мН и $\frac{F_2}{F} = 37\%$.

7.34 Кольцо внутренним диаметром d_1 = 5 мм и внешнем диаметром d_2 = 26 мм подвешено на пружине и соприкасается с поверхностью жидкости. Жесткость пружины k = $9{,}8\cdot10^{-1}$ Н·м. При опускании поверхности жидкости кольцо оторвалось от нее при растяжении пружины на Δl = 5,3 мм. Найти поверхности натяжение α жидкости.

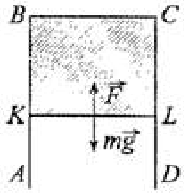
Решение



Сила поверхностного натяжения $\vec F_1$ жидкости уравновешивается силой упругости пружины $\vec F_2$. Чтобы система находилась в равновесии, необходимо чтобы $\vec F_1 + \vec F_2 = 0$ или $F_1 = F_2$. По закону Гука $F_2 = k\Delta l$. При отрыве кольца поверхностная пленка разрывается по внешней и внутренней поверхности кольца. Поэтому сила поверхностного натяжения будет складываться из двух $F_1 = F_{11} + F_{12}$, где $F_{11} = \alpha L_1$ и $F_2 = \alpha L_2$. Т.к. $L_1 = \pi d_1$ и $L_2 = \pi d_2$, то $F_1 = \pi\alpha(d_1 + d_2)$; $k\Delta l = \pi\alpha(d_1 + d_2)$, отсюда $\alpha = \frac{k\Delta l}{\pi(d_1 + d_2)} = 0{,}032$ Н/м.

7.35 Рамка *ABCD* с подвижной медной перекладиной *AX* затянута мыльной пленкой. Каков должен быть диаметр d перекладины *KL*, чтобы она находилась в равновесии? Найти длину l перекладины, если известно, что при перемещении перекладины на $\Delta h = 1$ см совершается изотермическая работа $A = 45$ мкДж. Поверхностное натяжение мыльного раствора $\alpha = 0{,}045$ Н/м.

Решение



Сила тяжести уравновешивается силой поверхностного натяжения. Чтобы перекладина находилась в равновесии, необходимо, чтобы $m\vec{g} + \vec{F} = 0$ или $F = mg$. Т.к. $m = \rho V$ и $V = \frac{\pi d^2}{4} l$, то $F = \frac{\pi d^2 l \rho g}{4}$. С другой стороны, $F = 2\alpha l$ (т. к. у пленки две стороны). Отсюда $2\alpha l = \frac{\pi d^2 l \rho g}{4}$; $d^2 = \frac{8 l \alpha}{\pi l \rho g} = \frac{8\alpha}{\pi \rho g}$; $d = \sqrt{\frac{8\alpha}{\pi \rho g}} = 1{,}2$ мм. Работа по перемещению перекладины $A = 2\alpha S$ (т.к. у пленки две стороны). Т.к. $S = l\Delta h$, то $A = 2\alpha l \Delta h$; $l = \frac{A}{2\alpha \Delta h} = 5$ см.

7.36 Спирт по каплям вытекает из сосуда через вертикальную трубку внутренним диаметром $d = 2$ мм. Капли обрываются через время $\Delta\tau = 1$ с одна после другой. Через какое время τ вытечет масса $m = 10$ г спирта? Диаметр шейки капли с момент отрыва считать равным внутреннему диаметру трубки.

Решение

Чтобы капля оторвалась от поверхности, необходимо разорвать поверхностную пенку длиной $l = 2\pi r$, где r — радиус шейки капли, силой тяжести $P = 2\pi r\alpha = \pi d\alpha$. В массе спирта содержится N капель, причем $N = \frac{mg}{P} = \frac{mg}{\pi d\alpha} = 780$ капель. Т.к. по условию капли отрываются с промежутком в $\Delta\tau = 1$ с, значит, общее время $\tau = N\Delta\tau = 780$ с=13мин.

7.37 Вода по каплям вытекает из сосуда через вертикальную трубку внутренним диаметром $d = 3$ мм. При остывании воды от $t_1 = 100$ °С до $t_2 = 20$ °С масса каждой капли изменилась на $\Delta m = 13{,}5$ мг. Зная поверхностное натяжение α_2 воды при $t_2 = 20$ °С, найти поверхностное натяжение α_1 воды при $t_1 = 100$ °С. Диаметр шейки капли в момент отрыва считав равным внутреннему диаметру трубки.

Решение

Сила тяжести, действующая на каплю, в момент ее отрыва должна разорвать поверхностную пленку по длине $l = 2\pi r = \pi d$, т.к. по условию диаметр шейки капли равен внутреннему диаметру трубки. Тогда начальная сила тяжести $p_0 = \pi d\alpha_2$. При остывании капли сила тяжести изменится на $\Delta p = \Delta mg$ и станет равной $p = p_0 - p = \pi d\alpha_2 - \Delta mg$. С другой стороны, $p = \pi d\alpha_1$, тогда $\pi d\alpha_1 = \pi d\alpha_1 - \Delta mg$, откуда $\alpha_1 = \frac{\pi d\alpha_2 - \Delta mg}{\pi d} = 0{,}059$ Н/м.

7.38 При плавлении нижнего конца вертикально подвешенной свинцовой проволоки диаметром d = 1 мм образовалось N = 20 капель свинца. На сколько укоротилась проволока? Поверхностное натяжение жидкого свинца α = 0,47 Н/м. Диаметр шейки капли в момент отрыва считать равным диаметру проволоки.

Решение

Капля отрывается от проволоки, когда сила тяжести равна силе поверхностного натяжения, т. е. $mg = F$. Масса капли $m = \rho V_K$. Сила поверхностного натяжения $F = \alpha l$, где $l = \pi d$, откуда $F = \pi\alpha d$. Отсюда объем капли $V_K = \frac{\pi\alpha d}{\rho}$.

Полный объем расплавленного свинца $V = NV_K = \frac{\pi N\alpha d}{\rho}$. С другой стороны, $V = \frac{\pi d^2}{4}\Delta l$. Тогда $\frac{\pi d^2}{4}\Delta l = \frac{\pi N\alpha d}{\rho}$, отсюда $\Delta l = \frac{4N\alpha}{\rho g d} = 34$ см.

7.39 Вода по каплям вытекает из вертикальной трубки внутренним радиусом r = 1 мм. Найти радиус R капли в момент отрыва. Каплю считать сферической. Диаметр шейки капли в момент отрыва считать равным внутреннему диаметру трубки.

Решение

Сила тяжести, необходимая для отрыва капли (см. задачу 7.37) $p = 2\pi r\alpha$. С другой стороны, сила тяжести $p = mg$, где $m = \rho V$ — масса оторвавшейся капли. Т.к. по условию капля сферическая, то $V = \frac{4}{3}\pi R^3$, тогда $2\pi r\alpha = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho g$, откуда $R^3 = \frac{3r\alpha}{2\rho g}$ или $R = \sqrt[3]{\frac{3r\alpha}{2\rho g}} = 2{,}2$ мм.

7.40 На сколько нагреется капля ртути, полученная от слияния двух капель радиусом r = 1 мм каждая?

Решение

При слиянии двух капель ртути выделяется энергия $\Delta W = \alpha\Delta S$, где изменение площади поверхности $\Delta S = 4\pi r^2 \cdot 2 - 4\pi R^2$. Радиус большой капли R найдем, приравняв объем большой капли сумме объемов слившихся капель, т.е. $2\cdot\frac{4\pi r^3}{3} = \frac{4\pi R^3}{3}$, откуда $R = r\sqrt[3]{2}$. Тогда $\Delta S = 4\pi r^2\left(2 - \sqrt[3]{4}\right)$ и $\Delta W = \alpha \cdot 4\pi r^2\left(2 - \sqrt[3]{4}\right)$ — (1). За счет выделенной энергии произойдет нагревание ртутной капли, тогда $\Delta W = cm\Delta T = c\rho\frac{4}{3}\pi R^3\Delta T = c\rho\frac{8}{3}\pi r^3\Delta T$ — (2).

Приравнивая (1) и (2), найдем $\Delta T = \frac{3\alpha\left(2 - \sqrt[3]{4}\right)}{c\rho 2r} = 1{,}65\cdot 10^{-4}$ К.

7.41 Какую работу A против сил поверхностного натяжения надо совершить, чтобы разделить сферическую каплю ртути радиусом R = 3 мм на две одинаковые капли?

Решение

Т. к. капля разрывается на две одинаковые, то площадь ΔS, по которой произойдет разрыв, будет равна площади круга, проходящего через центр капли, т. е. $\Delta S = \pi R^2$. Тогда работа против сил поверхностного натяжения $A = \alpha \Delta S = \alpha \pi R^2 = 14{,}7$ мкДж.

7.42 Какую работу A против сил поверхностного натяжения надо совершить, чтобы увеличить вдвое объем мыльного пузыря радиусом r = 1 см? Поверхностное натяжение мыльного раствора α = 0,043 Н/м.

Решение

Т. к. по условию $V_2 = 2V_1$, где $V_1 = \frac{4}{3}\pi r_1^3$ и $V_2 = \frac{4}{3}\pi r_2^3$ — объемы пузыря до и после совершения работы, то $r_2^3 = 2r_1^3$ или $r_2 = \sqrt[3]{2}r_1$. Изменение площади поверхности пузыря до и после совершения работы — $\Delta S = S_2 - S_1 = 4\pi\left[r_2^2 - r_1^2\right] = 4\pi r_1^2\left[\sqrt[3]{4} - 1\right]$. Т. к. у оболочки пузыря две поверхности, наружная и внутренняя, то совершенная работа $A = 2\alpha\Delta S = 8\pi r_1^2\alpha\left[\sqrt[3]{4} - 1\right] = 63{,}4$ мкДж.

7.43 Какую работу A против сил поверхностного натяжения надо совершить, чтобы выдуть мыльный пузырь диаметром d = 4см? Поверхностное натяжение мыльного раствора α = 0,043 Н/м.

Решение

Площадь поверхности мыльного пузыря $S = 4\pi r^2 = \pi d^2$, тогда совершенная работа против сил поверхностного натяжения (см. задачу 7.42) $A = 2\alpha S = 2\pi d^2\alpha = 432$ мкДж.

7.44 Найти давление p воздуха в воздушном пузырьке диаметром d = 0,01 мм, находящемся на глубине h = 20 см под поверхностью воды. Атмосферное давление p_0 = 101,7 кПа.

Решение

Давления воздуха в пузырьке $p = p_0 + p_1 + p_2$, где p_0 — атмосферное давление, $p_1 = \rho g h$ — гидростатическое давление воды, $p_2 = \frac{4\alpha}{d}$ — добавочное давление, вызванное кривизной поверхности. Таким образом, $p = p_0 + \rho g h + \frac{4\alpha}{d} = 132{,}9$ кПа.

7.45 Давление воздуха внутри мыльного пузыря на Δp = 133,3 Па больше атмосферного. Найти диаметр d пузыря. Поверхностное натяжение мыльного раствора α = 0,043 Н/м.

Решение

Добавочное давление внутри мыльного пузыря, вызванное кривизной его поверхности, $\Delta p = 2\alpha\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)$. Т. к. пузырь сферический, то радиусы кривизны взаимно перпендикулярных поверхностей $R_1 = R_2 = \frac{d}{2}$, тогда $\Delta p = \frac{8\alpha}{d}$, откуда $d = \frac{8\alpha}{\Delta p} = 2{,}58$ мм.

7.46 На какой глубине h под водой находится пузырек воздуха если известно, что плотность воздуха в нем ρ = 2 кг/м^3? Диаметр пузырька d = 15 мкм, температура t = 20 °С, атмосферное давление p_0 = 101,3 кПа.

Решение

Давление воздуха в пузырьке сложится из атмосферного давления p_0, гидростатического давления воды $p_1 = \rho_1 gh$ и добавочного давления $\Delta p = \frac{4\alpha}{d}$, вызванного кривизной поверхности, т.е. $p = p_0 + \rho_1 gh + \frac{4\alpha}{d}$. Из закона Бойля—Мариотта $p_0 V = pV_0$ следует, что $\frac{p_0}{p} = \frac{V_0}{V} = \frac{\rho_0}{\rho}$, тогда $\frac{\rho_0}{\rho} = \frac{p_0}{\rho_0 + \rho_1 gh + 4\alpha / d}$, откуда $p_0 + \rho_1 gh + \frac{4\alpha}{d} = \frac{p_0\rho}{\rho_0}$ или $\rho_1 gh = \frac{p_0\rho}{\rho_0} - \frac{4\alpha}{d} - p_0$. Окончательно, глубина погружения:

$$h = \frac{p_0\rho d - 4\alpha\rho_0 - p_0\rho_0 d}{\rho_0 + \rho_1 gd};\ h = \frac{p_0 d(\rho - \rho_0) - 4\alpha\rho_0}{\rho_0 + \rho_1 gd};\ h = 4{,}72\ \text{м}.$$

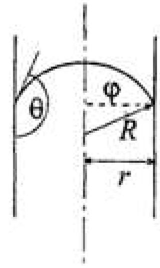
7.47 Во сколько раз плотность воздуха в пузырьке, находящемся на глубине h = 5 м под водой, больше плотности воздуха при атмосферном давлении p_0 = 101,3 кПа? Радиус пузырька r = 0,5 мкм.

Решение

Отношение плотностей воздуха в пузырьке и на поверхности (см. задачу 7.46) $\frac{\rho_0}{\rho} = \frac{p_0}{p_0 + \rho_1 gh + 2\alpha / r} = 4{,}4$.

7.48 В сосуд с ртутью опущен открытый капилляр, внутренний диаметр которого d = 3 мм. Разность уровней в сосуде и в капилляре Δh = 3,7 мм. Найти радиус R кривизны мениска в капилляре.

Решение



Из рисунка видно, что $r = R\cos\varphi = R\cos \times (180° - \theta) = -R\cos\theta$, где θ — краевой угол. Добавочное давление, вызванное кривизной мениска, $\Delta p = -\frac{2\alpha\cos\theta}{r}$. Т.к. для ртути $\cos\theta < 0$, то $\Delta p > 0$, следовательно, уровень ртути в капилляре будет ниже, чем в сосуде. Разность уровней $\Delta h = -\frac{4\alpha\cos\theta}{\rho g d}$, отсюда $-\cos\theta = \frac{\Delta h \rho g d}{4\alpha} = 0{,}74$. Следовательно, радиус кривизны мениска ртути $R = -\frac{r}{\cos\theta} = 2$ мм.

7.49 В сосуд с водой опущен открытый капилляр, внутренней диаметр которого d = 1 мм. Разность уровней в сосуде и в капилляре Δh = 2,8 см. Найти радиус кривизны R мениска в капилляре. Какова была бы разность уровней Δh в сосуде и в капилляре, если бы смачивание было полным?

Решение

Высота поднятия жидкости в трубке $\Delta h = \frac{2\alpha\cos\theta}{r\rho g}$ — (1). Радиус кривизны мениска $R = r\cos\varphi = r\cos(180° - \theta) = |-r\cos\theta|$ — (2). Из (1) $\cos\theta = \frac{\Delta h r \rho g}{2\alpha}$, и т. к. $r = \frac{d}{2}$, то окончательно $R = \frac{d^2 \Delta h \rho g}{8\alpha} = 0{,}46$ мм. Если бы смачивание было полным, то $\theta = 0°$ и $\cos\theta = 1$, тогда из (1) $\Delta h = \frac{4\alpha}{d\rho g} = 2{,}98$ мм.

7.50 На какую высоту h поднимается бензол в капилляре, внутренний диаметр которого d = 1 мм? Смачивание считать полным.

Решение

Т.к. смачивание полное, то высота поднятия бензола в капилляре (см. задачу 7.49) $h = \frac{4\alpha}{d\rho g} = 13{,}86$ мм.

7.51 Каким должен быть внутренний диаметр d капилляра чтобы при полном смачивании вода в нем поднималась на $\Delta h = 2$ см? Задачу решить, когда капилляр находится: а) на Земле б) на Луне.

Решение

При полном смачивании высота поднятия жидкости в капилляре (см. задачу 7.49) $\Delta h = \frac{4\alpha}{d\rho g}$, откуда $d = \frac{4\alpha}{\rho g \Delta h}$.
а) На Земле $g = 9{,}8$ м/с^2, тогда $d = 1{,}48$ мм. б) На Луне $g = 1{,}65$ м/с^2, тогда $d = 8{,}83$ мм.

7.52 Найти разность уровней Δh ртути в двух сообщающихся капиллярах, внутренние диаметры которых равны $d_1 = 1$ мм и $d_2 = 2$ мм. Несмачивание считать полным.

Решение

Высота поднятия жидкости в капилляре (см. задачу 7.49) $h = \frac{2\alpha \cos\theta}{r\rho g}$. Поскольку $r = \frac{d}{2}$, то $h = \frac{4\alpha \cos\theta}{\rho g d}$. При полном несмачивании $\theta = 180°$ и $\cos\theta = -1$, тогда высота поднятия жидкости в первом и втором капилляре соответственно равна $h_1 = -\frac{4\alpha}{\rho g d_1}$ и $h_2 = -\frac{4\alpha}{\rho g d_2}$. Тогда разность уровней $\Delta h = h_2 - h_1 = -\frac{4\alpha}{\rho g d_2} - \left(-\frac{4\alpha}{\rho g d_1}\right) = \frac{4\alpha}{\rho g}\left(\frac{1}{d_1} - \frac{1}{d_2}\right) = \frac{4\alpha(d_2 - d_1)}{\rho g d_1 d_2} = 7{,}5$ мм.

7.53 Каким должен быть наибольший диаметр d пор в шприце керосинки, чтобы керосин поднимался от дна керосинки до тарелки (высота $h = 10$ см)? Считать поры цилиндрическими рубками и смачивание полным.

Решение

Т. к. по условию поры цилиндрические и смачивание полное, то наибольший диаметр капилляра (см. задачу 7.51) $d = \frac{4\alpha}{\rho g h} = 0{,}15$ мм.

7.54 Капилляр внутренним радиусом r = 2 мм опущен в жидкость. Найти поверхностное натяжение α жидкости, если известно, что в капилляр поднялась масса жидкости m = 0,09 г.

Решение

При полном смачивании высота поднятия жидкости в капилляре (см. задачу 7.49) $h = \frac{2\alpha}{\rho g r}$ — (1). Масса поднятой жидкости $m = \rho V$, где $V = Sh$ и $S = 2\pi r^2$, т. к. у пленки две стороны, тогда $m = 2\rho\pi r^2 h$, отсюда $h = \frac{m}{2\rho\pi r^2}$ — (2) Т. к. в формулах (1) и (2) левые части равны, то можно приравнять и правые части, тогда $\frac{2\alpha}{\rho g r} = \frac{m}{2\rho\pi r^2}$ или $\frac{2\alpha}{g} = \frac{m}{2\pi r}$, отсюда окончательно $\alpha = \frac{gm}{4\pi r} = 0{,}07$ Н/м.

7.55 В сосуд с водой опущен капилляр, внутренний радиус которого r = 0,16 мм. Каким должно быть давление p воздуха над жидкостью в капилляре, чтобы уровень воды в капилляре и с сосуде был одинаков? Атмосферное давление p_0 = 101,3 кПа. Смачивание считать полным.

Решение

При полном смачивании высота поднятия жидкости в капилляре (см задачу 7.49) $h = \frac{2\alpha}{\rho g r}$. Чтобы уровень воды в сосуде и капилляре был одинаковым, необходимо, чтобы давление было равно $p = p_0 + \rho g h = p_0 + \rho g \frac{2\alpha}{\rho g r} = p_0 + \frac{2\alpha}{r} = 102.2$ кПа.

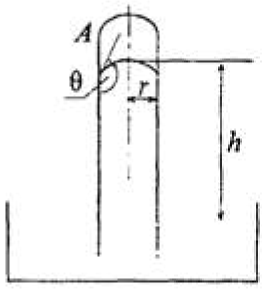
7.56 Капиллярная трубка опущена вертикально в сосуд с водой. Верхний конец трубки запаян. Для того чтобы уровень воды в трубке и в широком сосуде был одинаков, трубку пришлось погрузить в воду на 15% ее длины. Найти внутренней радиус r трубки. Атмосферное давление p_0 = 100 кПа.

Решение

По закону Бойля — Мариотта $p_0 V_0 = pV$, где p_0 и p — давления воздуха в капилляре до и после погружения его в воду, V_0 и V — объемы воздуха в капилляре до и после погружения. $p = p_0 + \frac{2\alpha}{r}$, $V_0 = Sh_0$, где S — площадь сечения капилляра и h_0 — его длина, $V = Sh$, где h — длина непогруженной части капилляра. С учетом этого $p_0 h_0 = \left(p_0 + \frac{2\alpha}{r}\right)h$, откуда $r = \frac{2\alpha h}{p_0(h_0 - h)}$ — (1). По условию $\frac{(h_0 - h)}{h_0} = 0\,015$, или $\frac{h}{(h_0 - h)} = 65{,}7$. Подставляя числовые данные в (1), получим $r = 0{,}1$ мм.

7.57 Барометрическая трубка A, заполненная ртутью, имеет внутренний диаметр d, равный: а) 5 мм; б) 1,5 см. Можно ли определить атмосферное давление непосредственно по высоте ртутного столба? Найти высоту ртутного столба в каждом из этих случаев. Атмосферное давление p_0 = 758 мм рт. ст. Несмачивание считать полным.

Решение



Высота поднятия жидкости в капилляре $h = \frac{2\alpha \cos\theta}{\rho g r}$, где θ — краевой угол, α — поверхностное натяжение. При полном несмачивании $\theta = \pi$ и $\cos\theta = -1$, тогда $h = \left| -\frac{2\alpha}{\rho g r} \right| = \frac{4\alpha}{\rho g d}$ — (1) — высота, создающая дополнительное давление за счет кривизны поверхности мениска. а) Если $d = 5$ мм, то из (1) найдем $h = 3$ мм, тогда $p = p_0 - h = 755$ мм рт. ст. б) Если $d = 1{,}5$ см, то $h = 1$ мм, тогда $p = p_0 - h = 757$ мм рт. ст. Таким образом, если трубка узкая, то атмосферное давление не может быть непосредственно определено по высоте ртутного столба h, т. к. к давлению столба прибавляется еще давление выпуклого мениска в трубке.

7.58 Внутренний диаметр барометрической трубки d = 0,75 см. Какую поправку надо ввести, измеряя атмосферное давление по высоте ртутного столба? Несмачивание считать полным.

Решение

Поправка к атмосферному давлению при полном несмачивании (см. задачу 7.57) $h = \frac{4\alpha}{\rho g d} = 2$ мм.

7.59 Какую относительную ошибку мы допускаем, вычисляя атмосферное давление p_0 = 101,3 кПа по высоте ртутного столба, если внутренний диаметр барометрической трубки d равен: а) 5 мм; б) 10 мм? Несмачивание считать полным.

Решение

Из закона Паскаля $p_0 = \rho g h_0$. Тогда высота ртутного столба $h_0 = \frac{p_0}{\rho g} = 760$ мм. рт. ст. Поправка к атмосферному давлению при полном несмачивании (см. задачу 7.57) $h = \frac{4\alpha}{\rho g d}$. Тогда относительная ошибка $x = \frac{h}{h_0} = \frac{4\alpha}{\rho g d}\frac{\rho g}{p_0} = \frac{4\alpha}{d p_0}$. а) Если $d_1 = 5$ мм, то $x_1 = 0.39\%$. б) Если $d = 10$ мм, то $x_2 = 0{,}19\%$.

7.60 На поверхность воды положили жирную (полностью несмачиваемую водой) стальную иголку. Каков наибольший диаметр *d* иголки, при котором она еще может держаться на роде?

Решение

Для того чтобы иголка не тонула, необходимо, чтобы давление, оказываемое иголкой на площадь ее опоры, было не больше давления, вызванного кривизной поверхности жидкости в углублении под иголкой. Давление иголки на воду $p_1 = \frac{mg}{ld} = \frac{\rho V g}{ld} = \frac{\rho \pi d g}{4}$, где l — длина иголки и V — ее объем. Давление, вызванное кривизной поверхности жидкости, определяется формулой Лапласа $p_2 = \alpha\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)$. В нашем случае поверхность жидкости цилиндрическая, т.е. $R_1 = \infty$ и $R_2 = r$ — радиус иголки. Тогда $p_2 = \frac{\alpha}{r} = \frac{2\alpha}{d}$. Т. к. необходимо, чтобы $p_1 \le p_2$, то $\frac{\rho \pi d g}{4} \le \frac{2\alpha}{d}$, откуда $d \le \sqrt{\frac{8\alpha}{\rho \pi g}} = 1{,}6$ мм.

7.61 Будет ли плавать на поверхности воды жирная (полностью несмачиваемая водой) платиновая проволока диаметр $d = 1$ мм?

Решение

Чтобы проволока могла держаться на воде, необходимо, чтобы давление, оказываемое проволокой на площадь ее опоры, не превышало давления, вызванного кривизной поверхности жидкости в углублении под проволокой и направленного вверх (силой Архимеда пренебрегаем). Давление проволоки на воду $p_1 = \frac{mg}{ld} = \frac{\rho V g}{ld} = \frac{\rho \pi d g}{4}$, где l — длина проволоки и V — ее объем. Давление, вызванное кривизной поверхности жидкости, определяется формулой Лапласа $p_2 = \frac{\alpha}{r} = \frac{2\alpha}{d}$. Т. к. необходимо, чтобы $p_1 \le p_2$, то $\frac{\rho \pi d g}{4} \le \frac{2\alpha}{d}$, откуда $d_{max} = \sqrt{\frac{8\alpha}{\rho \pi g}}$. Для платины $\rho = 21{,}4 \times 10^3$ кг/м^3, для воды $\alpha = 0{,}073$ Н/м, тогда $\alpha_{max} = 0{,}09$ мм, а по условию $d = 1$ мм, значит, проволока плавать не будет.

7.62 В дне сосуда с ртутью имеется отверстие. Каким может быть наибольший диаметр d отверстия, чтобы ртуть из сосуда не выливалась при высоте столба ртути h = 3 см?

Решение

Чтобы ртуть не выливалась из сосуда, давление ртутного столба высотой h должно быть равно добавочному давлению, вызванному кривизной поверхности жидкости, т.е. $p = \Delta p$. По закону Паскаля $p = \rho gh$, а по формуле Лапласа $\Delta p = \frac{4\alpha}{d}$, тогда $\rho gh = \frac{4\alpha}{d_{max}}$, откуда $d_{max} = \frac{4\alpha}{\rho gh} =$ $= 0.5$ мм.

7.63 В дне стеклянного сосуда площадью S = 30 см^2 имеется круглое отверстие диаметром d = 0.5 мм. В сосуд налита ртуть. Какая масса ртути останется в сосуде?

Решение

Давление ртути на дно сосуда $p = \frac{mg}{S}$. Добавочное давление, вызванное кривизной поверхности жидкости, $\Delta p = \frac{4\alpha}{d}$. Чтобы ртуть осталась в сосуде, необходимо, чтобы $p = \Delta p$ или $\frac{mg}{S} = \frac{4\alpha}{d}$, тогда $m = \frac{4\alpha S}{gd} = 1{,}22$ кг.

7.64 Водомерка бегает по поверхности воды. Найти массу водомерки, если известно, что под каждой из шести лапок насекомого образуется ямка, равная полусфере радиусом r = 0,1 мм.

Решение

Для того чтобы водомерка держалась на воде, необходимо, чтобы давление, оказываемое ею на площадь опоры, не превышало давления, вызванного кривизной поверхности жидкости в углублениях под ее лапками. Давление одной лапки на воду $p_1 = \frac{mg}{6 \cdot 2\pi r^2}$. Давление, вызванное кривизной поверхности жидкости, $p_2 = \frac{\alpha}{r}$ (см. задачу 7.60). Приравнивая p_1 и p_2, получим $\frac{\alpha}{r} = \frac{mg}{12\pi r^2}$, отсюда $m = \frac{12\pi r \alpha}{g}$; $m = 28$ мг.

7.65 Какую силу F приложить, чтобы оторвать друг от друга (без сдвига) две смоченные фотопластинки размером S = 9x12 см^2? Толщина водяной прослойки между пластинками d = 0,05 мм. Смачивание считать полным.

Решение

Поверхность жидкости между пластинками имеет радиус кривизны $R=\frac{d}{2}$ (Рис.). Тогда добавочное отрицательное давление под цилиндрической вогнутой поверхностью $p=\frac{\alpha}{R}=\frac{2\alpha}{d}$. Величина p — избыток внешнего давления, действующего на площадь пластинок S. Следовательно, сила, которую надо приложить, чтобы оторвать пластинки друг от друга, $F=pS=\frac{2\alpha}{d}S=31{,}5$ Н.

7.66 Между двумя вертикальными плоскопараллельными стеклянными пластинками, находящимися на расстоянии d = 0,25 мм друг от друга, налита жидкость. Найти плотность ρ жидкости, если известно, что высота поднятия жидкости между пластинками h = 3,1 см. Поверхностное натяжение жидкости α = 0,03 Н/м. Смачивание считать полным.

Решение

Поверхность смачивающей жидкости между пластинками имеет цилиндрическую форму с радиусом кривизны $R=\frac{d}{2}$. Тогда добавочное отрицательное давление под цилиндрической вогнутой поверхностью $p=\frac{\alpha}{R}=\frac{2\alpha}{d}$. С другой стороны, по закону Паскаля $p=\rho gh$. Тогда $\frac{2\alpha}{d}=\rho gh$, отсюда $\rho=\frac{2\alpha}{dgh}=0{,}79\cdot10^3$ кг/м^3.

7.67 Между двумя горизонтальными плоскопараллельны стеклянными пластинками помещена масса m = 5 г ртути. Когда верхнюю пластинку положили груз массой М = 5 кг, расстояние между пластинками стало равным d = 0,087 мм. Пренебрегая массой пластинки по сравнению с массой груза, найти поверхностное натяжение α ртути. Несмачивание считать полным.

Решение

Поверхность ртути между пластинками имеет цилиндрическую форму и радиус кривизны $R = \frac{d}{2}$. Силу добавочного отрицательного давления можно определить по формуле $F = \frac{2\alpha}{d}S$ из задачи 7.65, но в данном случае поверхность будет выпуклая, т. к. имеет место полное несмачивание. Груз давит на ртуть с силой $P = Mg$ — (2). Поскольку силы уравновешены, то $\vec{F} + \vec{P} = 0$ или $F = P$. Подставляя (1) и (2), получим $\frac{2\alpha}{d}S = Mg$ — (3). Масса ртути $m = \rho V = \rho S d$, откуда $S = \frac{m}{\rho d}$. Подставим это выражение в (3): $\frac{2\alpha m}{d^2\rho} = Mg$, откуда $\alpha = \frac{Mg\rho d^2}{2m}$; $\alpha = 0{,}5$ Н/м.

7.68 В открытом капилляре, внутренний диаметр которого d = 1 мм, находится капля воды. При вертикальном положении капилляра капля образует столбик высотой h, равной: а) 2 см, б) 4 см, в) 2,98 см. Найти радиусы кривизны R_1, и R_2 верхнего и нижнего менисков в каждом из этих случаев. Смачивание считать полным.

Решение

Верхний мениск будет вогнут, давление p_1, вызванное кривизной этого мениска, направлено вверх и равно $p_1 = \frac{2\alpha}{R_1}$, где R_1 — радиус кривизны верхнего мениска. При полном смачивании $p_1 = \frac{2\alpha}{r}$, где r — радиус капилляра. Гидростатическое давление столба жидкости p_2 направлено вниз; $p_2 = \rho g h$. Если $p_1 > p_2$, то результирующее давление, направленное вверх, заставляет нижний мениск быть вогнутым. При этом давление p_3, вызванное кривизной нижнего мениска, направлено вниз и равно $p_3 = \frac{2\alpha}{R_2}$, где R_2 — радиус кривизны нижнего мениска. В равновесии $p_1 = p_2 + p_3$. Если $p_1 < p_2$, то результирующее давление направлено вниз и нижний мениск будет выпуклым. При этом давление $p_3 = \frac{2\alpha}{R_2}$

будет направлено уже вверх. В этом случае $p_1 + p_3 = p_2$. Если $p_1 = p_2$, то нижний мениск будет плоским и $p_3 = 0$. Подставив числовые данные, получим: а) $R_1 = 0{,}5$ мм, $R_2 = -1{,}52$ мм; б) $R_1 = 0{,}5$ мм, $R_2 = 1{,}46$ мм; в) $R_1 = 0{,}5$ мм, $R_2 = \infty$.

7.69 Горизонтальный капилляр, внутренний диаметр которого $d = 2$ мм, наполнен водой так, что в нем образовался столбик длиной $h = 10$ см. Какая масса m воды вытечет из капилляра, если его поставить вертикально? Смачивание считать полным. Указание: учесть, что предельная длина столбика воды, оставшейся в капилляре, должна соответствовать радиусу кривизны нижнего мениска, равному радиусу капилляра.

Решение

При вертикальном положении капилляра верхний мениск вогнут и давление, вызванное кривизной этого мениска, всегда направлено вверх и равно $p_1 = \frac{2\alpha}{r} = \frac{4\alpha}{d}$, где d — диаметр капилляра. Гидростатическое давление столба жидкости всегда направлено вниз и равно $p_2 = \rho gh$. Предельная длина столбика воды, оставшейся в капилляре, должна соответствовать радиусу кривизны нижнего мениска, равному радиусу капилляра, поэтому $p_1 < p_2$, результирующее давление будет направлено вниз и нижний мениск будет выпуклым. При этом давление $p_3 = \frac{4\alpha}{d}$ будет направлено уже вверх и $p_1 + p_3 = p_2$ или $\frac{8\alpha}{d} = \rho g h_1$, откуда $h_1 = \frac{8\alpha}{\rho g d}$ — высота столбика жидкости, оставшейся в капилляре $m_1 = \rho S h_1$, а ее первоначальная масса $m_2 = \rho S h_0$, тогда масса жидкости, которая выльется $m = m_0 - m_1 = \rho S(h_0 - h_1)$, где $S = \frac{\pi d^2}{4}$ — площадь поперечного сечения капилляра, поэтому окончательно $m = \frac{\rho \pi d^2}{4}\left(h_0 - \frac{8\alpha}{\rho g d}\right) = 0{,}22$ г.

7.70 В открытом вертикальном капилляре, внутренний радиус которого $r = 0{,}6$ мм, находится столбик спирта. Нижний мениск этого столбика нависает на нижний конец капилляра. Найти высоту h столбика спирта, при которой радиус кривизны R нижнего мениска равен: а) $3r$; б) $2r$; в) r. Смачивание считать полным.

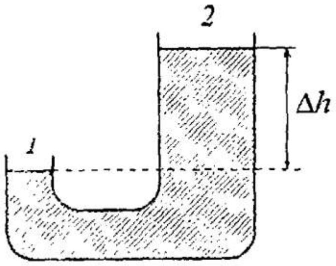
Решение

По условию, нижний мениск выпуклый, тогда результирующее давление направлено вниз, следовательно (см. задачу 7.69), $p_1 + p_3 = p_2$, где $p_1 = \frac{2\alpha}{r}$, $p_2 = \rho gh$ и $p_3 = \frac{2\alpha}{R}$. Тогда $\frac{2\alpha}{r} + \frac{2\alpha}{R} = \rho gh$, откуда $h = \frac{2\alpha(R + r)}{\rho g r R}$.

а) Если $R = 3r$, то $h = \frac{8\alpha}{3\rho g r} = 11{,}5$ мм. б) Если $R = 2r$, то $h = \frac{3\alpha}{\rho g r} = 12{,}9$ мм. в) Если $R = r$, то $h = \frac{4\alpha}{\rho g r} = 17{,}2$ мм.

7.71 Трубка, изображенная на рисунке, открыта с обоих концов и наполнена керосином. Внутренние радиусы трубок 1 и 2 равны r_1 = 0,5 мм и r_2 = 0,9 мм. При какой разности уровней Δh мениск на конце трубки 1 будет: а) вогнутым с радиусом кривизны $R = r_{12}$; г) выпуклым с радиусом кривизны $R = r_1$? Смачивание считать полным.

Решение



Высота поднятия жидкости в капилляре $h = \dfrac{2\alpha\cos\theta}{\rho g r}$. Тогда для каждой трубки $h_1 = \dfrac{2\alpha\cos\theta}{\rho g R}$ и $h_2 = \dfrac{2\alpha\cos\theta}{\rho g r_2}$. Т. к. по условию смачивание полное, то во второй трубке всегда $\theta = 0$, отсюда $\cos\theta = 1$. Тогда перепад высот в трубках $\Delta h = h_2 - h_1 = \dfrac{2\alpha}{\rho g}\left(\dfrac{\cos\theta}{R} - \dfrac{1}{r_2}\right)$. а) Мениск на конце трубки 1 будет вогнутым, с $R = r_1$, если $\theta = 0$, отсюда $\cos\theta = 1$ — полное смачивание $\Delta h = \dfrac{2\alpha}{\rho g}\left(\dfrac{1}{r_1} - \dfrac{1}{r_2}\right) = 6{,}8$ мм. б) Мениск на конце трубки 1 будет плоским, если $\theta = \dfrac{\pi}{2}$, отсюда $\cos\theta = 0$; $\Delta h = \dfrac{2\alpha}{\rho g r_2} = 8{,}5$ мм. в) Мениск на конце трубки 1 будет выпуклым, с $R = r_2$, если $\theta = \pi$, отсюда $\cos\theta = -1$ $\Delta h = \dfrac{2\alpha}{\rho g}\dfrac{2}{r_2} = 17$ мм. г) Мениск на конце трубки 1 будет выпуклым, с $R = r_1$, если $\theta = \pi$, отсюда $\cos\theta = -1$ — полное несмачивание $\Delta h = \dfrac{2\alpha}{\rho g}\left(\dfrac{1}{r_1} + \dfrac{1}{r_2}\right) = 23{,}8$ мм.

7.72 В широкий сосуд с водой опущен капилляр так, что Верхний его конец находится выше уровня воды в сосуде на h = 2 см. Внутренний радиус капилляра r = 0,5 мм. Найти радиус кривизны R мениска в капилляре. Смачивание считать полным.

Решение

Если бы капилляр был достаточно длинным, то вода поднялась бы в нем на высоту $h' = \frac{2\alpha \cos\theta}{\rho g r} = 2{,}98$ см. Но высота капилляра над водой $h < h'$. К мениску приложены давление $p_0 = \frac{2\alpha}{R}$, вызванное кривизной мениска и направленное вверх, и гидростатическое давление $p = \rho g h$. Для любой высоты h будем иметь $\rho g h = \frac{2\alpha}{R}$, откуда $R = \frac{2\alpha}{\rho g h} = 0{,}75$ мм.

7.73 Ареометр плавает в воде, полностью смачивающей его стенки. Диаметр вертикальной цилиндрической трубки ареометра d = 9 мм. На сколько изменится глубина погружения ареометра, если на поверхность воды налить несколько капель спирта?

Решение

На плавающий ареометр действуют сила Архимеда $\vec{F}_A$, направленная вверх, сила тяжести $\vec{P}$, направленная вниз, сила поверхностного натяжения $\vec{F}$, направленная вниз, т. к. смачивание является полным. Условие равновесия имеет вид: $\vec{P} + \vec{F} + \vec{F}_A = 0$ или в скалярном виде $P + F = F_A$. Имеем $P = mg$; $F = 2\pi r\alpha = \pi d\alpha$; $F_A = \rho g \times$ $\times(V + Sh)$, где V — объем ареометра (без трубки), S — площадь поперечного сечения трубки ареометра, h — длина трубки. Тогда для воды $mg + \pi d\alpha_1 = \rho g(V + Sh_1)$; для спирта $mg + \pi d\alpha_2 = \rho g(V + Sh_2)$ (считаем, что плотность воды не изменилась). Решая совместно эти два уравнения, найдем $\Delta h = \frac{4(\alpha_1 - \alpha_2)}{\rho g d} = 2{,}4$ мм.

7.74 Ареометр плавает в жидкости, полностью смачивающей его стенки. Диаметр вертикальной цилиндрической трубки ареометра d = 9 мм. Плотность жидкости $\rho = 0{,}8\cdot10^3$ кг/м^3 поверхностное натяжение жидкости α = 0,03 Н/м. На сколько изменится глубина погружения ареометра, если вследствие замасливания ареометр стал полностью несмачиваемым этой жидкостью?

Решение

На ареометр, плавающий в жидкости, действуют: сила тяжести P, направленная вниз, сила поверхностного натяжения $F = \pi d\alpha$, направленная при полном смачивании вниз, а при полном несмачивании вверх и сила Архимеда $F_A = \rho g(V + Sh)$, направленная вверх, где V — объем цилиндрической части ареометра, S — площадь поперечного сечения трубки ареометра и h — длина цилиндрической трубки, находящейся в жидкости. Условие равновесия при полном смачивании $P + F = F_{A1}$, а при полном несмачивании $P = F + F_{A2}$, следовательно, $F_{A1} - F = F + F_{A2}$ или $\rho gV + \rho gSh_1 - \pi d\alpha = \pi d\alpha + \rho gV + \rho gSh_2$. Отсюда $\rho gS(h_1 - h_2) = \rho gS\Delta h = 2\pi d\alpha$ и, окончательно, $\Delta h = \frac{2\pi d\alpha}{\rho gS} = \frac{2\pi d\alpha}{\rho g\frac{\pi d^2}{4}} = \frac{8\alpha}{\rho gd} = 3{,}4$ мм.

7.75 При растворении массы m = 10 г сахара ($C_{12}H_{22}O_{11}$) в объеме V = 0,5 л воды осмотическое давление раствора p = 152 кПа. При какой температуре T находится раствор? Диссоциация молекул сахара отсутствует.

Решение

Осмотическое давление раствора связано с термодинамической температурой формулой Вант-Гоффа $p = CRT$. Молярная концентрация раствора $C = \frac{m}{\mu V}$, где $\mu = 0{,}342$ кг/моль, тогда $p = \frac{mRT}{\mu V}$, откуда $T = \frac{\mu Vp}{mR}$. Подставляя в полученное выражение числовые данные, получим: $T = \frac{0{,}342\cdot 0{,}5\cdot10^{-3}\cdot152\cdot10^3}{10^{-2}\cdot 8{,}31} = 313$ К.

7.76 Осмотическое давление раствора, находящегося при температуре t = 87 °С, p = 165 кПа. Какое число N молекул воды приходится на одну молекулу растворенного вещества в этом растворе? Диссоциация молекул вещества отсутствует.

Решение

Осмотическое давление (см. задачу 7.75) $p = CRT$. Т. к. по условию диссоциация молекул в растворе отсутствует, то молярная концентрация $C = \frac{N_1}{N_A}$, тогда $p = \frac{N_1 RT}{N_A} = N_1 kT$, откуда $N_1 = \frac{\nu N_A}{V}$, где $\nu = \frac{m}{\mu} = \frac{\rho V}{\mu}$, тогда $N_2 = \frac{\rho N_A}{\mu}$. Следовательно, $N = \frac{N_2}{N_1} = \frac{\rho N_A}{\mu}\frac{kT}{p} = \frac{\rho RT}{\mu p} = 1007$ молекул.

7.77 Масса m = 2 г поваренной соли растворена в объеме V = 0,5 л воды. Степень диссоциации молекул поваренной соли α = 0,75. Найти осмотическое давление p раствора при температуре t = 17 °С.

Решение

Если масса всей растворенной в воде поваренной соли равна m, а степень диссоциации α, то масса диссоциированной соли равна αm, а масса недиссоциированной — $(1-\alpha)m$. Тогда молярная концентрация раствора $C = \frac{((1-\alpha)m)/\mu + \alpha m/(2\mu_1) + \alpha m/(2\mu_2)}{V}$;

$C = \frac{m(2\mu_1\mu_2(1-\alpha) + \alpha\mu^2)}{2\mu\mu_1\mu_2 V} = 124{,}5$ моль/м^3. Следовательно, осмотическое давление $p = CRT = 300$ кПа.

7.78 Степень диссоциации молекул поваренной соли при растворении ее в воде α = 0,4. При этом осмотическое давление раствора, находящегося при температуре t = 27 °С, p = 118,6 кПа. Какая масса m поваренной соли растворена в объеме V = 1 л воды?

Решение

Молярная концентрация частично диссоциированного раствора поваренной соли (см. задачу 7.78) $C = \frac{m(2\mu_1\mu_2(1-\alpha) + \alpha\mu^2)}{2\mu\mu_1\mu_2 V}$. С другой стороны, из формулы Вант-Гоффа $C = \frac{P}{RT}$, тогда $\frac{P}{RT} = \frac{m(2\mu_1\mu_2(1-\alpha) + \alpha\mu^2)}{2\mu\mu_1\mu_2 V}$, откуда $m = \frac{2\mu\mu_1\mu_2 Vp}{RT(2\mu_1\mu_2(1-\alpha) + \alpha\mu^2)} = 1{,}93$ г.

7.79 Масса m = 2,5 г поваренной соли растворена в объеме V = 1 л воды. Температура раствора t = 18 °С. Осмотическое давление раствора p = 160 кПа. Какова степень диссоциации молекул поваренной соли в этом случае? Сколько частиц растворенного вещества находится в единице объема раствора?

Решение

Масса растворенной в воде частично диссоциированной соли (см. задачу 7.78) равна: $m = \frac{2\mu\mu_1\mu_2 Vp}{RT\left(2\mu_1\mu_2(1-\alpha)+\alpha\mu^2\right)}$, откуда получим $2\mu_1\mu_2(1-\alpha)+\alpha\mu^2 = \frac{2\mu\mu_1\mu_2 Vp}{mRT}$ или $\alpha\mu^2 - 2\alpha\mu_1\mu_2 = \frac{2\mu_1\mu_2(\mu Vp - mRT)}{mRT}$. Из последнего выражения, после преобразований, найдем степень диссоциации $\alpha = \frac{2\mu_1\mu_2(\mu Vp - mRT)}{mRT(\mu^2 - 2\mu_1\mu_2)} = 0,52$. Число частиц в единице объема (см. задачу 7.76) $n = \frac{p}{kT} = 3,98\cdot10^{25}$ м$^{-3}$.

7.80 Масса m = 40 г сахара ($C_{12}H_{22}O_{11}$) растворена в объеме V = 0,5 л воды. Температура раствора t = 50 °С. Найти давление p насыщенного водяного пара над раствором.

Решение

Давление насыщенного пара над раствором меньше, чем над чистым растворителем (водой). При достаточно малой концентрации раствора относительное уменьшение давления насыщенного пара над раствором определяется законом Рауля $\frac{p_0 - p}{p_0} = \frac{\nu'}{\nu+\nu'}$, где p_0 — давление насыщенного пара над чистым растворителем, p — давление насыщенного пара над раствором, ν — количество жидкости. Отсюда $p = p_0\left(1 - \frac{\nu'}{\nu+\nu'}\right)$. По таблице 8 находим для $t = 50°$ С давление насыщенного водяного пара $p_0 = 12302$ Па. Количество сахара $\nu' = \frac{m}{\mu}$, где $\mu = 0.342$ кг/моль, количество воды $\nu = \frac{\rho V}{\mu_1}$, где $\mu = 0.018$ кг/моль. Тогда $p = p_0\left(1 - \frac{m\mu_1}{\rho V\mu + m\mu_1}\right) = 12,3$ кПа.

7.81 Давление насыщенного пара над раствором при температуре $t = 30$ °C равно $p_1 = 4{,}2$ кПа. Найти давление p_2 насыщенного водяного пара над этим раствором при температуре $t_2 = 60$ °C.

Решение

Давление насыщенного пара над раствором (см. задачу 7.80) $p = p_0\left(1 - \frac{\nu'}{\nu + \nu'}\right)$. Т. к. количество растворенного вещества ν' и растворителя ν не зависит от температуры, то $\frac{p_1}{p_2} = \frac{p_0(t_1)}{p_0(t_2)}$, тогда $p_2 = \frac{p_1 p_0(t_2)}{p_0(t_1)}$. По таблице 8 находим $p_0(t_1) = 4229$ Па, $p_0(t_2) = 19817$ Па, тогда $p = 19.68$ кПа.

7.82 Давление p насыщенного пара над раствором в 1,02 раза меньше давления p_0 насыщенного пара чистой воды. Какое число N молекул воды приходится на одну молекулу растворенного вещества?

Решение

Давление насыщенного пара над раствором (см. задачу 7.80) $p = p_0\left(1 - \frac{\nu'}{\nu - \nu'}\right)$, отсюда $\frac{p_0}{p} = \frac{\nu - \nu'}{\nu - 2\nu'} = \frac{\nu/\nu' - 1}{\nu/\nu' - 2}$ — (1). Число молекул растворенного вещества и растворителя (см. задачу 7.76) соответственно равно $N = \frac{\nu N_A}{V}$ и $N' = \frac{\nu N_A}{V}$, тогда $\frac{N}{N'} = \frac{\nu}{\nu'}$ — (2). Из (1) имеем $p_0\left(\frac{\nu}{\nu'} - 2\right) = p\left(\frac{\nu}{\nu'} - 1\right)$ или $\frac{\nu}{\nu'}(p_0 - p) = 2p_0 - p$, откуда $\frac{\nu}{\nu'} = \frac{2p_0 - p}{p_0 - p} = \frac{2p_0/p - 1}{p_0/p - 1}$ или с учетом (2) $\frac{N}{N'} = \frac{2p_0/p - 1}{p_0/p - 1}$. Отсюда окончательно $N = \frac{N'(2p_0/p - 1)}{p_0/p - 1} = 52$ молекулы.

7.83 Масса $m = 100$ г нелетучего вещества растворена в объеме $V = 1$ л воды. Температура раствора $t = 90$ °C. Давление насыщенного пара над раствором $p = 68{,}8$ кПа. Найти молярную массу μ растворенного вещества.

Решение

Закон Рауля можно применить для определения молярной массы вещества. Действительно, закон Рауля можно записать так: $\frac{p_0}{p_0 - p} = \frac{\nu}{\nu'} + 1$, или $\frac{p_0}{p_0 - p} - 1 = \frac{p}{p_0 - p} = \frac{\nu}{\nu'}$ — (1). Замечая, что $\nu = \frac{m}{\mu}$ и $\nu' = \frac{m'}{\mu'}$, нетрудно из (1) получить $\mu' = \mu\frac{m'}{m}\frac{p}{p_0 - p}$ — (2), где m — масса растворителя, μ — молярная масса растворителя и μ' — молярная масса растворенного вещества. Подставляя числовые данные, получим $\mu' = 0{,}092$ кг/моль.

7.84 Нелетучее вещество с молярной массой $\mu = 0{,}060$ кг/моль растворено в воде. Температура раствора $t = 80$ °С. Давление насыщенного пара над раствором $p = 47{,}1$ кПа. Найти осмотическое давление раствора.

Решение

Осмотическое давление (см. задачу 7.75) $p_{oc} = \dfrac{mRT}{\mu V}$. Давление насыщенного пара над раствором (см. задачу 7.80) $p = p_0\left(1 - \dfrac{\nu'}{\nu + \nu'}\right)$, отсюда $\nu' = \dfrac{(p_0 - p)\nu}{p}$. Число молей воды $\nu = \dfrac{m}{\mu_1} = \dfrac{\rho V}{\mu_1}$, тогда $\nu' = \dfrac{(p_0 - p)\rho V}{p\mu_1}$. С другой стороны, $\nu' = \dfrac{m}{\mu}$, тогда $m = \nu'\mu = \dfrac{(p_0 - p)\rho V\mu}{p\mu_1}$. Для $t = 80°$ С давление насыщенного пара над чистой водой $p_0 = 47215$ Па, следовательно, осмотическое давление $p_{oc} = \dfrac{RT}{\mu V}\dfrac{(p_0 - p)\rho V\mu}{p\mu_1} = \dfrac{(p_0 - p)\rho RT}{p\mu_1}$;

$$p_{oc} = \frac{(47215 - 47100)\cdot 10^3 \cdot 8{,}31 \cdot 353}{47{,}1 \cdot 10^3 \cdot 0{,}018} = 398 \text{ кПа}.$$

§ 8. Твердые тела

8.1 Изменение энтропии при плавлении количество $\nu = 1$ кмоль льда $\Delta S = 22{,}2$ кДж/К. На сколько изменится температура плавления льда при увеличении внешнего давления на $\Delta p = 100$ кПа?

Решение

Согласно уравнению Клаузиуса — Клапейрона изменение температуры $\Delta T = \frac{\Delta p T(V_ж - V_т)}{q_0}$ — (1). Изменение энтропии $\Delta S = \frac{m\lambda_0}{T} = \frac{\nu q_0}{T}$ — (2), где λ_0 — удельная теплота плавления, q_0 — молярная теплота плавления, m — масса. Из (2) $\frac{T}{q_0} = \frac{\nu}{\Delta S}$, подставляя это выражение в (1), получим $\Delta T = \Delta p(V_ж - V_т)\frac{\nu}{\Delta S} = 0{,}009$ К.

8.2 При давлении $p_1 = 100$ кПа температура плавления олова $t_1 = 231{,}9$ °С, а при давлении $p_2 = 10$ МПа она равна $t_2 = 232{,}2$ °С. Плотность жидкого олова $\rho = 7{,}0\cdot10^3$ кг/м^3. Найти изменение энтропии ΔS при плавлении количества $\nu = 1$ кмоль олова.

Решение

Из уравнения Клаузиуса — Клапейрона находим изменение температуры $\Delta T = \frac{\Delta p T(V_ж - V_т)}{q_0}$ — (1). С другой стороны, изменение энтропии $\Delta S = \frac{m\lambda_0}{T} = \frac{\nu q_0}{T}$ — (2), где λ_0 — удельная теплота плавления, q_0 — молярная теплота плавления. Из уравнений (1) и (2) имеем $\Delta S = \frac{\Delta p(V_ж - V_т)\nu}{\Delta T} = \frac{(p_2 - p_1)(V_ж - V_т)\nu}{T_2 - T_1}$. Поскольку молярные объемы твердого и жидкого олова соответственно равны $V_т = \frac{\mu}{\rho_т}$ и $V_ж = \frac{\mu}{\rho_ж}$, то, окончательно, получим $\Delta S = \frac{(p_2 - p_1)(\rho_т - \rho_ж)\mu\nu}{(T_2 - T_1)\rho_т\rho_ж} = 15{,}5$ кДж/К.

8.3 Температура плавления железа изменяется на $\Delta T = 0{,}012$ К при изменении давления на $\Delta p = 98$ кПа. На сколько меняется при плавлении объем количества $\nu = 1$ кмоль железа?

Решение

Из уравнения Клаузиуса — Клапейрона находим изменение температуры плавления $\Delta T = \dfrac{\Delta p T(V_ж - V_т)}{q_0}$, отсюда $\Delta V_м = V_ж - V_т = \dfrac{q_0 \Delta T}{T \Delta p}$ — изменение молярного объема, тогда $\Delta V = \nu \Delta V_м = \dfrac{q_0 \nu \Delta T}{T \Delta p}$. Т. к. удельная и молярная теплота плавления связаны между собой как $q_0 = \mu \lambda_0$, тогда, окончательно, $\Delta V = \dfrac{\mu \lambda_0 \nu \Delta T}{T \Delta p} = 1{,}03$ л.

8.4 Пользуясь законом Дюлонга и Пти, найти удельную теплоемкость с: а) меди; б) железа; в) алюминия.

Решение

При очень низких температурах для твердых тел имеет место закон Дюлонга и Пти, согласно которому молярная теплоемкость всех химически простых твердых тел равна приблизительно $3R = 25$ Дж/(моль·К). С другой стороны, удельная и молярная теплоемкости связаны соотношением $c = \mu c$, тогда $3R = \mu c$, откуда $c = 3R / \mu$. а) Молярная масса меди $\mu = 63{,}55 \cdot 10^{-3}$ кг/моль, отсюда $c = 393$ Дж/(моль·К). б) Молярная масса железа $\mu = 55{,}84 \cdot 10^{-3}$ кг/моль, тогда $c = 448$ Дж/(моль·К). в) Молярная масса алюминия $\mu = 26{,}98 \cdot 10^{-3}$ кг/моль, тогда $c = 927$ Дж/(моль·К).

8.5 Пользуясь законом Дюлонга и Пти, найти, из какого материала сделан металлический шар массой $m = 0{,}025$ кг, если известно, что для его нагревания от $t_1 = 10$ °С до $t_2 = 30$ °С потребовалось затратить количество теплоты $Q = 117$ Дж.

Решение

Затраченное количество теплоты можно найти по формуле $Q = mc(T_2 - T_1)$. Согласно закону Дюлонга и Пти молярная теплоемкость $C \approx 3R$. Молярная и удельная теплоемкости связаны соотношением $C = \mu c$, откуда $c = \dfrac{C}{\mu} = \dfrac{3R}{\mu}$. Тогда $Q = m\dfrac{3R}{\mu}(T_2 - T_1)$, откуда $\mu = \dfrac{3mR(T_2 - T_1)}{Q}$. Подставив числовые данные, найдем $\mu = 0{,}107$ кг/моль, следовательно, шарик сделан из серебра.

8.6 Пользуясь законом Дюлонга и Пти, найти, во сколько раз удельная теплоемкость алюминия больше удельной теплоемкости платины.

Решение

Удельная теплоемкость всех химически простых твердых тел (см. задачу 8.4) $c = \frac{3R}{\mu}$, тогда $\frac{c_1}{c_2} = \frac{\mu_2}{\mu_1} = 7{,}23$.

8.7 Свинцовая пуля, летящая со скоростью $v = 400$ м/с, ударяется о стенку и входит в нее. Считая, что 10% кинетической энергии пули идет на ее нагревание, найти, на сколько градусов нагрелась пуля. Удельную теплоемкость свинца найти по закону Дюлонга и Пти.

Решение

Кинетическая энергия пули $W_к = \frac{mv^2}{2}$. Количество тепла, полученное пулей, $Q = cm\Delta T$. Удельная теплоемкость всех химически простых твердых тел (см. задачу 8.4) $c = \frac{3R}{\mu}$, тогда $Q = \frac{3Rm\Delta T}{\mu}$. Согласно закону сохранения энергии $Q = \eta W_к$, тогда $\frac{3Rm\Delta T}{\mu} = \frac{\eta mv^2}{2}$, откуда изменение температуры $\Delta T = \frac{\eta \mu v^2}{6R} = 66$ К.

8.8 Пластинки из меди (толщиной $d_1 = 9$ мм) и железа (толщиной $d_2 = 3$ мм) сложены вместе. Внешняя поверхность медной пластинки поддерживается при температуре $t_1 = 50$ °С, внешняя поверхность железной — при температуре $t_2 = 0$ °С. Найти температуру t поверхности их соприкосновения. Площадь пластинок велика по сравнению с толщиной.

Решение

Количество теплоты, прошедшее через сложенные вместе медную и железную пластинки, определяется формулой $Q = \lambda_1 \frac{t_1 - t}{d_1} S_\tau = \lambda_2 \frac{t - t_2}{d_2} S_\tau$, откуда температура поверхности соприкосновения $t = \frac{\lambda_1 t_1 d_2 + \lambda_2 t_2 d_1}{\lambda_1 d_2 + \lambda_2 d_1} = 34{,}5°$ С.

8.9 Наружная поверхность стены имеет температуру t_1 = -20 °С, внутренняя — температуру t_2 = 20 °С. Толщина стены d = 40 см. Найти теплопроводность λ материала стены, если через единицу ее поверхности за время τ = 1 ч проходит количество теплоты Q = 460,5 кДж/м^2.

Решение

Количество теплоты Q, переносимое вследствие теплопроводности за время $\Delta\tau$, определяется формулой $Q = \lambda \frac{\Delta T}{\Delta x} = \Delta S \Delta\tau$, где $\frac{\Delta T}{\Delta x}$ — градиент температуры в направлении, перпендикулярном площадке ΔS, λ — теплопроводность. В нашем случае $\Delta T = T_2 - T_1$, $\Delta x = d$, $\Delta S = 1\,\text{м}^2$ и $\Delta\tau = \tau$, тогда $Q = \frac{(T_2 - T_1)\lambda\tau}{d}$. Отсюда теплопроводность $\lambda = \frac{Qd}{(T_2 - T_1)\tau} = 1{,}28$ Вт/(м·К).

8.10 Какое количество теплоты Q теряет за время τ = 1 мин комната с площадью пола S = 20 м^2 и высотой h = 3 м через четыре кирпичные стены? Температура в комнате t_1 = 15° С , температура наружного воздуха t_2 = -20 °С. Теплопроводность кирпича λ = 0.84 Вт/(м·К). Толщина стен d = 50 см. Потерями тепла через пол и потолок пренебречь.

Решение

В первом приближении комнату можно считать квадратной, тогда площадь боковых стен $\Delta S = 4ah$, где $a = \sqrt{S}$, следовательно, $\Delta S = 4\sqrt{S}h$. Количество тепла, потерянное комнатой за время τ (см. задачу 8.9), равно $Q = \frac{(T_1 - T_2)\lambda\Delta S\tau}{d} = \frac{4(T_1 - T_2)\lambda\sqrt{S}h\tau}{d} = 190$ кДж.

8.11 Один конец железного стержня поддерживается при температуре t_1 = 100 °С, другой упирается в лед. Длина стержня l = 14 см, площадь поперечного сечения S = 2 см^2. Найти количество теплоты Q_τ, протекающее в единицу времени вдоль стержня. Какая масса m льда растает за время τ = 40 мин? Потерями тепла через стенки пренебречь.

Решение

Количество теплоты, протекающее в единицу времени вдоль стержня, $Q_\tau = \frac{Q}{\Delta\tau} = \frac{(T_1 - T_0)\lambda S}{l} = 8{,}38$ Дж/с. Т. к. по условию потерями тепла через стенки можно пренебречь, то по закону сохранения энергии $Q_\tau \tau = qm$, откуда $m = \frac{Q_\tau \tau}{q} = 60$ г.

8.12 Площадь поперечного сечения медного стержня S = 10 см^2, длина стержня l = 50 см. Разность температур на концах стержня ΔT = 15 К. Какое количество теплоты Q_τ проходит в единицу времени через стержень? Потерями тепла пренебречь.

Решение

Количество тепла, проходящее за единицу времени через стержень (см. задачу 8.11), $Q_\tau = \frac{\Delta T \lambda S}{l} = 11{,}7$ Дж/с.

8.13 На плите стоит алюминиевая кастрюля диаметром D = 15 см, наполненная водой. Вода кипит, и при этом за время τ = 1 мин образуется масса m = 300 г водяного пара. Найти температуру t внешней поверхности дна кастрюли, если толщина его d = 2 мм. Потерями тепла пренебречь.

Решение

Количество тепла, которое поучает кастрюля за время τ, $Q = \frac{(T - T_к)\lambda S\tau}{d}$. Т. к. по условию потерями тепла можно пренебречь, то $Q = rm$, тогда по закону сохранения энергии $\frac{(t - t_к)\lambda S\tau}{d} = rm$. Отсюда, с учетом того, что площадь дна кастрюли $S = \frac{\pi D^2}{4}$, температура внешней поверхности дна кастрюли $t = \frac{4drm}{\lambda \pi D^2 \tau} + t_к = 106°$ C.

8.14 Металлический цилиндрический сосуд радиусом R = 9 см наполнен льдом при температуре t_1 = 0 °С. Сосуд теплоизолирован слоем пробки толщиной d = 1 см. Через какое время τ весь лед, находящийся в сосуде, растает, если температура наружного воздуха t_2 = 25 °С? Считать, что обмен тепла происходит только через боковую поверхность сосуда средним радиусом R_0 = 9,5 см.

Решение

Объем сосуда $V = \pi R^2 h$, где h — высота сосуда, тогда масса льда в сосуде $m = \rho V = \rho \pi R^2 h$. Количество тепла, необходимое для расплавления всего льда в сосуде $Q = qm = q\rho\pi R^2 h$. Т. к. по условию теплообмен идет только через боковую поверхность, то ее площадь $\Delta S = 2\pi R_0 h$, тогда количество тепла, проходящее через боковую поверхность за время τ: $Q = \frac{(t_2 - t_1)\lambda 2\pi R_0 h\tau}{d}$. По закону сохранения энергии $q\rho R^2 = \frac{2(t_2 - t_1)\lambda R_0 \tau}{d}$, откуда

$$\tau = \frac{q\rho R^2 d}{2(t_2 - t_1)\lambda R_0} = 28{,}6 \text{ часов.}$$

8.15 Какую силу F надо приложить к концам стального стержня с площадью поперечного сечения S = 10 см^2, чтобы не дать ему расшириться при нагревании от t_0 = 0 °С до t = 30 °С?

Решение

Чтобы стержень не удлинялся при нагревании, его нужно сжимать с силой $F = \frac{\Delta l E S}{l_0}$ — (1), где E — модуль Юнга, $\Delta l = l - l_0 = l_0 a t$ — (2) — изменение длины стержня при нагревании. Подставляя (2) в (1), найдем $F = ESat = 71$ кН.

8.16 К стальной проволоке радиусом r = 1 мм подвешен груз. Под действием этого груза проволока получила такое же удлинение. как при нагревании на Δt = 20 °С. Найти массу m груза.

Решение

При повышении температуры длина твердых тел возрастает, в первом приближении, линейно с температурой: $l = l_0(1 + at)$, где l и l_0 — длина стержня соответственно при температуре t и t_0. Тогда относительное удлинение $\frac{l - l_0}{l} = \frac{\Delta l}{l} = a\Delta t$, откуда $\Delta l = la\Delta t$ — (1), где a — температурный коэффициент линейного расширения. С другой стороны, по закону Гука $\frac{\Delta l}{l} = \frac{p}{E} = \frac{mg}{SE}$ где $S = \pi R^2$ — площадь поверхностного сечения проволоки, E — модуль Юнга, тогда $\Delta l = \frac{lmg}{\pi R^2 E}$ — (2). Приравнивая левые части уравнений (1) и (2), получим $a\Delta t = \frac{mg}{\pi r^2 E}$, откуда масса стержня $m = \frac{\pi r^2 E a \Delta t}{g} = 15$ кг.

8.17 Медная проволока натянута горячей при температуре t_1 = 150 °С между двумя прочными неподвижными стенками. При какой температуре t_2, остывая, разорвется проволока? Считать, что закон Гука справедлив вплоть до разрыва проволоки.

Решение

Длина проволоки при температуре t_1 и t_2 соответственно равна $l_1 = l_0(1 + at_1)$ и $l_2 = l_0(1 + at_2)$. При остывании проволока укоротится на $\Delta l = l_1 - l_2 = l_0 a(t_1 - t_2)$ — (1), где a — температурный коэффициент линейного расширения. Проволока разорвется, если $\frac{\Delta l}{l_0} \geq \frac{p_{max}}{E}$ — (2), где E — модуль Юнга, p_{max} — предел прочности меди. В предельном случае из (1) и (2) имеем $a(t_1 - t_2) = \frac{p_{max}}{E}$, откуда $t_2 = t_1 - \frac{p_{max}}{aE} = 20°$ С.

8.18 При нагревании некоторого металла от t_0 = 0 °C до t = 500 °C его плотность уменьшается в 1,027 раза. Найти для этого металла коэффициент линейного расширения a, считая его постоянным в данном интервале температур.

Решение

Плотность металла при температуре t равна $\rho = m/V$, тогда его плотность при температуре t_0 равна $\rho_0 = m/V_0$. Относительное изменение объема металла при нагревании

$$\frac{\Delta V}{V_0} = \frac{V - V_0}{V_0} = \frac{\frac{m}{\rho} - \frac{m}{\rho_0}}{\frac{m}{\rho_0}} = \frac{\rho_0 - \rho}{\rho}, \text{ или } \frac{\Delta V}{V_0} = \frac{\rho_0}{\rho} - 1 \text{ — (1).}$$

С другой стороны, $\frac{\Delta V}{V_0} = b\Delta T$, где b — температурный коэффициент объемного расширения. Т. к. металл изотропный, то температурный коэффициент линейного расширения $a = \frac{b}{3}$, тогда $\frac{\Delta V}{V_0} = 3a(t - t_0)$ — (2). Приравнивая в выражениях (1) и (2) правые части, имеем $\frac{\rho_0}{\rho} - 1 = 3a(t - t_0)$, откуда температурный коэффициент линейного расширения $a = \frac{\rho_0/\rho - 1}{3(t - t_0)} = 1{,}8 \cdot 10^{-5}\ \text{К}^{-1}$.

8.19 Какую длину l_0 должны иметь при температуре t_0 = 0 °C стальной и медный стержни, чтобы при любой температуре стальной стержень был длиннее медного на Δl = 5 см?

Решение

Для любой температуры длина стального стержня равна $l_1 = l_{01}(1 + a_1 t) = l_{01} + l_{01}a_1 t$ — (1), медного стержня — $l_2 = l_{02}(1 + a_2 t) = l_{02} + l_{02}a_2 t$ — (2). По условию $l_1 - l_2 = \Delta l$, $l_{01} - l_{02} = \Delta l$ — (3). Решая совместно (1) — (3), получим $a_1 l_{01} = a_2 l_{02}$ — (4). Из уравнений (3) и (4) найдем длины обоих стержней при $t_0 = 0°$ C: $l_{02} = \frac{\Delta l a_1}{a_2 - a_1} = 11$ см, $l_{01} = l_{02} + \Delta l = 16$ см.

8.20 На нагревание медной болванки массой m = 1 кг, находящейся при температуре t_0 = 0 °С, затрачено количество теплоты Q = 138,2 кДж. Во сколько раз при этом увеличился ее объем? Удельную теплоемкость меди найти по закону Дюлонга и Пти.

Решение

Относительное изменение объема металла при нагревании от температуры t_0 до температуры t (см. задачу 8.18) $\frac{\Delta V}{V_0} = 3a(t - t_0)$, откуда $\frac{V}{V_0} = 3a(t - t_0) + 1$ — (1). Количество тепла, израсходованное на нагревание болванки $Q = cm(t - t_0)$, где c — удельная теплоемкость меди, которая по закону Дюлонга и Пти равна $c = \frac{3R}{\mu}$, где μ — молярная масса меди. Тогда $Q = \frac{3Rm}{\mu}(t - t_0)$, откуда разность температур $t - t_0 = \frac{Q\mu}{3Rm}$. После подстановки последнего выражения в уравнение (1) окончательно имеем $\frac{V}{V_0} = \frac{aQ\mu}{Rm} + 1 = 1{,}02$.

8.21 При растяжении медной проволоки, поперечное сечение которой S = 1,5 мм^2, начало остаточной деформации наблюдалось при нагрузке F = 44,1 Н. Каков предел упругости р материала проволоки?

Решение

Пределом упругости называется минимальное давление, при котором тело, после снятия нагрузки, уже не способно вернуться из деформированного состояния в первоначальное. По определению давления найдем $p_н = \frac{F}{S} = 29{,}4$ МПа.

8.22 Каким должен быть предельный диаметр d стального троса, чтобы он выдержал нагрузку F = 9,8 кН?

Решение

Чтобы трос выдержал данную нагрузку, необходимо выполнение условия: $\frac{F}{S} \le P_{max}$, где $S = \frac{\pi d^2}{4}$ — площадь поперечного сечения троса, $p_{max} = 785$ МПа — предел прочности стали. В предельном случае $\frac{4F}{\pi d^2} = P_{max}$, откуда $d^2 = \frac{4F}{\pi p_{max}}$ или $d = \sqrt{\frac{F}{\pi p_{max}}} = 4$ мм.

8.23 Найти длину l медной проволоки, которая, будучи подвешена вертикально, начинает рваться под действием собственной силы тяжести.

Решение

Чтобы проволока начала рваться, необходимо выполнение условия: $\frac{mg}{S} \geq p_{max}$, где $m = \rho V = \rho S l$ — масса проволоки, $p_{max} = 245$ МПа — предел прочности меди. В предельном случае $\rho g l = p_{max}$, откуда $l = \frac{p_{max}}{\rho g} = 2{,}9$ км.

8.24 Найти длину l свинцовой проволоки, которая, будучи подвешена вертикально, начинает рваться под действием собственной силы тяжести.

Решение

Чтобы проволока начала рваться, необходимо выполнение условия: $\frac{mg}{S} \geq p_{max}$, где $m = \rho V = \rho S l$ — масса проволоки, $p_{max} = 20$ МПа — предел прочности свинца. В предельном случае $\rho g l = p_{max}$, откуда $l = \frac{p_{max}}{\rho g} = 180$ м.

8.25 Для измерения глубины моря с парохода спустили гирю на стальном тросе. Какую наибольшую глубину l можно измерить таким способом? Плотность морской воды $\rho = 1 \cdot 10^3$ кг/м^3 . Массой гири по сравнению с массой троса пренебречь.

Решение

На трос действует сила тяжести, направленная вниз, и сила Архимеда, направленная вверх, поэтому (см. задачу 8.22) $\frac{mg - F_A}{S} \leq p_{max}$. Масса троса $m = \rho_ж V = \rho_ж l S$, а сила Архимеда равна весу воды, вытесненной тросом, т.е. $F_A = \rho_т g V = \rho_т g l S$. Тогда в предельном случае имеем $(\rho_ж - \rho_т) g l = p_{max}$, откуда $l = \frac{p_{max}}{(\rho_ж - \rho_т) g} = 11{,}9$ км.

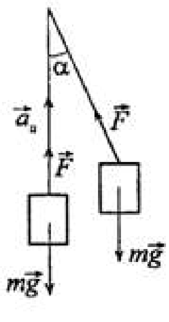
8.26 С крыши дома свешивается стальная проволока длиной l = 40 м и диаметром d = 2 мм. Какую нагрузку F может выдержать эта проволока? На сколько удлинится эта проволока, если на ней повиснет человек массой m = 70 кг? Будет ли наблюдаться остаточная деформация, когда человек отпустит проволоку? Предел упругости стали p = 294 МПа.

Решение

Чтобы проволока выдержала нагрузку, т.е. не разорвалась, необходимо выполнение условия: $\frac{m_0 g + F}{S} \le p_{max}$, где $m_0 = \rho V = \rho l S$ — масса проволоки, $p_{max} = 785$ МПа — предел прочности стали. Площадь поперечного сечения проволоки $S = \frac{\pi d^2}{4}$, тогда в предельном случае имеем $\frac{\rho l \pi d^2 g + 4F}{\pi d^2} = p_{max}$, откуда максимальная нагрузка, которую выдерживает проволока: $F = \frac{(p_{max} - \rho l g)\pi d^2}{4} = 2{,}45$ кН. Если на проволоке повиснет человек, то по закону Гука $\frac{\Delta l}{l} = \frac{p}{E}$, где $E = 216$ ГПа — модуль Юнга стали, $p = \frac{(m_0 + m)g}{S} = \frac{(\rho l \pi d + 4m)g}{\pi d^2} = 221$ МПа — суммарное давление человека и собственного веса проволоки. Тогда удлинение проволоки $\Delta l = \frac{pl}{E} = 4$ см. Поскольку $p < p_{н}$, где $p_{н} = 294$ МПа — предел прочности стали, то остаточная деформация наблюдаться не будет.

8.27 К стальной проволоке радиусом r = 1 мм подвешен груз массой m = 100 кг. На какой наибольший угол α можно отклонить проволоку с грузом, чтобы она не разорвалась при прохождении этим грузом положения равновесия?

Решение



На проволоку действует сила тяжести $m\vec{g}$ и сила упругости $\vec{F}$. По второму закону Ньютона в момент прохождения положения равновесия $F - mg = ma_n$, где a_n — нормальное ускорение. В стартовом положении, при отклонении на угол α, нормальное ускорение $a_n = 0$, тогда $F\cos\alpha - mg = 0$, откуда $F = \frac{mg}{\cos\alpha}$. Проволока разорвется, если $\frac{F}{S} \ge p_{max}$, где $S = \pi r^2$ — площадь поперечного сечения проволоки, p_{max} — предел прочности стали. Следовательно, в предельном случае имеем $\frac{mg}{\pi r^2 \cos\alpha} = p_{max}$, откуда $\cos\alpha = \frac{mg}{\pi r^2 p_{max}}$, следовательно, наибольший угол $\alpha = \arccos\left(\frac{mg}{\pi r^2 p_{max}}\right) = 75{,}5°$.

8.28 К железной проволоке длиной l = 50 см и диаметром d = 1 мм привязана гиря массой m = 1 кг. С какой частотой n можно равномерно вращать в вертикальной плоскости такую проволоку с грузом, чтобы она не разорвалась?

Решение

Проволока будет максимально удлиняться в крайнем нижнем положении, т.е. сила тяжести в любой точке всегда направлена вертикально вниз. Следовательно, для крайнего нижнего положения по второму закону Ньютона имеем $F - mg = ma_n$ — (1), где $a_n = \frac{v^2}{l}$ — нормальное ускорение. Линейная скорость вращения гири $v = \frac{2\pi l}{T} = 2l\pi n$, где T и n соответственно период и частота вращения гири, тогда нормальное ускорение $a_n = 4l\pi^2 n^2$ — (2). Из уравнений (1) и (2) сила упругости проволоки $F = m\left(g + 4l\pi^2 n^2\right)$. Чтобы проволока не разорвалась, необходимо, чтобы $\frac{F}{S} \le p_{max}$, или, в предельном случае, $\frac{4m\left(g + 4\pi^2 n^2 l\right)}{\pi d^2} = p_{max}$, откуда частота вращения гири $n = \sqrt{\frac{p_{max}\pi d^2 - 4mg}{16\pi^2 lm}} = 3{,}4$ Гц.

8.29 Однородный медный стержень длиной l = 1 м равномерно вращается вокруг вертикальной оси, проходящей через один из его концов. При какой частоте вращения стержень разорвется?

Решение

На стержень действует центробежная сила $F = \int_0^l r\omega^2 dm$, где ω — угловая скорость вращения, r — расстояние от элемента массы dm, до оси вращения. Для однородного стержня $dm = \rho S dr$, где ρ — плотность материала стержня и S — его сечение. Тогда $F = \omega^2 \rho S \int_0^l r dr$ или, после интегрирования, $F = \frac{\rho S \omega^2 l^2}{2}$. Поскольку $\omega = 2\pi n$, то предельная частота вращения $n = \frac{1}{\pi l}\sqrt{\frac{F}{2\rho S}} = 38$ об/с.

8.30 Однородный стержень равномерно вращается вокруг вертикальной оси, проходящей через его середину. Стержень разрывается, когда скорость конца стержня достигает v = 380 м/с. Найти предел прочности p материала стержня. Плотность материала стержня $\rho = 7{,}9\cdot10^3$ кг/м^3 .

Решение

Центробежная сила, действующая на стержень, в данном случае $F = \int_0^{\frac{l}{2}} r\omega^2 dm$, где ω — угловая скорость вращения, r — расстояние от элемента массы dm до оси вращения. Для однородного стержня $dm = \rho S dr$, где ρ — плотность материала стержня и S — его сечение. Произведя интегрирование, получим $F = \frac{\rho S\omega^2 l^2}{8}$. Угловая и линейная скорости вращения связаны соотношением $v = \omega\frac{l}{2}$, тогда $F = \frac{\rho S v^2}{2}$. Стержень разорвется, если $\frac{F}{S} \ge p_{max}$, тогда предел прочности материала стержня $p_{max} = \frac{\rho v^2}{2} = 570$ МПа.

8.31 К стальной проволоке длиной l = 1 м и радиусом r = 1 мм подвесили груз массой m = 100 кг. Найти работу A растяжения проволоки.

Решение

Согласно закону Гука относительное удлинение $\frac{\Delta l}{l} = \alpha p_н = \frac{1}{E}\frac{F}{S}$, откуда $F = \frac{SE}{l}\Delta l$ — (1). Для сил упругости имеем $F = k\Delta l$. Тогда коэффициент упругости $k = \frac{SE}{l}$. Отсюда работа $A = k\frac{(\Delta l)^2}{2} = \frac{SE(\Delta l)^2}{2l}$ — (2). Поскольку растягивающая сила $F = mg$, то из (1) $\Delta l = \frac{mgl}{SE}$, где $S = \pi r^2$. Тогда из (2) $A = \frac{m^2 g^2 l}{2\pi r^2 E}$. Подставляя числовые данные, получим $A = 0{,}706$ Дж.

8.32 Из резинового шнура длиной l = 42 см и радиусом r = 3 мм сделана рогатка. Мальчик, стреляя из рогатки, растянул резиновый шнур на Δl = 20 см. Найти модуль Юнга для этой резины, если известно, что камень массой m = 0,02 кг, пущенный из рогатки, полетел со скоростью v = 20 м/с. Изменением сечения шнура при растяжении пренебречь.

Решение

По закону сохранения энергии потенциальная энергия упругого взаимодействия переходит в кинетическую энергию камня, т.е. $W_п = W_к$. Потенциальная энергия упругого взаимодействия $W_п = \frac{\beta(\Delta l)^2}{2}$, а кинетическая энергия камня $W_к = \frac{mv^2}{2}$, тогда $\frac{\beta(\Delta l)^2}{2} = \frac{mv^2}{2}$. Отсюда коэффициент жесткости резины $\beta = \frac{mv^2}{(\Delta l)^2}$, тогда по закону Гука сила упругости резины $F = \beta\Delta l = \frac{mv^2}{\Delta l}$. Предел упругости $p_н = \frac{F}{S} = \frac{mv^2}{\pi r^2 \Delta l}$ — (1). С другой стороны, из закона Гука $\frac{\Delta l}{l} = \frac{p_н}{E}$, предел упругости резины $p_н = \frac{E\Delta l}{l}$ — (2). Приравняем правые части уравнений (1) и (2), тогда $\frac{mv^2}{\pi r^2 \Delta l} = \frac{E\Delta l}{l}$, откуда модуль Юнга резины равен $E = \frac{mv^2 l}{\pi r^2 (\Delta l)^2} = 2{,}97$ МПа.

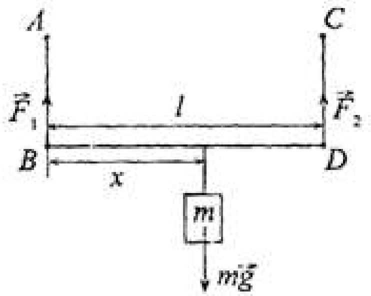
8.33 Имеется резиновый шланг длиной l = 50 см и внутренним диаметром d_1 = 1 см. Шланг натянули так, что его длина стала на Δl = 10 см больше. Найти внутренний диаметр d_2 натянутого шланга, если коэффициент Пуассона для резины σ = 0,5.

Решение

При растяжении внутренний диаметр шланга уменьшится на $\Delta d = \beta d_1 \frac{F}{S}$. Согласно закону Гука $\frac{\Delta l}{l} = \alpha p_н = \alpha \frac{F}{S}$, откуда $\frac{F}{S} = \frac{\Delta l}{\alpha l}$. Тогда $\Delta d = \beta d_1 \frac{1}{\alpha} \frac{\Delta l}{l} = \frac{\sigma d_1 \Delta l}{l}$. Поскольку $d_2 = d_1 - \Delta d$, следовательно, $d_2 = d_1\left(1 - \frac{\sigma \Delta l}{l}\right) = 9 \cdot 10^{-3}$ м.

8.34 На рисунке *AB* — железная проволока, *CD* — медная проволока такой же длины и с таким же поперечным сечением, *BD* — стержень длиной l = 80 см. На стержень подвесили груз массой m = 2 кг. На каком расстоянии x от точки B надо его подвесить, чтобы стержень остался горизонтальным?

Решение



Чтобы стержень остался горизонтальным, необходимо, чтобы моменты сил упругости F_1 и F_2 относительно точки подвеса груза были равны по величине, т.е. $F_1 x = F_2(l - x)$ — (1). Из закона Гука $\frac{\Delta l}{l} = \frac{p_н}{E}$. При равных длинах и деформациях железной и медной проволоки имеем $\frac{p_{н1}}{E_1} = \frac{p_2}{E_2}$, где E_1 и E_2 — модули Юнга соответственно железа и меди. Т. к. площади поперечных сечений железной и медной проволоки равны, то $\frac{p_1}{p_2} = \frac{F_1}{F_2}$ или $\frac{F_1}{E_1} = \frac{F_2}{E_2}$ — (1). Из уравнений (1) и (2) имеем $\frac{l - x}{x} = \frac{E_1}{E_2}$, откуда расстояние $x = \frac{E_2 l}{E_1 + E_2} = 0{,}3$ м.

8.35 Найти момент пары сил M, необходимый для закручивания проволоки длиной l = 10 см и радиусом r = 0,1 мм на угол φ = 10′. Модуль сдвига материала проволоки $N = 4{,}9 \cdot 10^{10}$ Па.

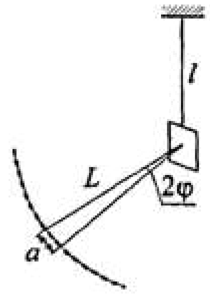
Решение

Для закручивания проволоки на некоторый угол φ необходимо приложить момент пары сил, называемый закручивающим моментом $M = \frac{\pi N r^4}{2l}\varphi$, где l — длина проволоки, r — радиус ее сечения, φ — угол поворота, измеряемый в радианах. Для перевода угла φ в радианную меру решим две пропорции: если $\begin{cases} 1^o - 60', \\ x^o - 10', \end{cases}$ то $x = 0{,}167°$; если $\begin{cases} 180° - \pi \\ 0{,}167° - x \end{cases}$ (в радианах), то $x = 0{,}003$ рад. Произведя вычисления, получим $M = 2{,}26 \cdot 10^{-7}$ Н·м.

8.36 Зеркальце гальванометра подвешено на проволоке длиной l = 10 см и диаметром d = 0,01 мм. Найти закручивающий момент M, соответствующий отклонению зайчика на величину a = 1 мм по шкале, удаленной на расстояние L = 1 м от зеркальца. Модуль сдвига материала проволоки N = $4 \cdot 10^{10}$ Па.

Решение

Имеем $M = \frac{\pi N d^4}{2l \cdot 16}\varphi$. При повороте зеркальца гальванометра на угол φ отраженный луч повернется на угол 2φ, при этом $tg 2\varphi = \frac{a}{L}$. Поскольку угол φ мал, то $tg\varphi \approx \varphi$, следовательно, $\varphi = \frac{a}{2L}$.



Тогда $M = \frac{\pi N d^4 a}{64 \cdot lL} = 1{,}96 \cdot 10^{-13}$ Н·м.

8.37 Найти потенциальную энергию W проволоки длиной l = 5 см и диаметром d = 0,04 мм, закрученной на угол φ = 10′. Модуль сдвига материала проволоки $N = 5{,}9 \cdot 10^{10}$ Па.

Решение

При повороте проволоки на угол $d\varphi$ совершается работа $dA = Md\varphi$, где M — закручивающий момент. За счет этой работы закрученная проволока приобретает потенциальную энергию W. Поскольку закручивающий момент $M = \frac{\pi N r^4 \varphi}{2l}$, то $W = A = \frac{\pi N r^4}{2l}\int_0^{\varphi} \varphi d\varphi = \frac{\pi N r^4 \varphi^2}{4l}$. Подставляя числовые данные, получим $W = 1{,}25 \cdot 10^{-12}$ Дж.

8.38 При протекании электрического тока через обмотку гальванометра на его рамку с укрепленным на ней зеркальцем действует закручивающий момент $M = 2 \cdot 10^{-13}$ Н·м. Рамка при этом поворачивается на малый угол φ. На это закручивание идет работа $A = 8{,}7 \cdot 10^{-16}$ Дж. На какое расстояние а переместится зайчик от зеркальца по шкале, удаленной на расстояние L = 1 м от гальванометра?

Решение

При повороте рамки на угол $d\varphi$ совершается работа пары сил $2dA = Md\varphi$, где M — закручивающий момент. Тогда полная работа $2A = \int_0^{\varphi} Md\varphi = M\varphi$, откуда $\varphi = \frac{2A}{M}$ — (1).

Перемещение зайчика по шкале равно длине дуги окружности радиусом $R = l$, соответствующей углу φ, тогда $a = L \cdot tg 2\varphi \approx L \cdot 2\varphi$, т. к. по условию угол φ — малый. Тогда, с учетом (1), $a = \frac{4LA}{M} = 17{,}4$ мм.

8.39 Найти коэффициент Пуассона σ, при котором объем проволоки при растяжении не меняется.

Решение

Первоначальный объем проволоки $V_1 = Sl = \pi r^2 l$. После растяжения ее объем стал $V_2 = \pi(r - \Delta r)^2(l + \Delta l)$. Поскольку объем при растяжении не изменился, то $\pi r^2 l = \pi(r - \Delta r)^2(l + \Delta l)$; $\pi r^2 l = \pi(r^2 - 2r\Delta r + \Delta r^2)(l + \Delta l)$. Величиной Δr^2 можно пренебречь, тогда, раскрывая скобки, получим $r^2 l = r^2 l - 2r\Delta r l + r^2\Delta l - 2r\Delta r\Delta l$. Отсюда, пренебрегая величиной $2r\Delta r\Delta l$, получим $\frac{\Delta r l}{r\Delta l} = \frac{1}{2}$. Коэффициент Пуассона $\sigma = \frac{\beta}{\alpha} = \frac{\Delta r l}{r\Delta l}$, следовательно, $\sigma = 0.5$.

8.40 Найти относительное изменение плотности цилиндрического медного стержня при сжатии его давлением $p_н = 9.8 \cdot 10^7$ Па. Коэффициент Пуассона для меди $\sigma = 0{,}34$.

Решение

Плотность несжатого стержня $\rho_1 = \frac{m}{V_1}$, где первоначальный объем $V_1 = Sl = \pi r^2 l$. Плотность сжатого стержня $\rho_2 = \frac{m}{V_2}$, где $V_2 = \pi(r + \Delta r)^2(l - \Delta l)$. Тогда изменение плотности $\Delta\rho = \rho_2 - \rho_1$; $\Delta\rho = m\left(\frac{1}{V_2} - \frac{1}{V_1}\right) = \frac{m\Delta V}{V_2 V_1}$. Т. к. изменение объема очень мало, то можно принять приближенно $V_2 V_1 = V_1^2$. Тогда $\Delta\rho = \frac{m\Delta V}{V_1^2}$ и $\frac{\Delta\rho}{\rho_1} = \frac{\Delta V}{V_1}$. Изменение объема равно $\Delta V = \pi r^2 l - \pi(r + \Delta r)^2(l - \Delta l)$. Преобразуя данное выражение, получим $\Delta V = \pi r^2 l - \pi\left[(r^2 + 2r\Delta r + \Delta r^2)(l - \Delta l)\right]$. Величиной Δr^2 можно пренебречь, ввиду ее малости, тогда $\Delta V = \pi r^2 l - \pi \times (r^2 l + 2r\Delta r l - r^2\Delta l - 2r\Delta r\Delta l)$; $\Delta V = \pi r^2 l - \pi r^2 l \times \left(1 + \frac{2\Delta r}{r} - \frac{\Delta l}{l} - \frac{2\Delta r\Delta l}{rl}\right)$. Величина $\frac{2\Delta r\Delta l}{rl}$ очень мала, ее также можно пренебречь, тогда $\Delta V = \pi r^2 l\left(\frac{\Delta l}{l} - \frac{2\Delta r}{r}\right)$;

$\Delta V = \pi r^2 l \frac{\Delta l}{l}\left(1 - \frac{2\Delta r l}{r\Delta l}\right)$. Поскольку $\pi r^2 l = V_1$, а $\frac{\Delta r l}{r\Delta l} = \sigma$, то последнюю формулу можно записать так: $\Delta V = V_1 \frac{\Delta l}{l}(1 - 2\sigma)$. Отсюда отношение $\frac{\Delta\rho}{\rho_1} = \frac{\Delta V}{V_1} = \frac{\Delta l}{l}(1 - 2\sigma)$. По закону Гука $\frac{\Delta l}{l} = \frac{p_n}{E}$, где E — модуль Юнга, для меди $E = 118$ ГПа. Тогда $\frac{\Delta\rho}{\rho_1} = \frac{p_n}{E}(1 - 2\sigma)$.

Подставляя числовые данные, получим $\frac{\Delta\rho}{\rho_1} = 0{,}027\,\%$.

8.41 Железная проволока длиной l = 5 м висит вертикально. На сколько изменится объем проволоки, если к ней привязать гирю массой m = 10 кг? Коэффициент Пуассона для железа σ = 0,3.

Решение

Первоначальный объем проволоки $V_1 = Sl = \pi r^2 l$. После того как к ней привязали гирю, проволока вытянулась и ее объем стал $V_2 = \pi(r - \Delta r)^2(l + \Delta l)$. Изменение объема $\Delta V = \pi(r - \Delta r)^2(l + \Delta l) - \pi r^2 l$. Преобразуя данное выражение, получим $\Delta V = \pi\left[\left(r^2 - 2r\Delta r + \Delta r^2\right)(l + \Delta l)\right] - \pi r^2 l$. Величиной Δr^2 можно пренебречь, ввиду ее малости, тогда $\Delta V = \pi\left(r^2 l - 2r\Delta r l + r^2\Delta l + 2r\Delta r\Delta l\right) - \pi r^2 l$;

$\Delta V = \pi r^2 l\left(1 - \frac{2\Delta r}{r} + \frac{\Delta l}{l} + \frac{2\Delta r\Delta l}{rl}\right) - \pi r^2 l$. Величина $\frac{2\Delta r\Delta l}{rl}$ очень мала, ею также можно пренебречь, следовательно, $\Delta V = \pi r^2 l\left(\frac{\Delta l}{l} - \frac{2\Delta r}{r}\right)$ или $\Delta V = \pi r^2 l \frac{\Delta l}{l}\left(1 - \frac{2\Delta r l}{r\Delta l}\right)$. Поскольку $\pi r^2 l = V_1$, а $\frac{\Delta r l}{r\Delta l} = \sigma$, то последнюю формулу можно записать так: $\Delta V = V_1 \frac{\Delta l}{l}(1 - 2\sigma)$. По закону Гука $\frac{\Delta l}{l} = \frac{p_n}{E}$, где E — модуль Юнга, для железа $E = 196$ ГПа. Нормальное напряжение равно $p_n = \frac{F}{S}$, где растягивающая сила $F = mg$. Тогда $\Delta V = Sl\frac{mg}{SE}(1 - 2\sigma) = \frac{lmg}{E}(1 - 2\sigma)$. Подставляя числовые данные, получим $\Delta V = 1\,мм^3$.

Глава III. Электричество и магнетизм

§ 9. Электростатика

9.1 Найти силу F притяжения между ядром атома водорода и электроном. Радиус атома водорода $r = 0{,}5\cdot10^{-10}$ м; заряд ядра равен по модулю и противоположен по знаку заряду электрона.

Решение

По закону Кулона сила электростатического взаимодействия между двумя заряженными телами, размеры которых малы по сравнению с расстоянием r между ними, определяется формулой $F = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r^2}$, где q_1 и q_2 — электрические заряды тел, ε — относительная диэлектрическая проницаемость среды, $\varepsilon_0 \approx 8{,}85\cdot10^{-12}$ Ф/м — электрическая постоянная. В условиях данной задачи $q_1 = |q_2| = 1{,}6\cdot10^{-19}$ Кл. Подставив числовые значения, получим $F = 92{,}3\cdot10^{-9}$ Н.

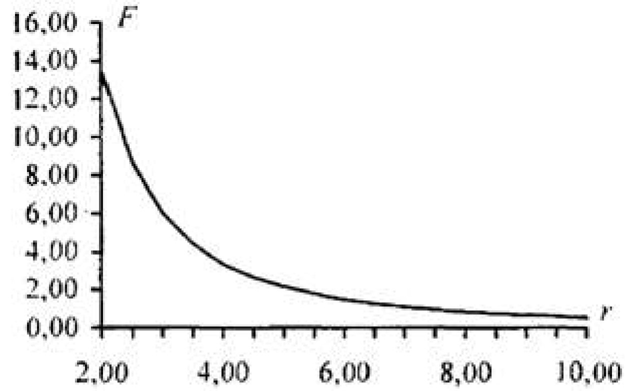
9.2 Два точечных заряда, находясь в воздухе ($\varepsilon = 1$) на расстоянии $r_1 = 20$ см друг от друга, взаимодействуют с некоторой сплои. На каком расстоянии r_2 нужно поместить эти заряды в масле, чтобы получить ту же силу взаимодействия?

Решение

Согласно закону Кулона два точечных заряда в воздухе взаимодействуют с силой $F = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_1 r_1^2}$ — (1), а в масле с такой же силой $F = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_2 r_2^2}$ — (2). Приравняв правые части уравнений (1) и (2), найдем $r_2 = \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}}r_1$. Диэлектрическая проницаемость воздуха $\varepsilon_1 = 1$, диэлектрическая проницаемость масла (таблица 14) $\varepsilon_2 = 5$. Подставив числовые значения, получим $r_2 = 8.94$ см.

9.3 Построить график зависимости силы F взаимодействия между двумя точечными зарядами от расстояния r между в интервале $2 \le r \le 10$ см через каждые 2 см. Заряды $q_1 = 20$ нКл и $q_2 = 30$ нКл.

Решение



По закону Кулона $F = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r^2}$. Подставив числовые значения, получим $F = \frac{5{,}4\cdot 10^{-6}}{r^2}$. Характер зависимости F от r отражен на графике.

r, см	2	4	6	8	10
F, 10^{-7}·Кл	13,500	3,375	1,500	0,844	0,540

9.4 Во сколько раз сила гравитационного притяжения между двумя протонами меньше силы их электростатического отталкивания? Заряд протона равен по модулю и противоположен по знаку заряду электрона.

Решение

Сила гравитационного притяжения $F_г = G\frac{m^2}{r^2}$. Сила электростатического отталкивания $F_э = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r^2}$. Тогда $\frac{F_э}{F_г} = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon G m^2} = 1{,}24\cdot 10^{36}$.

9.5 Найти силу F электростатического отталкивания между ядром атома натрия и бомбардирующим его протоном, считая, что протон подошел к ядру атома натрия на расстояние $r = 6\cdot 10^{-14}$ м. Заряд ядра натрия в 11 раз больше заряда протона. Влиянием электронной оболочки атома натрия пренебречь.

Решение

По закону Кулона $F = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$; $F = 0.7$ Н.

9.6 Два металлических одинаково заряженных шарика массой m = 0,2 кг каждый находятся на некотором расстоянии друг от друга. Найти заряд q шариков, если известно, что на этом расстоянии энергия их электростатического взаимодействия в миллион раз больше энергии $W_{гр}$ их гравитационного взаимодействия.

Решение

Энергия электростатического взаимодействия шариков $W_{эл} = \frac{q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r}$, энергия их гравитационного взаимодействия $W_{гр} = \frac{Gm_1m_2}{r}$. По условию $W_{эл} = nW_{гр}$, т. е. $\frac{q^2}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r} = \frac{nGm_1m_2}{r}$, где $n = 10^6$; отсюда $q = \sqrt{n\varepsilon\varepsilon_0 4\pi Gm_1m_2} = 17$ нКл.

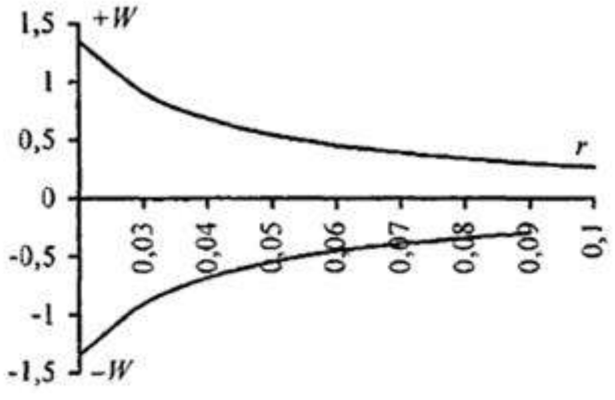
9.7 Во сколько раз энергия $W_{эл}$ электростатического взаимодействия двух частиц с зарядом q и массой m каждая больше энергии $W_{гр}$ их гравитационного взаимодействия? Задачу решить для: а) электронов; б) протонов.

Решение

Энергия электростатического взаимодействия двух частиц $W_{гр} = k\frac{q^2}{r}$; энергия их гравитационного взаимодействия $W_{гр} = \gamma\frac{m^2}{r}$, где r — расстояние между частицами. Тогда для электронов $W_{эл}/W_{гр} = 4\cdot10^{42}$. Для протонов $W_{эл}/W_{гр} = 1{,}24\cdot10^{36}$.

9.8 Во сколько раз энергия $W_{эл}$ электростатического взаимодействия двух частиц с зарядом q и массой m каждая больше энергии $W_{гр}$ их гравитационного взаимодействия? Задачу решить для: а) электронов; б) протонов.

Решение

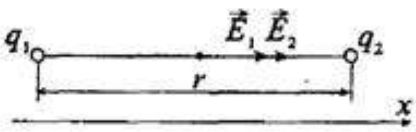


Энергия электростатического взаимодействия двух точечных зарядов $W = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 \varepsilon \cdot r}$. Подставив числовые значения, получим $W_1 = \frac{27 \cdot 10^{-3}}{r}$ — для одноименных зарядов. $W_2 = -\frac{27 \cdot 10^{-3}}{r}$ — для разноименных зарядов. Характер зависимости W от r дан на графике.

r, м	0,02	0,04	0,06	0,08	0,10
W_1, Дж	1,35	0,68	0,45	0,34	0,27
W_2, Дж	–1,35	–0,68	–0,45	–0,34	–0,27

9.9 Найти напряженность E электрического поля в точке, лежащей посередине между точечными зарядами q_1 = 8 нКл и q_2 = -6 нКл. Расстояние между зарядами r = 10 см; ε = 1.

Решение

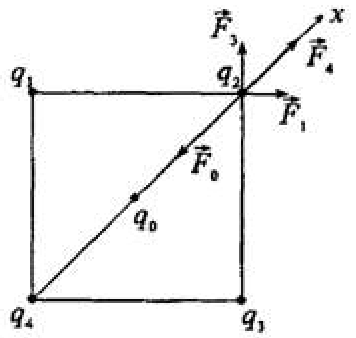


Согласно принципу суперпозиции $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$ или в проекции на ось x $E = E_1 + E_2$. Напряженность электрического поля точечного заряда $E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$, где r — расстояние от заряда до точки, в которой определяется напряженность. $E_1 = \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 r^2 / 4} = \frac{q_1}{\pi\varepsilon_0 r^2}$; $E_2 = \frac{|q_2|}{\pi\varepsilon_0 r^2}$. Суммарная напряженность $E = \frac{q_1 + |q_2|}{\pi\varepsilon_0 r^2} = 50{,}4$ кВ/м.

9.10 В центр квадрата, в каждой вершине которого находится заряд q = 2,33 нКл, помещен отрицательный заряд q_0. Найти этот заряд, если на каждый заряд q действует результирующая сила $F = 0$.

Решение

Рассмотрим силы, действующие на любой из зарядов в вершинах, например, на заряд q_2. Со стороны зарядов q_1, q_3, q_4 на него действуют силы $\vec{F}_1$, $\vec{F}_3$ и $\vec{F}_4$ соответственно, причем $F_1 = F_3 = \dfrac{kq^2}{a^2}$, где $k = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}$; $F_4 = k\dfrac{q^2}{2a^2}$.



Сила, действующая на заряд q_2 со стороны заряда q_0, равна $F_0 = \dfrac{2kq|q_0|}{a^2}$. Условие равновесия заряда q_2: $\vec{F}_1 + \vec{F}_3 + \vec{F}_4 + \vec{F}_0 = 0$ — (1). В проекции на ось x (1) имеет вид: $F_1 \cos 45° + F_3 \cos 45° + F_4 - F_0 = 0$, или $k\dfrac{q^2}{a^2}\sqrt{2} + k\dfrac{2q|q_0|}{a^2} = 0$. Отсюда находим $|q_0| = \dfrac{q}{4}\left(1 + 2\sqrt{2}\right) = 0{,}95q$; $q_0 = -2{,}23$ нКл.

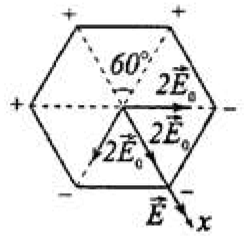
9.11 В вершинах правильного шестиугольника расположены три положительных и три отрицательных заряда. Найти напряженность E электрического поля в центре шестиугольника при различных комбинациях в расположении этих зарядов. Каждый заряд q = 1,5 нКл; сторона шестиугольника a = 3 см.

Решение

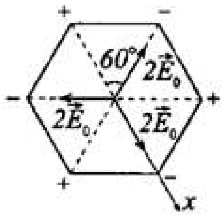
Напряженность поля электрического заряда $E = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r^2}$.

Найдем напряженность поля E_0 одного заряда. $E_0 = |q| / 4\pi\varepsilon_0 a^2$ (очевидно, что расстояние от зарядов до центра шестиугольника равно стороне треугольника a), $E_0 = 15$ кВ/м. Согласно принципу суперпозиции результирующая напряженность $\vec{E}$ находится по правилу векторного сложения $\vec{E} = \sum_{n=1}^{6} \vec{E}_n$, причем $E_1 = E_2 = \ldots = E_6 = E_0$.

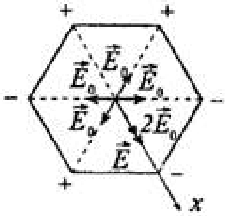
Рассмотрим три варианта расположения зарядов:



а) В проекции на ось x:
$E = 2E_0 \cos 60° + 2E_0 + 2E_0 \cos 60°$;
$E = 4E_0$; $E = 60$ кВ/м.



б) В проекции на ось x:
$E = -2E_0 \cos 60° - 2E_0 + 2E_0 \cos 60°$;
$E = 0$.

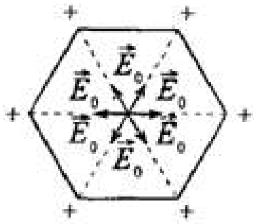


в) В проекции на ось x:
$E = 2E_0$; $E = 30$ кВ/м.

9.12 В вершинах правильного шестиугольника расположены 6 положительных зарядов. Найти напряженность E электрического поля в центре шестиугольника при различных комбинациях в расположении этих зарядов. Каждый заряд $q = 1{,}5$ нКл; сторона шестиугольника $a = 3$ см.

Решение

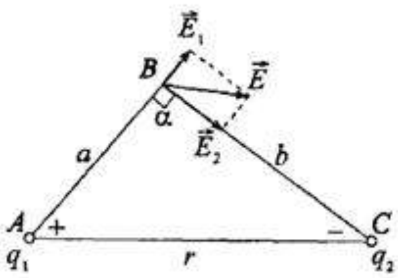
На рисунке мы видим три пары противоположно направленных и равных по модулю векторов. Каждая такая пара в сумме дает напряженность равную нулю. Таким образом, результирующая напряженность $\vec{E}$ в центре шестиугольника равна нулю.



9.13 Два точечных заряда $q_1 = 1{,}5$ нКл и $q_2 = -14{,}7$ нКл расположены на расстоянии $l = 5$ см. Найти напряженность E электрического поля в точке, находящейся на расстояниях $a = 3$ см от положительного заряда и $b = 4$ см от отрицательного заряда.

Решение

Стороны треугольника BCA a, b и r удовлетворяют условию $r^2 = a^2 + b^2$, следовательно, треугольник прямоугольный, угол $\alpha = 90°$. Согласно принципу суперпозиции результирующая напряженность в точке C: $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$, где $\vec{E}_1$ — напряженность, создаваемая положительным зарядом q_1, $\vec{E}_2$ — напряженность, создаваемая отрицательным зарядом q_2. По правилу сложения двух взаимноперпендикулярных векторов в скалярном виде $E = \sqrt{E_1^2 + E_2^2}$. Поскольку $E_1 = \dfrac{|q_2|}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon a^2}$, а $E_2 = \dfrac{|q_2|}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon b^2}$, то $E = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon} \times$ $\times \sqrt{\dfrac{q_1^2}{a^4} + \dfrac{q_2^2}{b^4}} = 112$ кВ/м.



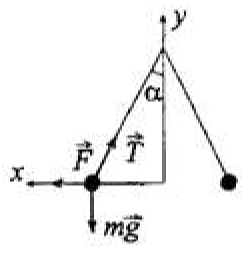
9.14 Два шарика одинаковых радиуса и массы подвешены на нитях одинаковой длины так, что их поверхности соприкасаются. После сообщения шарикам заряда q_0 = 0,4 мкКл они оттолкнулись друг от друга и разошлись на угол $2\alpha = 60^o$. Найти массу m каждого шарика, если расстояние от центра шарика до точки подвеса l = 20 см.

Решение

На каждый шарик действуют три силы (см. рисунок к задаче 9.15): сила тяжести $m\vec{g}$, сила натяжения нити $\vec{T}$ и сила электростатического отталкивания $\vec{F}$. Запишем условие равновесия шариков в векторной форме $\vec{F}+\vec{T}+m\vec{g}=0$ или в проекциях на ось x: $F - T\sin\alpha = 0$ — (1), на ось y: $T\cos\alpha - mg = 0$ — (2). Из (1) найдем $T = \frac{F}{\sin\alpha}$, из (2) найдем $T = \frac{mg}{\cos\alpha}$. Следовательно, $\frac{F}{\sin\alpha} = \frac{mg}{\cos\alpha}$, откуда $mg \cdot tg\alpha = F$ — (3). Из рисунка видно, что $r/2 = l\sin\alpha$ — (4). Поскольку $F = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r^2}$, то, с учетом (3) и (4), имеем $mg \cdot tg\alpha = \frac{q^2}{16\pi\varepsilon\varepsilon_0 l^2 \sin^2\alpha}$, где $q = \frac{q_0}{2}$ — заряд на каждом шарике. Отсюда $m = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 4l^2 \sin^2\alpha \cdot tg\alpha} = 15{,}6$ г.

9.15 Два шарика одинаковых радиуса и массы подвешены на нитях одинаковой длины так, что их поверхности соприкасаются. Какой заряд q нужно сообщить шарикам, чтобы сила натяжения нитей стала равной T = 98 мН? Расстояние от центра шарика до точки подвеса l = 10 см; масса каждого шарика m = 5 г.

Решение



После сообщения шарикам заряда q каждый из них отклонился от вертикали на угол α и остановился в положении равновесия. Поскольку условия равновесия для обоих шариков одинаковы, рассмотрим один из них. По закону сохранения заряда заряд q распределится на два шарика равномерно. Тогда каждый шарик получит заряд $q_0 = \frac{q}{2}$. На шарик действуют три силы: сила Кулона $\vec{F}$, сила натяжения нити $\vec{T}$ и сила тяжести $m\vec{g}$. Условие равновесия шарика $\vec{F}+\vec{T}+m\vec{g}=0$ или в проекциях на ось x: $F - T\sin\alpha = 0$ — (1), на ось y: $T\cos\alpha - mg = 0$ — (2). Расстояние между шариками равно $2l\sin\alpha$. Кулоновская сила определяется формулой

$F=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon}\frac{q_0^2}{4l^2\sin^2\alpha}$ — (3). Выразим величину $\sin\alpha$. Из (2) $\cos\alpha=\frac{mg}{T}$ или $1-\sin^2\alpha=\left(\frac{mg}{T}\right)^2$, отсюда $\sin\alpha=$ $=\sqrt{1-\left(\frac{mg}{T}\right)^2}$ — (4). Из (1) найдем $F=T\sin\alpha$ — (5). Приравняв правые части уравнений (5) и (3) и разделив полученное выражение на $\sin\alpha$, получим $T=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon}\frac{q_0^2}{4l^2\sin^3\alpha}$. Подставив в это выражение уравнение (4), выразим $q_0=4l\sqrt{\pi T\varepsilon_0\varepsilon\left(1-\left(\frac{mg}{T}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}}=5{,}32\cdot10^{-7}$ Кл. Тогда заряд, сообщенный обоим шарикам, $q=2q_0\approx1{,}1\cdot10^{-6}$ Кл.

9.16 Найти плотность материала ρ шариков задачи 9.14, если известно, что при погружении этих шариков в керосин угол расхождения нитей стал равным $2\alpha_к = 54°$.

Решение

Для шарика, находящегося в воздухе (см. рисунок к задаче 9.15), имеем (см. задачу 9.14) $mg=\frac{q^2}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0\cdot4l^2\sin^2\alpha\cdot tg\alpha}$ — (1), где диэлектрическая проницаемость воздуха $\varepsilon=1$. При погружении шариков в керосин на каждый шарик стала действовать выталкивающая сила Архимеда $F_А$. Для шарика, находящегося в керосине, имеем $mg-F_А=$ $=\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_к\cdot4l^2\sin^2\alpha_к tg\alpha_к}$ — (2). Т. к. $mg-F_А=\rho Vg-$ $-\rho_к Vg=(\rho-\rho_к)Vg$ — (3), где ρ — плотность материала шарика, $\rho_к=0{,}8\cdot10^3$ кг/м^3 — плотность керосина, $\varepsilon_к=2$ — диэлектрическая проницаемость керосина, V — объем шарика, то из (1) — (3) имеем $\frac{mg-F_А}{mg}=$ $=\frac{\rho-\rho_к}{\rho}=\frac{\varepsilon\sin^2\alpha tg\alpha}{\varepsilon_к\sin^2\alpha_к tg\alpha_к}$, откуда плотность материала $\rho=\rho_к\frac{\varepsilon_к\sin^2\alpha_к tg\alpha_к}{\varepsilon_к\sin^2\alpha_к tg\alpha_к-\varepsilon\sin^2\alpha tg\alpha}$. Подставляя числовые данные, получим $\rho=2{,}55\cdot10^3$ кг/м^3.

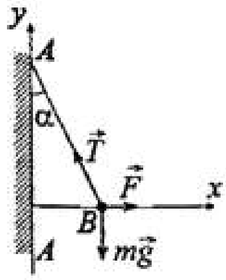
9.17 Два заряженных шарика одинаковых радиуса и массы подвешены на нитях одинаковой длины и опущены в жидкий диэлектрик, плотность которого равна p и диэлектрическая проницаемость равна ε. Какова должна быть плотность ρ_0 материала шариков, чтобы углы расхождения нитей в воздухе и в диэлектрике были одинаковым?

Решение

Воспользуемся итоговой формулой, полученной в предыдущей задачс, учитывая, что $\alpha_к$ и α равны. Применительно к данной задаче получим плотность диэлектрика $\rho_0 = \rho\dfrac{\varepsilon \sin^2\alpha \cdot tg\alpha}{\varepsilon \sin^2\alpha \cdot tg\alpha - \sin^2\alpha tg\alpha}$ или $\rho_0 = \dfrac{\rho\varepsilon}{\varepsilon - 1}$.

9.18 На рисунке AA — заряженная бесконечная плоскость с поверхностной плотностью заряда σ = 40 мкКл/м^2 и B — одноименно заряженный шарик с массой m = 1 г и зарядом q = 1 нКл. Какой угол α с плоскостью AA образует нить, на которой висит шарик?

Решение

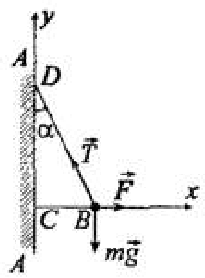


Заряженный шарик находится в электрическом поле плоскости AA. Напряженность поля $E = \dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0\varepsilon}$. На шарик действуют три силы: электростатическая сила $\vec{F}$, сила натяжения нити $\vec{T}$ и сила тяжести $m\vec{g}$. Условие равновесия шарика $\vec{F} + \vec{T} + m\vec{g} = 0$ или в проекциях на ось x: $F - T\sin\alpha = 0$ — (1), на ось y: $T\cos\alpha - mg = 0$ — (2). Электростатическая сила $F = Eq = \dfrac{q\sigma}{2\varepsilon_0\varepsilon}$ — (3). Из (2) найдем $T = \dfrac{mg}{\cos\alpha}$. Подставляя это выражение в (1), получим $F = mgtg\alpha$ — (4). Приравнивая правые части (3) и (4), найдем $\dfrac{q\sigma}{2\varepsilon_0\varepsilon} = mgtg\alpha$, откуда $tg\alpha = \dfrac{q\sigma}{2\varepsilon_0\varepsilon mg}$; $tg\alpha = 0{,}23$; $\alpha = 13°$.

9.19 На рисунке AA — заряженная бесконечная плоскость и B — одноименно заряженный шарик с массой m = 0,4 мг и зарядом q = 667 пКл. Сила натяжения нити, на которой висит шарик, T = 0,49 мН. Найти поверхностную плотность заряда и па плоскости AA.

Решение

Плоскость и шарик заряжены одноименно, поэтому на шарик действует электростатическая сила отталкивания $\vec{F}$. Кроме того, на шарик действует сила тяжести $m\vec{g}$ и сила натяжения нити $\vec{T}$. Нить отклоняется от вертикали до тех пор, пока все силы, действующие на шарик, не уравновесят друг друга. Запишем условие равновесия $\vec{F}+m\vec{g}+\vec{T}=0$. По теореме Пифагора из прямоугольного треугольника CDB имеем $F=\sqrt{T^2-(mg)^2}$. Напряженность поля бесконечной заряженной плоскости $E=\dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0\varepsilon}$, с другой стороны, $\vec{E}=\dfrac{\vec{F}}{q}$ или $E=\dfrac{F}{q}$. Тогда $\dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0\varepsilon}=\dfrac{F}{q}$ или $\dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0\varepsilon}=\dfrac{\sqrt{T^2-(mg)^2}}{q}$. Отсюда поверхностная плотность заряда плоскости AA. $\sigma=\dfrac{2\varepsilon_0\varepsilon\sqrt{T^2-(mg)^2}}{q}=$ $=7{,}8\cdot10^{-6}$ Кл/м^2.



9.20 Найти силу F, действующую на заряд q = 2 СГС$_q$, если заряд помещен: а) на расстоянии r = 2 см от заряженной нити с линейной плотностью заряда τ = 0,2 мкКл/м; б) в поле заряженной плоскости с поверхностной плотностью заряда σ = 20 мкКл/м^2; в) на расстоянии r = 2 см от поверхности заряженного шара с радиусом R = 2 см и поверхностной плотностью заряда σ = 20 мкКл/м^2. Диэлектрическая проницаемость среды ε = 6.

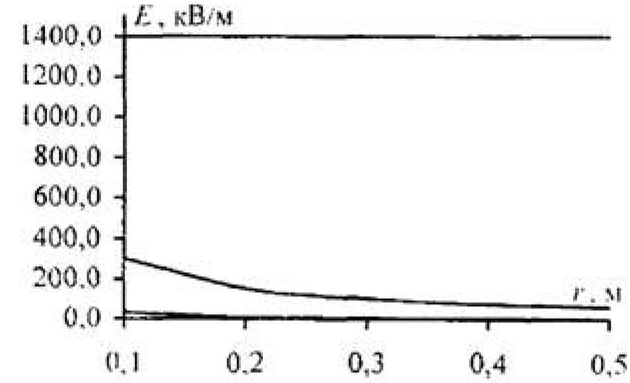
Решение

Переведем единицы измерения заряда в СИ: $q=2\text{СГС}_q\approx$ $\approx 2\cdot3{,}336\cdot10^{-10}$ Кл. а) Напряженность электрического поля заряженной нити $E=\dfrac{\tau}{2\pi\varepsilon\varepsilon_0 r}$, следовательно, на заряд q действует электростатическая сила $F=Eq=\dfrac{\tau q}{2\pi\varepsilon\varepsilon_0 r}$; $F=20{,}1$ мкН. б) Аналогично для заряженной плоскости $F=\dfrac{\sigma q}{2\varepsilon\varepsilon_0}\approx126$ мкН. в) Напряженность электрического поля заряженного шара $E=\dfrac{q_ш}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r^2}$, где заряд шара $q=\sigma S=\sigma4\pi R^2$. Тогда $E=\dfrac{\sigma R^2}{\varepsilon\varepsilon_0 r^2}$, а сила, действующая на заряд, $F=\dfrac{q\sigma R^2}{\varepsilon\varepsilon_0(r+R)^2}=63$ мкН.

9.21 Построить на одном графике кривые зависимости напряженности E электрического поля от расстояния r в интервале $1 \le r \le 5$ см через каждый 1 см, если поле образовано: а) точечным зарядом q = 33,3 нКл; б) бесконечно длинной заряженной нити с линейной плотностью заряда τ = 1,67 мкКл/м; в) бесконечно протяженной плоскостью с поверхностной плотностью заряда σ = 25 мкКл/м^2.

Решение

а) Напряженность электрического поля точечного заряда $E = q / 4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r^2$. Подставляя числовые данные, получим $E = \dfrac{300}{r^2}$ В/м. б) Для нити $E = \dfrac{\tau}{2\pi\varepsilon\varepsilon_0 r} = \dfrac{30 \cdot 10^3}{r}$ В/м. в) Для плоскости $E = \dfrac{\sigma}{2\varepsilon\varepsilon_0} = 1{,}4 \cdot 10^6$ В/м. Зависимость E от r приведена на графике.



r, м	0.1	0.2	0.3	0,4	0.5
E, кВ/м — точ. заряда	30.0	7.5	3,3	1,9	1.2
E, кВ/м — нити	300	150	100	75	60
E, кВ/м — плоскости	1400	1400	1400	1400	1400

9.22 Найти напряженность E электрического ноля на расстоянии r = 0,2 нм от одновалентного иона. Заряд иона считать точечным.

Решение

Одновалентный ион создает электрическое поле с напряженностью $E = \dfrac{|q|}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r^2}$. Заряд одновалентного иона равен по абсолютной величине заряду электрона. Подставив числовые данные, получим $E = 36$ ГВ/м.

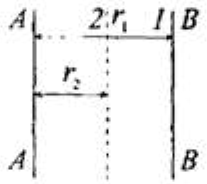
9.23 С какой силой F_l электрическое поле заряженной бесконечной плоскости действует на единицу длины заряженной бесконечно длинной нити, помешенной в это поле? Линейная плотность заряда на нити $\tau = 3$ мкКл/м и поверхностная плотность заряда на плоскости $\sigma = 20$ мкКл/м^2.

Решение

Напряженность поля бесконечной заряженной нити $E = \dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0\varepsilon}$. С другой стороны, $E = \dfrac{F}{q}$, где $\dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0\varepsilon} = \dfrac{F}{\tau \cdot l}$. Отсюда сила, действующая на единицу длины нити, $F_l = \dfrac{F}{l} = \dfrac{\sigma\tau}{2\varepsilon_0\varepsilon} = 3{,}4$ Н/м.

9.24 С какой силой F_l на единицу длины отталкиваются две одноименного заряженные бесконечно длинные нити с одинаковой линейной плотностью заряда $\tau = 3$ мкКл/м, находящиеся па расстоянии $r_1 = 2$ см друг от друга? Какую работу A_l на единицу длины надо совершить, чтобы сдвинуть эти нити до расстояния $r_2 = 1$ см.

Решение

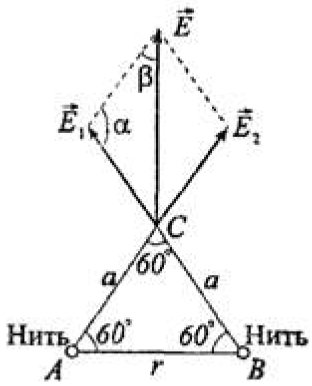


Напряженность поля бесконечной заряженной нити $E = \dfrac{\tau}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon r_1}$ — (1). С другой стороны, $\vec{E} = \dfrac{\vec{F}}{q}$ — (2), где $\vec{F}$ — сила электростатического отталкивания; $q = \tau l$. Приравнивая правые части уравнений (1) и (2), получим $\dfrac{\tau}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon r_1} = \dfrac{F}{\tau l}$. Тогда сила, приходящаяся на единицу длины нити, $F_l = \dfrac{F}{l} = \dfrac{\tau^2}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon r_1} = 8{,}1$ Н/м. Для уменьшения расстояния между нитями нужно совершить работу A против сил поля $A = -A'$, где A' — работа сил электростатического поля нити AA при перемещении нити BB из точки 1 в точку 2 (нить AA при этом остается неподвижна). Т. к. электростатическая сила изменяется с расстоянием, то $A = -A' = -\int\limits_{r_1}^{r_2} F(r)dr$. Работа, приходящаяся на единицу длины, $A_l = -\int\limits_{r_1}^{r_2} F_l(r)dr$; $A_l = -\int\limits_{r_1}^{r_2} \dfrac{\tau^2 dr}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon r} = -\dfrac{\tau^2}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon} \times$ $\times \ln\dfrac{r_2}{r_1} = 0{,}112$ Дж/м.

9.25 Две длинные одноименно заряженные нити расположены на расстоянии r = 10 см друг от друга. Линейная плотность заряда на нитях $\tau_1 = \tau_2 =$ 10 мкКл/м. Найти модуль и направление напряженности E результирующего электрического поля в точке, находящейся на расстоянии a = 10 см от каждой нити.

Решение

Пусть $\tau_1 = \tau_2 = \tau$, следовательно напряженность поля каждой нити в точке C: $E_1 = E_2 = \dfrac{\tau}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon a}$. Тогда согласно принципу суперпозиции результирующая напряженность поля $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$. Т.к. по условию $r = a$, то треугольник ABC — равносторонний, $\angle ACB = 60°$. Прямая, на которой лежит вектор $\vec{E}$, перпендикулярна плоскости, проходящей через обе нити. По теореме синусов $\dfrac{E}{\sin\alpha} = \dfrac{E_1}{\sin\beta}$, где $\alpha = 120°$, $\beta = 30°$, т. е. $E = \sqrt{3}E_1$;



$E = \dfrac{\sqrt{3}\tau}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon a} = 3{,}12$ МВ/м.

9.26 С какой силой F_S на единицу площади отталкиваются две одноименно заряженные бесконечно протяженные плоскости? Поверхностная плотность заряда на плоскостях σ = 0,3 мКл/м^2.

Решение

Напряженность поля бесконечной заряженной плоскости $E = \dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0\varepsilon}$. С другой стороны, $E = \dfrac{F}{q}$, где $q = \tau S$. Приравняем $\dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0\varepsilon} = \dfrac{F}{\tau \cdot S}$, отсюда сила, действующая на единицу площади плоскости, $F_S = \dfrac{F}{S} = \dfrac{\sigma^2}{2\varepsilon_0\varepsilon} = 5{,}1$ Н/м.

9.27 Медный шар радиусом R = 0,5 см помещен в масло. Плотность масла $\rho_м = 0{,}8\cdot10^3$ кг/м^3 Найти заряд q шара, если в однородном электрическом поле шар оказался взвешенным в масле. Электрическое поле направлено вертикально вверх и его напряженность E = 3,6 МВ/м.

Решение

На шар действуют три силы: электростатическая сила $\vec{F}$ (вверх), сила тяжести $m\vec{g}$ (вниз) и сила Архимеда $\vec{F}_А$ (вверх). Запишем уравнение равновесия: $m\vec{g} + \vec{F} + \vec{F}_А = 0$ или в скалярном виде $mg = F + F_А$ — (1). Здесь $mg = \frac{4\pi R^3 g\rho}{3}$, $F = Eq$, $F_А = \frac{4\pi R^3 g\rho_м}{3}$ — (2), где ρ и $\rho_м$ — соответственно плотности меди и масла. Из (1) и (2) имеем $q = \frac{4\pi R^3 g(\rho - \rho_м)}{3E} = 11$ нКл.

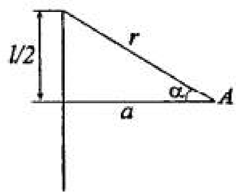
9.28 В плоском горизонтально расположенном конденсаторе заряженная капелька ртути находится в равновесии при напряженности электрического поля E = 60 кВ/м. Заряд капли $q = 2{,}4\cdot10^{-9}$ СГС$_q$. Найти радиус R капли.

Решение

На капельку ртути в конденсаторе действует электростатическая сила $\vec{F}$ (вверх) и сила тяжести $m\vec{g}$ (вниз), которые уравновешивают друг друга, т. е. $\vec{F} + m\vec{g} = 0$ или $F = mg$. Масса капли $m = \rho V = \frac{3}{4}\pi r^3\rho$. Сила $\vec{F} = \vec{E}q$. Тогда $Eq = \rho\frac{4}{3}\pi r^3 g$, откуда $r = \sqrt[3]{\frac{3Eq}{4\rho\pi g}} = 0{,}44$ мкм.

9.29 Показать, что электрическое поле, образованное заряженной нитью конечной длины, в предельных случаях переходит в электрическое поле: а) бесконечно длинной заряженной нити; б) точечного заряда.

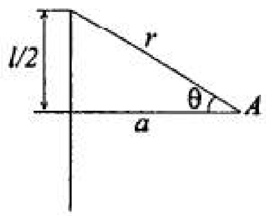
Решение



Напряженность поля нити конечной длины $E = \frac{\tau \sin\alpha}{2\pi\varepsilon\varepsilon_0 a}$ — (1). Из рисунка найдем $\sin\alpha = \frac{l/2}{\sqrt{a^2 + (l/2)^2}}$ — (2). Подставляя (2) в (1), получим $E = \frac{\tau\cdot l}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 a\sqrt{a^2 + (l/2)^2}}$ — (3). а) Если $a \ll l$, то $\sqrt{a^2 + (l/2)^2} \approx \frac{l}{2}$. В этом случае формула (3) дает $E = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon\varepsilon_0 a}$ — напряженность поля бесконечно длинной нити. б) Если $a \gg l$, то $\sqrt{a^2 + (l/2)^2} \approx a$. Т. к. $\tau\cdot l = q$, то формула (3) дает $E = \frac{q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 a^2}$ — напряженность поля точечного заряда.

9.30 Длина заряженной нити l = 25 см. При каком предельном расстоянии a от нити по нормали к середине нити электрическое поле можно рассматривать как поле бесконечно длинной заряженной нити? Ошибка при таком допущении не должна превышать $\delta = 0{,}05$. Указание: допускаемая ошибка $\delta = (E_2 - E_1)/E_2$, где E_2 — напряженность электрического поля бесконечно длинной нити, E_1 — напряженность поля нити конечной длины.

Решение



Бесконечно длинная заряженная нить создает электрическое поле с напряженностью $E_1 = \dfrac{\tau}{2\pi\varepsilon\varepsilon_0 a}$ — (1). Напряженность поля нити конечной длины $E_2 = \dfrac{\tau \sin\theta}{2\pi\varepsilon\varepsilon_0 a}$ — (2). Допускаемая ошибка $\delta = \dfrac{E_1 - E_2}{E_1}$ — (3). Подставляя (1) и (2) в (3), получим $\delta = 1 - \sin\theta$, откуда $\sin\theta = 1 - \delta$. Из рисунка видно, что $\dfrac{l}{2} = r\sin\theta = r(1-\delta)$, где $r = \dfrac{a}{\cos\theta} = \dfrac{a}{\sqrt{1-\sin^2\theta}} = \dfrac{a}{\sqrt{1-(1-\delta)^2}}$. Тогда $\dfrac{l}{2} = \dfrac{a(1-\delta)}{\sqrt{1-(1-\delta)^2}}$, откуда предельное расстояние $a = \dfrac{l\sqrt{1-(1-\delta)^2}}{2(1-\delta)} = 4{,}11$ см.

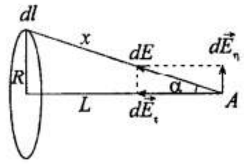
9.31 В точке A, расположенной на расстоянии a = 5см от бесконечно длинной заряженной нити, напряженность электрического поля E = 150 кВ/м. При какой предельной длине нити найденное значение напряженности будет верным с точностью до 2%, если точка A расположена на нормали к середине нити? Какова напряженность E электрического поля в точке A, если длина нити l = 20 см? Линейную плотность заряда на нити конечной длины считать равной линейной плотности заряда на бесконечно длинной нити. Найти линейную плотность заряда τ на нити.

Решение

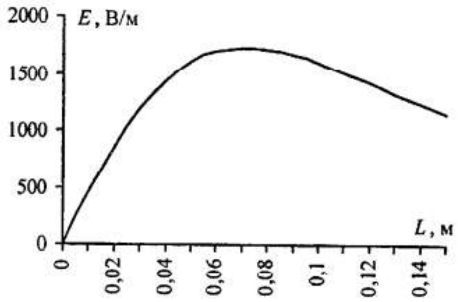
Воспользуемся формулой, полученной в предыдущей задаче: $\dfrac{l}{2} = \dfrac{a(1-\delta)}{\sqrt{1-(1-\delta)^2}}$. По условию $\delta = 0{,}02$, тогда предельное значение $l = \dfrac{2a(1-\delta)}{\sqrt{1-(1-\delta)^2}} = 0{,}49$ м. Напряженность поля в точке A при $l = 0{,}2$ м найдем по формуле $E' = \dfrac{\tau\sin\theta}{2\pi\varepsilon\varepsilon_0 a}$ — (1). Линейную плотность заряда τ найдем из уравнения $E = \dfrac{\tau}{2\pi\varepsilon\varepsilon_0 a}$, откуда $\tau = E2\pi\varepsilon\varepsilon_0 a = 0{,}42$ мкКл/м. Значение $\sin\theta$ (см. рисунок к предыдущей задаче) найдем, вычислив $tg\theta = \dfrac{l}{2a}$, откуда $tg\theta = 2$, следовательно, $\theta \approx 63°$; $\sin\theta = 0{,}89$. Подставляя числовые данные в (1), найдем $E' = 134$ кВ/м.

9.32 Кольцо из проволоки радиусом R = 10 см имеет отрицательный заряд q = -5 нКл. Найти напряженности E электрического поля на оси кольца в точках, расположенных от центра кольца на расстояниях L, равных 0, 5, 8, 10 и 15 см. Построить график E = $f(L)$. На каком расстоянии L от центра кольца напряженность E электрического поля будет иметь максимальное значение?

Решение



Возьмем элемент кольца dl. Этот элемент имеет заряд dq. Напряженность электрического поля, созданная этим элементом в точке A, будет $dE = \frac{dq}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 x^2}$. Вектор $d\vec{E}$ направлен по линии x, соединяющей точку A с элементом кольца dl. Для нахождения напряженности поля всего кольца надо векторно сложить $d\vec{E}$ от всех элементов. Вектор dE можно разложить на две составляющие dE_n и dE_τ. Составляющие dE_n каждых двух диаметрально расположенных элементов взаимно уничтожаются, поэтому $E = \int dE_\tau$. Но $dE_\tau = dE\cos\alpha = dE\frac{L}{x} = \frac{Ldq}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 x^2}$, что дает $E = \frac{L}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 x^3} \times \int dq = \frac{Lq}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 x^3}$. Учитывая, что $x = \sqrt{R^2 + L^2}$, имеем $E = \frac{Lq}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 \left(R^2 + L^2\right)^{3/2}}$ — (1) — напряженность электрического поля на оси кольца. Если $L >> R$, то $E = \frac{q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 L^2}$, т. е. на больших расстояниях заряженное кольцо можно рассматривать как точечный заряд.



Выразим величины x и L через угол α. Имеем $R = x\sin\alpha$, $L = x\cos\alpha$; теперь формула (1) примет вид $E = \frac{q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 R^2}\cos\alpha\sin^2\alpha$. Для нахождения максимального значения напряженности E возьмем производную $\frac{dE}{d\alpha}$ и приравняем ее к нулю: $\frac{dE}{d\alpha} = \frac{q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 R^2}\left(\cos^2\alpha\, 2\sin\alpha - \sin^3\alpha\right) = 0$ или $tg^2\alpha = 2$. Тогда напряженность электрического поля имеет максимальное значение в точке A, расположенной на расстоянии $L = \frac{R}{tg\alpha} = \frac{R}{\sqrt{2}} = 7{,}1$ см от центра кольца. Подставляя в (1) числовые данные, составим таблицу и построим график.

L, м	0	0,05	0,08	0,1	0,15
E, В/м	0	1600	1710	1600	1150

9.33 Напряженность электрического поля на оси заряженного кольца имеет максимальное значение на расстоянии L от центра кольца. Во сколько раз напряженность электрического поля в точке, расположенной на расстоянии 0,5 L от центра кольца, будет меньше максимального значения напряженности?

Решение

Воспользуемся результатами задачи 9.32. Напряженность электрического поля на оси кольца $E = \dfrac{Lq}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0\left(R^2 + L^2\right)^{\frac{3}{2}}}$.

Максимальное значение напряженность поля имеет при $L_{max} = \dfrac{R}{\sqrt{2}}$. Отсюда $E_{max} = \dfrac{Rq}{\sqrt{2}\cdot 4\pi\varepsilon\varepsilon_0\left(R^2 + R^2/2\right)^{\frac{3}{2}}}$. В точке, расположенной на расстоянии $0{,}5L_{max}$ от центра кольца, напряженность $E_{max} = \dfrac{Rq}{2\sqrt{2}\cdot 4\pi\varepsilon\varepsilon_0\left(R^2 + R^2/2\right)^{\frac{3}{2}}}$,

отсюда $\dfrac{E_{max}}{E} = 1{,}3$.

9.34 Показать, что электрическое поле, образованное заряженным диском, в предельных случаях переходит в электрическое поле: а) бесконечной заряженной плоскости; б) точечного заряда.

Решение

Напряженность электрического поля заряженного диска $E = \dfrac{\sigma}{2\varepsilon\varepsilon_0}\left(1 - \dfrac{1}{\sqrt{1+(R/a)^2}}\right)$. а) Если величина $a \ll R$, то $1 - \dfrac{1}{\sqrt{1+(R/a)^2}} \approx 1$. В этом случае $E = \dfrac{\sigma}{2\varepsilon\varepsilon_0}$, т. е. для точек, находящихся на близком расстоянии от диска, диск можно уподобить бесконечно протяженной плоскости. б) Если $a \gg R$, и $\sqrt{1+\left(\dfrac{R}{a}\right)^2} = 1 - \dfrac{R^2}{2a^2}$. В этом случае $E = \dfrac{\sigma}{2\varepsilon\varepsilon_0}\times$ $\times\dfrac{R^2}{2a^2}$. Т. к. $\sigma = \dfrac{q}{\pi R^2}$, то $E = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 a^2}$, т. е. для точек, находящихся на большом расстоянии от диска, диск можно уподобить точечному заряду.

9.35 Диаметр заряженного диска D = 25 см. При каком предельном расстоянии а от диска по нормали к его центру электрическое поле можно рассматривать как поле бесконечно протяженной плоскости? Ошибка при таком допущении не должна превышать δ = 0,05. Указание: Указание: допускаемая ошибка $\delta = (E_2 - E_1)/E_2$, где E_1 — напряженность бесконечно протяженной плоскости, E_2 — напряженность поля диска.

Решение

Напряженность поля диска $E_1 = \frac{\sigma}{2\varepsilon\varepsilon_0}\left(1 - \frac{a}{\sqrt{R^2 + a^2}}\right)$ — (1). Напряженность поля бесконечной заряженной плоскости $E_2 = \frac{\sigma}{2\varepsilon\varepsilon_0}$ — (2). Допускаемая ошибка $\delta = \frac{E_2 - E_1}{E_2}$ — (3). Подставляя (1) и (2) в (3), получим $\delta = \frac{a}{\sqrt{R^2 + a^2}}$ или

$\delta = \frac{1}{\sqrt{1 + (R/a)^2}}$. Откуда $\left(\frac{R}{a}\right)^2 = \frac{1}{\delta^2} - 1$; $\frac{R}{a} = \frac{\sqrt{1 - \delta^2}}{\delta}$.

$a = \frac{\delta R}{\sqrt{1 - \delta^2}}$. Подставляя числовые данные, получим предельное расстояние $a = 1,2$ см.

9.36 Требуется найти напряженность E электрического поля в точке A, расположенной на расстоянии а = 5 см от заряженного диска по нормали к его центру. При каком предельном радиусе R диска поле в точке A не будет отличаться более чем на 2% от поля бесконечно протяженной плоскости? Какова напряженность E поля в точке A, если радиус диска $R = 10a$? Во сколько раз найденная напряженность в этой точке меньше напряженности поля бесконечно протяженной плоскости?

Решение

Напряженность поля, образованного заряженной бесконечно протяженной плоскостью, $E_1 = \frac{\sigma}{2\varepsilon\varepsilon_0}$. Напряженность поля заряженного диска радиусом R в точке A: $E_2 = \frac{\sigma}{2\varepsilon\varepsilon_0}\left(1 - \frac{a}{\sqrt{R^2 + a^2}}\right)$. По условию $\frac{E_1 - E_2}{E_1} = 0,02$. Подставив выражения E_1 и E_2, получим $\frac{a}{\sqrt{R^2 + a^2}} = 0,02$.

После несложных вычислений найдем $R = 2,5$ м. При $R = 10a$ напряженность поля в точке A $E_2 = \frac{\sigma}{2\varepsilon\varepsilon_0}\left(1 - \frac{a}{\sqrt{100a^2 + a^2}}\right) = 0,9\frac{\sigma}{2\varepsilon\varepsilon_0}$. Тогда $\frac{E_1}{E_2} = 1,1$.

9.37 Два параллельных разноименно заряженных диска с одинаковой поверхностной плотностью заряда на них расположена па расстоянии $d = 1$ см друг от друга. Какой предельный радиус R могут иметь диски, чтобы между центрами дисков поле отличалось от поля плоского конденсатора не более чем па 5%? Какую ошибку δ мы допускаем, принимая для этих точек напряженность поля равном напряженности поля плоского конденсатора при $R/d = 10$?

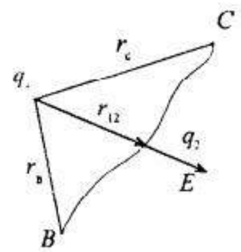
Решение

Напряженность поля между центрами двух разноименно заряженных дисков $E_1 = \frac{\sigma}{\varepsilon\varepsilon_0}\left(1 - \frac{d}{\sqrt{R^2 + d^2}}\right)$ — (1), где d — расстояние между дисками. Напряженность плоского конденсатора $E_2 = \frac{\sigma}{\varepsilon\varepsilon_0}$ — (2). По условию отношение $\frac{E_2 - E_1}{E_2} = 0{,}05$ — (3). Подставляя уравнения (1) и (2) в (3), получим $\frac{d}{\sqrt{R^2 + d^2}} = 0{,}05$. Отсюда $R = 0{,}2$ м. Теперь определим ошибку δ при $\frac{R}{d} = 10$. Т. к. $\delta = \frac{E_2 - E_1}{E_1} = \frac{d}{\sqrt{R^2 + d^2}}$, то при $R = 10d$ — $\delta = 0{,}1$ или $\delta = 10\%$.

9.38 Шарик массой $m = 40$ мг, имеющий положительный заряд $q = 1$ нКл, движется со скоростью $v = 10$ см/с. На какое расстояние r может приблизиться шарик к положительному точечному заряду $q_0 = 1{,}33$ нКл?

Решение

Если в поле неподвижного заряда q_1 происходит медленное перемещение заряда q_2 из точки B в точку C, то работа сил поля $A = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_C}\right)$.



Если $r_B \to \infty$, то $r_C = r_{12}$ и $A = -\frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r_{12}}$ (т. е. появился знак «минус»). Работа консервативных сил электрического поля равна убыли потенциальной энергии системы заряженных тел, т. е. $A = -(U_{12} - U_\infty)$. Поэтому полагая энергию взаимодействия бесконечно удаленных зарядов равной нулю, получим для потенциальной энергии взаимодействия системы двух зарядов $U_{12} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\frac{1}{r_{12}}$. Во время движения шарика его кинетическая энергия $W_{к1} = \frac{mv^2}{2}$, при приближении к заряду q_2 на предельное расстояние r_{12} кинетическая энергия $W_{к2} = 0$. Работа $A_{12} = -\frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r_{12}}$; $A = W_{к1} - W_{к2} = -\frac{mv^2}{2}$. Таким образом, $\frac{q_1 q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r_{12}} = \frac{mv^2}{2}$, откуда $r_{12} = \frac{2q_1 q_2}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 mv^2}$; $r_{12} = r = 6$ см.

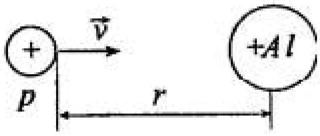
9.39 До какого расстояния r могут сблизиться два электрона, если они движутся навстречу друг другу с относительной скоростью $v_0 = 10^6$ м/с?

Решение

Т. к. v_0 — относительная скорость движения электронов, то один электрон можно считать неподвижным, а другой — движущимся относительно первого со скоростью v_0. По формуле потенциала поля точечного заряда потенциал поля, создаваемого электроном, который мы считаем неподвижным, на расстоянии r от него $\varphi = \frac{e}{4\pi\varepsilon_0 r}$. Кинетическая энергия движущегося электрона $W_к = mv_0^2/2$ тратится на работу против кулоновской силы отталкивания $A = e\varphi = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r}$. Тогда по закону изменения энергии $W_к = A$ или $\frac{mv_0^2}{2} = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r}$, откуда $r = \frac{e^2}{2\pi\varepsilon_0 m v_0^2} = 5\cdot 10^{-10}$ м.

9.40 Протон (ядро атома водорода) движется со скоростью $v = 7{,}7\cdot 10^6$ м/с. На какое наименьшее расстояние r может приблизиться протон к ядру атома алюминия? Заряд ядра атома алюминия $q = Ze$, где Z — порядковый номер атома в таблице Менделеева и e — заряд протона, равный по модулю заряду электрона. Массу протона считать равной массе атома водорода. Протон и ядро атома алюминия считать точечными зарядами. Влиянием электронной оболочки атома алюминия пренебречь.

Решение



Ядро атома алюминия считаем неподвижным. Т. к. по условию ядро алюминия — точечный заряд, то потенциал поля ядра алюминия $\varphi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r} = \frac{Ze}{4\pi\varepsilon_0 r}$. Тогда по закону изменения энергии (см. задачу 9.39) $\frac{mv^2}{2} = \frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 r}$, откуда $r = \frac{Ze^2}{2\pi\varepsilon_0 m v^2} = 6{,}1\cdot 10^{-14}$ м.

9.41 При бомбардировке неподвижного ядра натрия α - частицей сила отталкивания между ними достигла значения F = 140 Н. На какое наименьшее расстояние r приблизилась α - частица к ядру атома натрия? Какую скорость v имела α - частица? Влиянием электронной оболочки атома натрия пренебречь.

Решение

Потенциал поля ядра натрия (см. задачу 9.40) $\varphi = \dfrac{Z_1 e}{4\pi\varepsilon_0 r}$. По закону Кулона сила отталкивания между ядром натрия и α-частицей $F = \dfrac{Z_1 Z_2 e^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$, где $Z_2 = 2$, т. к. α-частица представляет собой ядро атома гелия. Отсюда минимальное расстояние сближения ядра и α-частицы $r = \dfrac{e}{2}\sqrt{\dfrac{Z_1 Z_2}{\pi\varepsilon_0 F}} = 6{,}01\cdot10^{-15}$ м. По закону изменения энергии (см. задачу 9.39) $\dfrac{mv^2}{2} = \dfrac{Z_1 e^2}{4\pi e_0 r}$, откуда скорость α-частицы $v = \sqrt{\dfrac{e^2 Z_1}{2\pi\varepsilon_0 r m}} = 1{,}59\cdot10^7$ м/с.

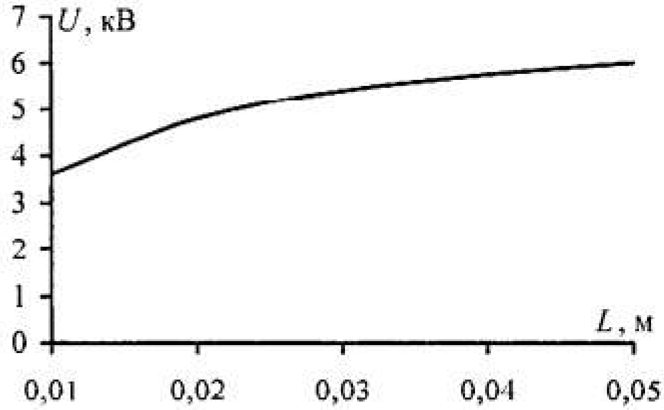
9.42 Два шарика с зарядами q_1 = 6,66 нКл и q_2 = 13.33 нКл находятся на расстоянии r_1 = 40 см. Какую работу A надо совершить, чтобы сблизить их до расстояния r_2 = 25 см?

Решение

Энергия электростатического взаимодействия шариков $W = \dfrac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r}$. Для сближения шариков нужно совершить работу $A = \Delta W = W_2 - W_1$. Поскольку $W_1 = \dfrac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r_1}$, а $W_2 = \dfrac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r_2}$, то $A = \dfrac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\left(\dfrac{1}{r_2} - \dfrac{1}{r_1}\right) = 1{,}2$ мкДж.

9.43 Шар радиусом R = 1 см, имеющий заряд q = 40 нКл, помещен в масло. Построить график зависимости $U = F(L)$ для точек поля, расположенных от поверхности шара на расстояниях L , равных 1, 2, 3, 4 и 5 см.

Решение



Будем считать, что заряд q равномерно распределен по поверхности шара. Разность потенциалов $U = \varphi_0 - \varphi_1$, где φ_0 — потенциал шара на его поверхности, φ_1 — потенциал поля в точке, находящейся на расстоянии L от поверхности шара; $\varphi_0 = \int_R^\infty E_r dr = \frac{q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\int_R^\infty \frac{dr}{r^2} = \frac{q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 R}$. Аналогично $\varphi_1 = \frac{q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0(R+L)}$, отсюда $U = \frac{q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R+L}\right)$. Характер зависимости $U(L)$ дан на графике.

L, м	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05
U, кВ	3,6	4,8	5,4	5,76	6

9.44 Найти потенциал φ точки поля, находящейся на расстоянии r = 10 см от центра заряженного шара радиусом R = 1 см. Задачу решить, если: а) задана поверхностная плотность заряда на шаре σ = 0,1 мкКл/м^2; б) задай потенциал шара φ = 300 В.

Решение

Имеем $\varphi = \frac{q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r}$ (см. задачу 9.43). а) Поскольку $q = \sigma S = \sigma 4\pi R^2$, то $\varphi = \frac{4\pi\sigma R^2}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r} = \frac{\sigma R^2}{\varepsilon\varepsilon_0 r}$; $\varphi = 11{,}3$ В. б) Потенциал шара $\varphi_0 = \frac{q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 R}$, откуда $q = 4\pi\varphi_0\varepsilon\varepsilon_0 R$. Тогда $\varphi = \frac{4\pi\varphi_0\varepsilon\varepsilon_0 R}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r} = \frac{\varphi_0 R}{r}$; $\varphi = 30$ В.

9.45 Какая работа A совершается при перенесении точечного заряда q = 20 нКл из бесконечности в точку, находящуюся на расстоянии r = 1 см от поверхности шара радиусом R = 1 см с поверхностной плотностью заряда σ = 10 мкКл/м^2?

Решение

Работа по перемещению точечного заряда q из бесконечности в некоторую точку M есть потенциал точки M, следовательно, $A = \varphi_M = \dfrac{qq_0}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0(R+r)}$. Поскольку $q_0 = \sigma 4\pi R^2$, то $A = \dfrac{q\sigma R^2}{\varepsilon\varepsilon_0(R+r)}$; $A = 113$ мкДж.

9.46 Шарик с массой m = 1 г и зарядом q = 10 нКл перемещается из точки 1, потенциал которой φ_1 = 600 В, в точку 2, потенциал которой $\varphi_2 = 0$. Найти его скорость v_1 в точке 1, если в точке 2 она стала равной v_2 = 20 см/с.

Решение

Работа по перемещению шарика из точки 1 в точку 2 равна $A = q(\varphi_1 - \varphi_2)$. С другой стороны, работа A равна приращению его кинетической энергии: $A = \dfrac{mv_2^2}{2} - \dfrac{mv_1^2}{2}$. Следовательно, $q(\varphi_1 - \varphi_2) = \dfrac{mv_2^2}{2} - \dfrac{mv_1^2}{2} = \dfrac{m(v_2^2 - v_1^2)}{2}$. Отсюда $v_1 = \sqrt{v_2^2 - \dfrac{2q(\varphi_1 - \varphi_2)}{m}}$; $v_1 = 16{,}7$ см/с.

9.47 Найти скорость v электрона, прошедшего разность потенциалов U , равную: 1,5, 10. 100, 1000 В.

Решение

Работа по перемещению электрона из точки 1 в точку 2 равна $A = q(\varphi_1 - \varphi_2) = \dfrac{U}{q}$, с другой стороны, работа A равна приращению его кинетической энергии $A = \dfrac{mv_2^2}{2} - \dfrac{mv_1^2}{2}$. Если $v_1 = 0$, то $A = \dfrac{mv_2^2}{2}$. Тогда $U = \dfrac{mv_2^2}{2e}$, где e — заряд электрона, m — его масса (см. таблицу 3), откуда $v_2 = \sqrt{\dfrac{2Ue}{m}}$. Составим таблицу искомых значений.

U, В	1	5	10	100	1000
v, 10^6 м/с	0,59	1,33	1,88	5,93	18,75

9.48 При радиоактивном распаде из ядра атома полония вылетает α - частица со скоростью v = $1{,}6 \cdot 10^7$м/с. Найти кинетическую энергию W_K α - частицы и разность потенциалов U поля, в котором можно разогнать покоящуюся α - частицу до такой же скорости.

Решение

Кинетическая энергия α-частицы $W_к = \frac{m_\alpha v^2}{2}$. Учитывая, что $m_\alpha = 4 \cdot 1{,}66 \cdot 10^{-27} = 6{,}6 \cdot 10^{-27}$ кг, получим $W_к = 8{,}5 \times 10^{-13}$ Дж. Искомая разность потенциалов $U = \frac{W_к}{q}$ (см. задачу 9.47). Поскольку заряд α-частицы $q = 2 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19} = 3{,}2 \cdot 10^{-19}$, то, подставляя числовые значения, получим $U = 2{,}66$ МВ.

9.49 На расстоянии r_1 = 4 см от бесконечно длинной заряженной нити находится точечный заряд q = 0,66 нКл. Под действием поля заряд приближается к нити до расстояния r_2 = 2 см; при этом совершается работа A = 50 эрг. Найти линейную плотность заряда τ на нити.

Решение

Работа по перемещению заряда $dA = qdU$, где $dU = -Edr = \frac{\tau dr}{2\pi\varepsilon\varepsilon_0 r}$. Отсюда $A = -\int_{r_1}^{r_2} \frac{q\tau dr}{2\pi\varepsilon\varepsilon_0 r} = \frac{q\tau}{2\pi\varepsilon\varepsilon_0} ln\frac{r_1}{r_2}$, откуда $\tau = \frac{2\pi\varepsilon\varepsilon_0 A}{q\, ln(r_1/r_2)}$ — (1). Подставляя числовые данные, получим $\tau = 0{,}6$ мкКл/м.

9.50 Электрическое поле образовано положительно заряженной бесконечно длинной нитью. Двигаясь под действием этого поля от точки, находящейся на расстоянии r_1 = 1 см от нити, до точки r_2 = 4 см, α - частица изменила свою скорость от $v_1 = 2 \cdot 10^5$ м/с до $v_2 = 3 \cdot 10^6$ м/с. Найти линейную плотность заряда τ на нити.

Решение

Имеем $\tau = \frac{2\pi\varepsilon\varepsilon_0 A}{q\, ln(r_1/r_2)}$ — (1) (см. задачу 9.49). Здесь работа сил поля A равна приращению кинетической энергии α-частицы, т. е. $A = \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2} = 29{,}57 \cdot 10^{-15}$ Дж. Подставляя числовые данные в (1), найдем $\tau = 3{,}7$ мкКл/м.

9.51 Электрическое поле образовано положительно заряженной бесконечно длинной нитью с линейной плотностью заряда τ = 0,2 мКл/м. Какую скорость v получит электрон под действием поля, приблизившись к нити с расстояния r_1 = 1 см до расстояния r_2 = 0,5 см?

Решение

Если скорость электрона в точке 1 была равна нулю, то работа сил поля по перемещению электрона в точку 2: $A=\dfrac{mv^2}{2}$ — (1). Из задачи 9.49 имеем $\tau=\dfrac{2\pi\varepsilon\varepsilon_0 A}{q\,ln(r_1/r_2)}$ — (2).

Подставляя (1) в (2), получим $\tau=\dfrac{\pi\varepsilon\varepsilon_0 mv^2}{q\,ln(r_1/r_2)}$, откуда $v=\sqrt{\dfrac{\tau q\,ln(r_1/r_2)}{\pi\varepsilon\varepsilon_0 m}}$; $v=2{,}96\cdot10^7$ м/с.

9.52 Около заряженной бесконечно протяженной плоскости находится точечный заряд q = 0,66 нКл. Заряд перемещается по линии напряженности поля на расстояние Δr = 2 см; при этом совершается работа A = 50 эрг. Найти поверхностную плотность заряда σ на плоскости.

Решение

Переведем единицы измерения работы A в систему СИ: $A=50$ эрг $=50\cdot10^{-7}$ Дж. Напряженность поля бесконечно заряженной плоскости $E=\dfrac{\sigma}{2\varepsilon\varepsilon_0}$ — (1). Кроме того, напряженность и потенциал однородного поля связаны соотношением $E=\dfrac{\Delta\varphi}{\Delta r}$ — (2). Приравняв (1) и (2), получим $\dfrac{\sigma}{2\varepsilon\varepsilon_0}=\dfrac{\Delta\varphi}{\Delta r}$ — (3). Работа сил поля $A=\dfrac{q\sigma\Delta r}{2\varepsilon\varepsilon_0}$, откуда $\sigma=\dfrac{2A\varepsilon\varepsilon_0}{q\Delta r}=6{,}7$ мкКл/м^2.

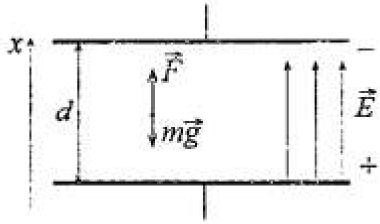
9.53 Разность потенциалов между пластинами плоского конденсатора U = 90 В. Площадь каждой пластины S = 60 см^2, ее заряд q = 1 нКл. На каком расстоянии d друг от друга находятся пластины?

Решение

Напряженность поля плоского конденсатора $E=\dfrac{\sigma}{\varepsilon\varepsilon_0}$ — (1). С другой стороны, $E=\dfrac{U}{d}$ — (2). Приравняв (1) и (2), с учетом $\sigma=\dfrac{q}{S}$, получим $\dfrac{q}{S\varepsilon\varepsilon_0}=\dfrac{U}{d}$, откуда $d=\dfrac{US\varepsilon\varepsilon_0}{q}=$ $=4{,}78$ мм.

9.54 Плоский конденсатор можно применить в качестве чувствительных микровесов. В плоском горизонтально расположенном конденсаторе, расстояние между пластинами которого d = 3,84 мм, находится заряженная частица с зарядом $q = 1{,}44\cdot 10^{-9}$ СГС$_q$ Для того чтобы частица находилась в равновесии, между пластинами конденсатора, нужно было приложить разность потенциалов U = 40 В. Найти массу m частицы.

Решение



Со стороны электрического поля на капельку действует сила $\vec{F} = \vec{E}q$, которая уравновешивается силой тяжести $m\vec{g}$. Т. к. $\vec{E}q + m\vec{g} = 0$ или $Eq = mg$. Напряженность поля плоского конденсатора $E = \frac{U}{d}$. Тогда $\frac{Uq}{d} = mg$, откуда $m = \frac{Uq}{dg} = 5{,}1\cdot 10^{-16}$ кг.

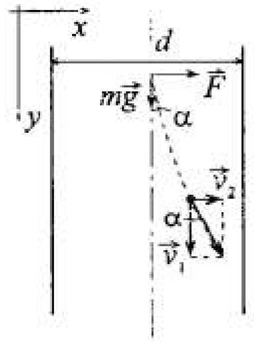
9.55 В плоском горизонтально расположенном конденсаторе, расстояние между пластинами которого d = 1 см, находится заряженная капелька массой $m = 5\cdot 10^{-11}$ г. В отсутствие электрического поля капелька вследствие сопротивления воздуха падает с некоторой постоянной скоростью. Если к пластинам конденсатора приложена разность потенциалов U = 600 В, то капелька падает вдвое медленнее. Найти заряд q капельки.

Решение

В отсутствие электрического поля сила тяжести, действующая на капельку, уравновешивается силой сопротивления воздуха $mg - 6\pi\eta r v_1$ — (1), а при наличии поля $mg - Eq = 6\pi\eta r v_2$ — (2). Из (1) и (2) получим $mg - Eq = \frac{v_2}{v_1} mg$, откуда $q = \frac{mg}{E}\left(1 - \frac{v_2}{v_1}\right) = \frac{mgd}{U}\left(1 - \frac{v_2}{v_1}\right) = 4{,}1\times 10^{-18}$ Кл.

9.56 Между двумя вертикальными пластинами на одинаковом расстоянии от них падает пылинка. Вследствие сопротивления воздуха пылинка падает с постоянной скоростью v_1 = 2 см/с. Через какое время t после подачи на пластины разности потенциалов U = 3 кВ пылинка достигнет одной из пластин? Какое расстояние l по вертикали пылинка пролетит до попадания па пластину? Расстояние между пластинами d = 2 см, масса пылинки $m = 2\cdot10^{-9}$ г, ее заряд $q = 6{,}5\cdot10^{-17}$ Кл.

Решение

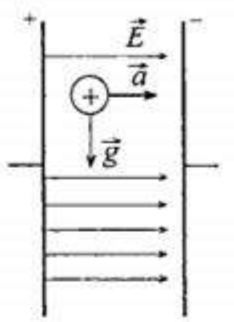


В отсутствие электрического поля $mg = 6\pi\eta r v_1$ — (1). При наличии поля на пылинку действует горизонтальная сила $\vec{F} = q\vec{E}$, которая сообщает пылинке ускорение, но из-за сопротивления воздуха в горизонтальном направлении также установится движение с некоторой постоянной скоростью v_2, причем $qE = 6\pi\eta r v_2$ — (2). Из рисунка видно, что $tg\alpha = \dfrac{v_1}{v_2} = \dfrac{qE}{mg}$. Кроме того, отношение $\dfrac{v_2}{v_1} = 0{,}5\dfrac{d}{l}$, откуда $l = 0.5v_1\dfrac{d}{v_2} = 0.5mg\dfrac{d}{qE} = 2$ см. Тогда $v_2 = \dfrac{v_1 d}{2l} = 1$ см/с.

Искомое время найдем по формуле $t = \dfrac{l}{v_1}$. Подставляя числовые данные, получим $t = 1$ с.

9.57 Между двумя вертикальными пластинами на одинаковом расстоянии от них падает пылинка.Пылинка падает с постоянной скоростью v_1 = 2 см/с. Через какое время t после подачи на пластины разности потенциалов U = 3 кВ пылинка достигнет одной из пластин? Какое расстояние l по вертикали пылинка пролетит до попадания на пластину? Расстояние между пластинами d = 2 см, масса пылинки $m = 2\cdot10^{-9}$ г, ее заряд $q = 6{,}5\cdot10^{-17}$ Кл.

Решение



В отсутствие электрического поля и силы сопротивления воздуха пылинка движется вертикально вниз со скоростью $v_1 = gt$, где $g = 9{,}8$ м/с^2 — ускорение свободного падения. После включения электрического поля за счет подачи на пластины конденсатора разности потенциалов U на пылинку будет действовать кулоновская сила F, направленная горизонтально, $F = qE$. Т. к. напряженность поля плоского конденсатора

$E = \frac{U}{d}$, то сила $F = \frac{qU}{d}$ — (1). По второму закону Ньютона $F = ma$ — (2). Приравняем правые части уравнений (1) и (2): $\frac{qU}{d} = ma$, отсюда горизонтальное ускорение частицы $a = \frac{qU}{dm}$ — (3), а ее скорость $v_2 = at = \frac{qUt}{dm}$. Перемещение частицы в горизонтальном направлении $\frac{d}{2} = \frac{at^2}{2}$ или $d = at^2$ — (4). Решая совместно уравнения (3) и (4), найдем время движения частицы $t = \sqrt{\frac{d}{a}} = \sqrt{\frac{d^2 m}{qU}} = 64$ мс. Расстояние, пройденное частицей по вертикали, $l = \frac{gt^2}{2} = 2$ см.

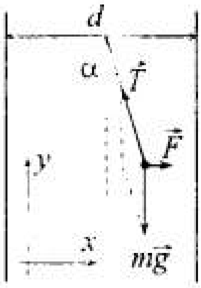
9.58 В плоском горизонтально расположенном конденсаторе, расстояние между пластинами которого d = 1 см, находится заряженная капелька масла. В отсутствие электрического поля капелька падает с постоянной скоростью v_1 = 0,11 мм/с. Если на пластины подать разность потенциалов U = 150 В, то капелька падает со скоростью v_2 = 0,43 мм/с. Найти радиус r капельки и ее заряд q. Динамическая вязкость воздуха $\eta = 1{,}82 \cdot 10^{-5}$ П·с; плотность масла больше плотности газа, в котором падает капелька, на $\Delta\rho = 0{,}9 \cdot 10^3$ кг/м^3.

Решение

В отсутствие электрического поля на каплю действует сила тяжести, сила Архимеда и сила внутреннего трения Стокса. Т. к. скорость капли постоянна, то $mg - F_A = 6\pi\eta r v_1$ — (1). При наличии поля к указанным силам добавится кулоновская сила, тогда $mg - F_A + qE = 6\pi\eta r v_2$ — (2). В первом приближении каплю можно считать шаром, поэтому ее объем $V = \frac{4}{3}\pi r^3$, а следовательно, масса $m = \rho_м V = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho_м$. По закону Архимеда $F_A = \rho_в V g = \frac{4}{3}\pi r^3 g \rho_в$. Тогда уравнения (1) и (2) можно переписать следующим образом: $\frac{4}{3}\pi r^3 g\Delta\rho = 6\pi\eta r v_1$ — (3); $\frac{4}{3}\pi r^3 g\Delta\rho + \frac{qU}{d} = 6\pi\eta \times r v_2$ — (4). Из уравнения (3) найдем радиус капли $r = \sqrt{\frac{9\eta v_1}{2g\Delta\rho}} = 1{,}12 \cdot 10^{-7}$ м. Разделив (4) на (3), имеем $1 + \frac{3qU}{4\pi r^3 g\Delta\rho} = \frac{v_2}{v_1}$, отсюда заряд капли $q = \frac{4\pi r^3 g\Delta\rho}{3U} \times \left(\frac{v_2}{v_1} - 1\right) = 7{,}26 \cdot 10^{-18}$ Кл.

9.59 Между двумя вертикальными пластинами, находящимися на расстоянии d = 1 см друг от друга, на нити висит заряженный бузиновый шарик массой m = 0,1 г. После подачи па пластины разности потенциалов U = 1 кВ нить с шариком отклонилась на угол $\alpha = 10°$. Найти заряд q шарика.

Решение



На шарик действует сила электрического поля $\vec{F} = q\vec{E}_1$ — (1), сила натяжения нити $\vec{T}$ и сила тяжести $m\vec{g}$. Условие равновесия: $\vec{F} + m\vec{g} + \vec{T} = 0$. В проекциях на оси x и y соответственно $F - T\sin\alpha = 0$ — (2) и $T\cos\alpha - mg = 0$ — (3). Из (3) $T = \frac{mg}{\cos\alpha}$, тогда из (2) $F = mg \cdot tg\alpha$ или, с учетом (1), $qE = mg \cdot tg\alpha$ — (4). Напряженность поля плоского конденсатора $E = \frac{U}{d}$ — (5). Подставляя (5) в (4), получим $\frac{qU}{d} = mg \cdot tg\alpha$, откуда $q = \frac{dmg \cdot tg\alpha}{U} = 1,73$ нКл.

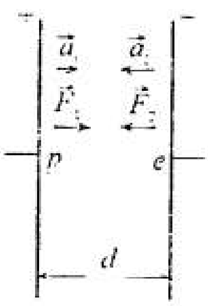
9.60 Мыльный пузырь с зарядом q = 222 нКл находится в равновесии в поле плоского горизонтально расположенного конденсатора. Найти раз разность потенциалов U между пластинами конденсатора, если масса пузыря m = 0,01 г и расстояние между пластинами d = 5 см.

Решение

Со стороны электрического поля на капельку действует сила $\vec{F} = \vec{E}q$, которая уравновешивается силой тяжести $m\vec{g}$. Т. к. $\vec{E}q + m\vec{g} = 0$ или $Eq = mg$. Напряженность поля плоского конденсатора $E = \frac{U}{d}$. Тогда $\frac{Uq}{d} = mg$, откуда $U = \frac{mgd}{q} = 22$ кВ.

9.61 Расстояние между пластинами плоского конденсатора d = 4 см. Электрон начинает двигаться от отрицательной пластины в тот момент, когда от положительной пластины начинает двигаться протон. На каком расстоянии l от положительной пластины встретятся электрон и прогон?

Решение

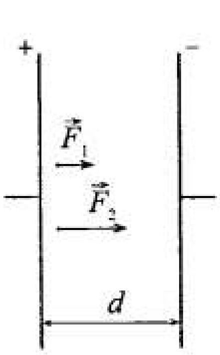


В поле плоского конденсатора на протон и электрон соответственно действуют кулоновские силы $\vec{F}_1 = e\vec{E}$ и $\vec{F}_2 = -e\vec{E}$ (силой тяжести ввиду ее малости можно пренебречь). Здесь e — элементарный заряд. Отсюда следует, что $\vec{F}_1 = -\vec{F}_2$ или $F_1 = F_2$. В результате действия постоянной силы протон и электрон получают ускорения $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$. По второму закону Ньютона $\vec{F}_1 = m_p\vec{a}_1$; $\vec{F}_2 = m_e\vec{a}_2$. Поскольку $F_1 = F_2$, то $m_p a_1 = m_e a_2$. Если протон и электрон встретились через время t на расстоянии l от положительной пластины, то $a_1 = \frac{2l}{t^2}$ и $a_2 = \frac{2(d-l)}{t^2}$. Тогда $\frac{m_p 2l}{t^2} = \frac{m_e 2(d-l)}{t^2}$; $m_p l = m_e(d-l)$, откуда $l = \frac{d}{m_p/m_e + 1} = 22$ мкм.

9.62 Расстояние между пластинами плоского конденсатора d = 1 см. От одной пластины одновременно начинают двигаться протон и а - частица. Какое расстояние l пролетает α - частица за то время, в течение которого протон пройдет весь путь от одной пластины до другой.

Решение

В поле плоского конденсатора на протон действует кулоновская сила $\vec{F}_1 = e\vec{E}$, на α-частицу действует кулоновская сила $\vec{F}_2 = 2e\vec{E}$, т. к. заряд α-частицы равен двум элементарным зарядам. Здесь e — элементарный заряд. Отсюда следует, что $F_2 = 2F_1$ — (1).



В результате действия постоянной силы протон и α-частица получают ускорения $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$. По второму закону Ньютона $\vec{F}_1 = m_p\vec{a}_1$; $\vec{F}_2 = m_\alpha\vec{a}_2$. С учетом (1) можно записать $m_\alpha a_2 = 2m_p a_1$. Если за время t протон прошел расстояние d, а α-частица прошла расстояние l, то $a_1 = \frac{2d}{t^2}$ и $a_2 = \frac{2l}{t^2}$. Тогда $\frac{2m_\alpha d}{t^2} = \frac{4m_p l}{t^2}$, откуда $l = \frac{2m_p d}{m_\alpha} = 5$ мм.

9.63 Электрон, пройдя в плоском конденсаторе путь от одной пластины до другой, приобретает скорость $v = 10^6$ м/с. Расстояние между пластинами d = 5,3 мм. Найти разность потенциалов U между пластинами, напряженность E электрического поля внутри конденсатора и поверхностную плотность заряда σ на пластинах.

Решение

Пройдя путь от одной пластины конденсатора до другой, электрон приобрел кинетическую энергию равную $\frac{mv^2}{2}$. Эту энергию он приобрел за счет работы сил электрического поля, которая выражается формулой $A = e \times (\varphi_2 - \varphi_1) = eU$. Тогда можно записать, что $mv^2/2 = eU$, откуда $U = \frac{mv^2}{2e} = 2{,}8$ В. Напряженность поля конденсатора $E = U/d = 530$ В/м. Кроме того, напряженность выражается соотношением $E = \frac{\sigma}{\varepsilon\varepsilon_0}$, откуда $\sigma = E\varepsilon\varepsilon_0 = 4{,}7$ нКл/м^2.

9.64 Электрическое поле образовано двумя параллельными пластинами, находящимися на расстоянии d = 2 см друг от друга. К пластинам приложена разность потенциалов U = 120 В. Какую скорость v получит электрон под действием поля, пройдя по линии напряженности расстояние Δr = 3 мм?

Решение

Для того чтобы сообщить электрону кинетическую энергию $W_к = \frac{mv^2}{2}$, силы электрического поля должны совершить работу $A = e\Delta\varphi$, где $\Delta\varphi$ — разность потенциалов между точками, расстояние между которыми равно Δr. Напряженность поля $E = \frac{\Delta\varphi}{\Delta r}$, откуда $\Delta\varphi = E\Delta r$. Тогда работа сил поля $A = eE\Delta r$ или, учитывая, что $E = \frac{U}{d}$, $A = \frac{eU\Delta r}{d}$. Поскольку $A = W_к$, то $\frac{eU\Delta r}{d} = \frac{mv^2}{2}$, откуда $v = \sqrt{\frac{2eU\Delta r}{md}} = 2{,}53 \cdot 10^6$ м/с.

9.65 Электрон в однородном электрическом поле получает ускорение а = 10^{12} м/с^2. Найти напряженность E электрического поля, скорость v, которую получит электрон за время t = 1 мкс своего движения, работу A сил электрического поля за это время и разность потенциалов U, пройденную при этом электроном. Начальная скорость электрона v_0 = 0.

Решение

В электрическом поле на электрон действует кулоновская сила $\vec{F} = e\vec{E}$ (силу тяжести не учитываем, поскольку для электрона $mg << eE$). Согласно второму закону Ньютона $\vec{F} = m\vec{a}$ или $e\vec{E} = m\vec{a}$, откуда $E = \frac{ma}{e} = 5{,}7$ В/м. За время t электрон приобретает скорость $v = at = 10^6$ м/с, т. е. силы электрического поля совершают работу A, равную приращению кинетической энергии электрона. $A = \frac{mv^2}{2} = 4{,}5 \cdot 10^{-19}$ Дж. С другой стороны, работа сил поля $A = eU$, откуда $U = \frac{A}{e} = 2{,}8$ В.

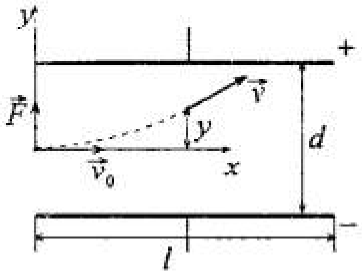
9.66 Электрон летит от одной пластины плоского конденсатора до другой. Разность потенциалов между пластинам U = 3 кВ; расстояние между пластинами d = 5 мм. Найти силу F, действующую на электрон, ускорение а электрона, скорость v, с которой электрон приходит ко второй пластине, и поверхностную плотность заряда σ на пластинах.

Решение

В электрическом поле на электрон действует кулоновская сила $\vec{F} = e\vec{E}$. Напряженность поля $E = \frac{U}{d}$, тогда $F = \frac{eU}{d} = 9{,}6 \cdot 10^{-14}$ Н. По второму закону Ньютона $\vec{F} = m\vec{a}$, откуда $a = \frac{F}{m} = 1{,}05 \cdot 10^{17}$ м/с^2. При перемещении электрона от одной пластины к другой силы поля совершают работу $A = eU$, в результате которой электрон приобретает кинетическую энергию $W_к = \frac{mv^2}{2}$. Поскольку $A = W_к$, то $eU = \frac{mv^2}{2}$, откуда $v = \sqrt{\frac{2eU}{m}}$; $v = 3{,}24 \cdot 10^7$ м/с. Поверхностная плотность заряда $\sigma = \varepsilon\varepsilon_0 E = 5{,}3$ мКл/м^2.

9.67 Электрон с некоторой начальной скоростью v_0 влетает в плоский горизонтально расположенный конденсатор параллельно пластинам на равном расстоянии от них. Разность потенциалов между пластинами конденсатора U = 300 В; расстояние между пластинами d = 2 см; длина конденсатора l = 10 см. Какова должна быть предельная начальная скорость v_0 электрона, чтобы электрон не вылетел из конденсатора? Решить эту же задачу для α - частицы.

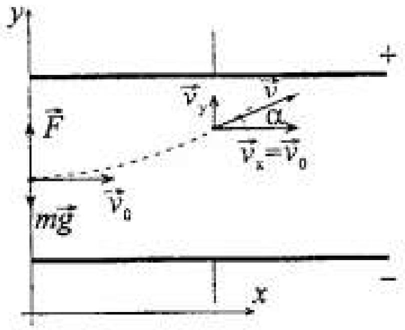
Решение



В плоском конденсаторе электрон будет двигаться по параболе подобно горизонтально брошенному телу в поле силы тяжести, на электрон в конденсаторе действует постоянная сила $\vec{F} = e\vec{E}$, под действием которой он получит ускорение $\bar{a} = \frac{e\vec{E}}{m}$. Пролетая длину l конденсатора за время $t = \frac{l}{v}$, электрон отклонится на расстояние $y = \frac{at^2}{2} = \frac{eEl^2}{2mv^2}$. Чтобы электрон не вылетел из конденсатора, должно выполняться условие $y \ge \frac{d}{2}$. Отсюда $v_0 \le l\sqrt{\frac{eE}{md}}$. Подставляя числовые данные, получим для электрона $v_0 = 3{,}64 \cdot 10^7$ м/с и для α -частицы $v_0 = 6 \cdot 10^5$ м/с.

9.68 Электрон с некоторой скоростью влетает в плоский горизонтально расположенный конденсатор параллельно пластинам на равном расстоянии от них. Напряженность поля в конденсаторе E = 100 В/м; расстояние между пластинами d = 4 см. Через какое время t после того, как электрон влетает в конденсатор, он попадет на одну из пластин? На каком расстоянии s от начала конденсатора электрон попадет на пластину, если он ускорен разностью потенциалов U = 60 B?

Решение

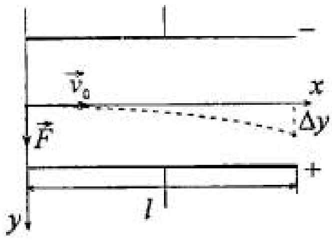


Вдоль горизонтальной оси движение электрона будет равномерным со скоростью $v_x = v_0$, т. к. вдоль оси x на него не действуют силы. При равномерном движении координата x изменяется со временем $x = v_0 t$. Вдоль оси y на электрон действуют две силы: сила тяжести $m\vec{g}$ и сила электростатического поля $\vec{F} = e\vec{E}$. Сила тяжести $mg = (9{,}11 \cdot 10^{-31} \cdot 9{,}8)$ Н на тринадцать порядков меньше электростатической силы $F = (1{,}6 \cdot 10^{-19} \cdot 10^2)$ Н и ею можно пренебречь. Под действием электростатической силы движение электрона вдоль оси y будет равноускоренным, а координата y изменяется со временем по закону $y = \frac{at^2}{2} = \frac{Ft^2}{m2} = \frac{eEt^2}{m2}$. Отсюда при $y = \frac{d}{2}$ имеем $t = \sqrt{\frac{dm}{eE}} \approx 48$ нс. Пройдя разность потенциалов U, электрон за счет работы A сил электростатического поля приобретает кинетическую энергию, т. е. $A = eU = \frac{mv_0^2}{2}$, откуда $v_0 = \sqrt{\frac{2eU}{m}}$. Тогда через время $t = 48$ нс он упадет на пластину на расстоянии $S = v_0 t = t \times \sqrt{\frac{2eU}{m}}$. Подставив числовые данные, получим $S = 22$ см.

9.69 Электрон влетает в плоский горизонтально расположенный конденсатор параллельно пластинам со скоростью $v_0 = 9\cdot10^6$ м/с. Разность потенциалов между пластинами $U = 100$ В; расстояние между пластинами $d = 1$ см. Найти полное а, нормальное a_n и тангенциальное a_τ ускорения электрона через время $t = 10$ нс после начала его движения в конденсаторе.

Решение

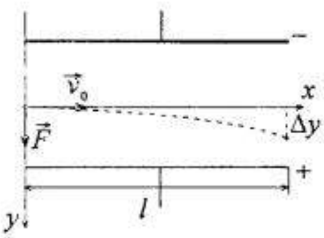
Движение электрона в электрическом поле конденсатора аналогично движению тела, брошенного горизонтально в поле силы тяжести. На электрон действует кулоновская сила $\vec{F} = e\vec{E}$. По второму закону Ньютона $\vec{F} = m\vec{a}$ или $e\vec{E} = m\vec{a}$.



Отсюда полное ускорение электрона $a = \frac{eE}{m}$ или, с учетом $E = \frac{U}{d}$, $a = \frac{eU}{md} = 17{,}6\cdot10^{14}$ м/с^2. Через время t после начала движения его нормальное ускорение $a_n = \frac{av_0}{\sqrt{v_0^2 + a^2t^2}}$, тангенциальное ускорение $a_\tau = \frac{a^2t}{\sqrt{v_0^2 + a^2t^2}}$ (см. задачу 1.30). Подставляя числовые значения, получим $a_n = 8\times$ $\times10^{14}$ м/с^2; $a_\tau = 15{,}7\cdot10^{14}$ м/с^2.

9.70 Протон и α - частица, двигаясь с одинаковой скоростью, влетают в плоский конденсатор параллельно пластинам. Во сколько раз отклонение протона полем конденсатора будет больше отклонения α - частицы?

Решение



Найдем отклонение Δy полем конденсатора для любой положительно заряженной частицы. По второму закону Ньютона кулоновская сила $\vec{F} = m\vec{a}$ или $q\vec{E} = m\vec{a}$. Пусть за время t частица пролетает по оси x расстояние l. Движение частицы по оси x — равномерное, со скоростью v_0, т. к. проекция силы $\vec{F}$ на ось x равна нулю, следовательно, $t = \frac{l}{v_0}$. Движение частицы вдоль оси y — равноускоренное под действием силы $\vec{F}$, направленной вдоль этой оси. Ускорение $a = \frac{qE}{m}$. Тогда $\Delta y = \frac{at^2}{2}$ или $\Delta y_2 = \frac{2eEl^2}{2m_2v_0^2}$. Тогда $\frac{\Delta y_1}{\Delta y_2} = \frac{m_\alpha}{2m_p} = 2$.

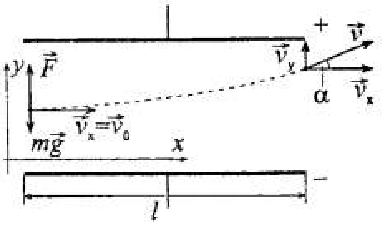
9.71 Протон и α - частица, ускоренные одной и той же разностью потенциалов, вылетают в плоский конденсатор параллельно пластинам. Во сколько раз отклонение протона полем конденсатора будет больше отклонения α - частицы?

Решение

Если ускорения протона и α -частицы будут одинаковы, то и отклонение Δy у них будет одно и то же (см. задачу 9.70).

9.72 Электрон влетает в плоский горизонтально расположенный конденсатор параллельно его пластинам со скорость о $v_0 = 10^7$ м/с. Напряженность поля в конденсаторе E = 10 кВ/м; длина конденсатора l = 5 см. Найти модуль и направление скорости v электрона при вылете его из конденсатора.

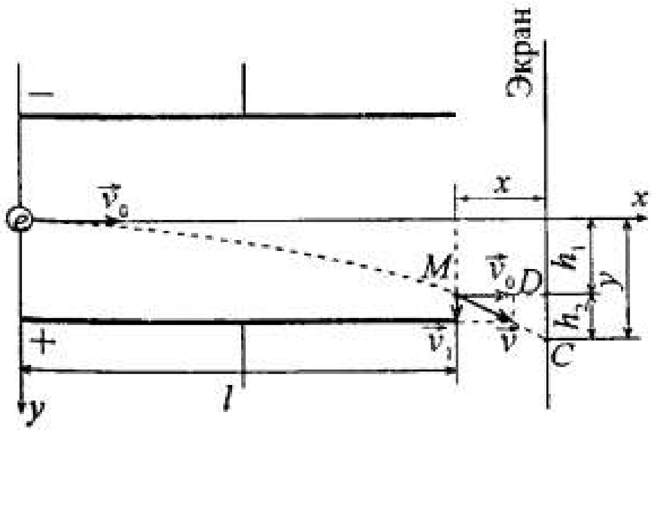
Решение



Полная скорость электрона в момент вылета из конденсатора $\vec{v} = \vec{v}_x + \vec{v}_y$, где $\vec{v}_x = \vec{v}_0$, $\vec{v}_y = \vec{a}t$. В скалярной форме $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$. Поскольку $a = \frac{eE}{m}$, $t = \frac{l}{v_0}$ (см. задачу 9.67), то $v = \sqrt{v_0^2 + \left(\frac{eEl}{mv_0}\right)^2} = 1{,}33 \cdot 10^7$ м/с. Направление скорости v электрона определяется углом α. Из рисунка видно, что $\cos\alpha = v_0 / v$; $\alpha \approx 41°$.

9.73 Пучок электронов, ускоренных разностью потенциалов U = 300В, при прохождении через незаряженный плоский горизонтально расположенный конденсатор параллельно его пластинам дает светящееся пятно на флуоресцирующем экране, расположенном на расстоянии x = 12 см от конца конденсатора. При зарядке конденсатора пятно на экране смещается на расстояние y = 3 см. Расстояние между пластинами d = 1,4 см; длина конденсатора l = 6 см. Найти разность потенциалов U , приложенную к пластинам конденсатора.

Решение



Движение электрона внутри конденсатора складывается из двух движений: 1) по инерции вдоль оси x с постоянной скоростью v_0, приобретенной под действием разности потенциалов U_0, которую электрон прошел до конденсатора; 2) равноускоренного движения в вертикальном направлении к положительно заряженной пластине под действием постоянной силы поля конденсатора. По выходе из конденсатора электрон будет двигаться равномерно со скоростью v, которую он имел в точке M в момент вылета из конденсатора. Из рисунка видно, что $y = h_1 - h_2$, где h_1 — расстояние, на которое сместится электрон в вертикальном положении во время движения в конденсаторе; h_2 — расстояние между точкой D на экране, в которую электрон попал бы, двигаясь по выходе из конденсатора по направлению начальной скорости v_0, и точкой C, в которую электрон попадет в действительности. Выразим отдельно h_1 и h_2. По формуле длины пути равноускоренного движения найдем $h_1 = at^2/2$, где a — ускорение, полученное электроном под действием поля конденсатора; t — время полета электрона внутри конденсатора. По второму закону Ньютона $a = F/m_e$, где $F = eE = \dfrac{eU}{d}$ — сила, с которой поле действует на электрон. Из формулы пути равномерного движения $t = \dfrac{l}{v_0}$. Выражение скорости v_0 найдем из условия равенства работы, совершенной полем при перемещении электрона, и приобретенной им кинетической энергии: $\dfrac{m_e v_0^2}{2} = eU_0$. Отсюда $v_0^2 = \dfrac{2eU_0}{m_e}$ — (2). Подставляя в формулу (1) значения a, F, t и v_0^2, получим $h_1 = \dfrac{Ul^2}{4dU_0}$. Длину отрезка h_2 найдем из подобия треугольников MDC и векторного: $h_2 = \dfrac{v_1 x}{v}$, где v_1 — скорость электрона в вертикальном положении в точке M. Скорость v_1 найдем по формуле $v_1 = at$, которая с учетом выражений для a, F и t примет вид $v_1 = \dfrac{eUl}{dm_e v_0}$. Подставив выражение v_1 в формулу (3), получим $h_2 = \dfrac{eUlx}{dm_e v_0^2}$, или, заменив v_0^2 по формуле (3), найдем $h_2 = \dfrac{Ulx}{2dU_0}$. Тогда

$$y = h_1 + h_2 = \frac{Ul^2}{4DU_0} + \frac{Ulx}{2dU_0} = \frac{Ul}{2dU_0}\left(\frac{l}{2} + x\right),$$ откуда

$$U = \frac{2ydU_0}{l + (l/2 + x)};\ U = 28\ \text{В}.$$

9.74 Электрон движется в плоском горизонтально расположенном конденсаторе параллельно его пластинам со скоростью $v = 3{,}6 \cdot 10^7$ м/с. Напряженность поля внутри конденсатора $E = 3{,}7$ кВ/м; длина пластин конденсатора $l = 20$ см. На такое расстояние у сместится электрон в вертикальном направлении под действием электрического поля за время его движения в конденсаторе?

Решение

$$y = \frac{eEl^2}{2m_e v^2}$$ (см. задачу 9.70). $y = 0{,}01$ м.

9.75 Протон влетает в плоский горизонтально расположенный конденсатор параллельно его пластинам со скоростью $v_0 = 1{,}2 \cdot 10^5$ м/с. Напряженность поля внутри конденсатора $U = 3$ кВ/м; длина пластин конденсатора $l = 10$ см. Во сколько раз скорость протона v при вылете из конденсатора будет больше его начальной скорости v_0?

Решение

Скорость протона в момент вылета равна $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$, где $v_x = v_0$, $v_y = at = \dfrac{q_p El}{m_p v_0}$ (см. задачу 9.70). Отсюда скорость $v = \sqrt{v_0^2 + \left(\dfrac{q_p El}{m_p v_0}\right)^2} = 2{,}69 \cdot 10^5$ м/с. Тогда отношение скоростей $\dfrac{v}{v_0} = 2{,}24$.

9.76 Между пластинами плоского конденсатора, находящимися на расстоянии $d_1 = 5$ мм друг от друга, приложена разность потенциалов $U = 150$ В. К одной из пластин прилегает плоскопараллельная пластинка фарфора толщиной $d_2 = 3$ мм. Найти напряженности E_1 и E_2 электрического поля в воздухе и фарфоре.

Решение

Разность потенциалов между обкладками конденсатора $U = \int\limits_1^2 \vec{E} d\vec{l}$ — (1). Поскольку в плоском конденсаторе в пределах каждого диэлектрика поле однородно, равенство (1) может быть записано в виде $U = E_1 l_1 + E_2 l_2$, где $l_1 = d_1 - d_2$ — толщина слоя воздуха, $l_2 = d_2$ — толщина слоя фарфора. Граница раздела диэлектриков параллельна обкладкам и, следовательно, нормальна силовым линиям поля. В отсутствие свободных зарядов на поверхности диэлектрика $D_1 = D_2$ и $\varepsilon_1 E_1 = \varepsilon_2 E_2$. Диэлектрическая проницаемость воздуха $\varepsilon_1 = 1$, диэлектрическая проницаемость фарфора $\varepsilon_2 = 6$. Решая систему уравнений

$$\begin{cases} U = E_1(d_1 - d_2) + E_2 d_2, \\ \varepsilon_1 E_1 = \varepsilon_2 E_2, \end{cases}$$

получим $E_1 = \dfrac{U}{(d_1 - d_2) + \varepsilon_1 d_2 / \varepsilon_1}$;

$$E_1 = \frac{\varepsilon_2 U}{d_1 \varepsilon_2 + d_2 \varepsilon_1} = 60 \text{ кВ/м} \quad \text{и} \quad E_2 = \frac{U}{\varepsilon_2 (d_1 - d_2)/\varepsilon_1 + d_2};$$

$$E_2 = \frac{\varepsilon_1 U}{d_1 \varepsilon_2 + d_2 \varepsilon_1} = 10 \text{ кВ/м}.$$

9.77 Найти емкость C земного шара. Считать радиус земного шара R = 6400 км. На сколько изменится потенциал земного поля, если ему сообщить заряд q = 1 Кл?

Решение

Имеем $C = 4\pi\varepsilon\varepsilon_0 R$. Подставляя числовые данные, получим $C = 4\cdot 3{,}14\cdot 1\cdot 8{,}85\cdot 10^{-12}\cdot 6400\cdot 10^3 = 711$ мкФ. Если земному шару сообщить заряд $q = 1$ Кл, его потенциал увеличится на величину $\Delta\varphi = \dfrac{q}{C} = 1406$ В.

9.78 Шарик радиусом R = 2 см заряжается отрицательно до потенциала φ = 2 кВ. Найти массу m всех электронов, составляющих заряд, сообщенный шарику.

Решение

Емкость шарика $C = 4\pi\varepsilon\varepsilon_0 R$. После зарядки до потенциала $q = \varphi C = \varphi 4\pi\varepsilon\varepsilon_0 R$. Количество электронов, составляющих этот заряд, $N = \dfrac{q}{e}$ или $N = \dfrac{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 R\varphi}{e}$. Масса всех электронов $m = Nm_e = \dfrac{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 R\varphi m_e}{e}$; $m = 2{,}5\cdot 10^{-20}$ кг.

9.79 Восемь заряженных водяных капель радиусом r = 1 см и зарядом q = 0,1 нКл каждая сливаются в одну общую водяную каплю. Найти потенциал φ большой капли.

Решение

Потенциал на поверхности большой шарообразной капли $\varphi = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R}$ — (1), где Q — заряд капли, R — ее радиус.

Потенциал на поверхности малой капли $\varphi_0 = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$, где q — заряд капли, r — ее радиус. Если n одинаковых капель сливаются в одну, ее заряд равен $Q = nq$. С учетом этого, разделив (1) на (2), получим $\dfrac{\varphi}{\varphi_0} = n\dfrac{r}{R}$ — (3). Объем большой капли равен сумме объемов маленьких капель: $\dfrac{4}{3}\pi R^3 = n\dfrac{4}{3}\pi r^3$, откуда $\dfrac{r}{R} = \dfrac{1}{\sqrt[3]{n}}\varphi_0 = \dfrac{n}{\sqrt[3]{n}}\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$; $\varphi = 3{,}6$ кВ.

9.80 Два шарика одинаковых радиуса R = 1 см и массы m = 40 мг подвешены на нитях одинаковой длины так, что их поверхности соприкасаются. Когда шарики зарядили, нити разошлись на некоторый угол и сила натяжения нитей сила равной T = 490 мкН. Найти потенциал φ заряженных шариков, если известно, что расстояние от центра каждого шарика до точки подвеса l = 10 см.

Решение

Задача аналогична 9.15. Шарикам сообщили заряд $q = 8l\sqrt{\pi T\varepsilon\varepsilon_0\left(1-\left(\frac{mg}{T}\right)^{\frac{3}{2}}\right)} = 21{,}7\cdot 10^{-9}$ Кл. Потенциал шариков $\varphi = \frac{q}{C} = \frac{q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 R}$; $\varphi = 19{,}5$ кВ.

9.81 Шарик, заряженный до потенциала φ = 792 В, имеет поверхностную плотность заряда σ = 333 нКл/м^2. Найти радиус r.

Решение

Потенциал шарика и его заряд связаны соотношением $q = C\varphi$, где заряд $q = \sigma\cdot 4\pi r^2$, емкость шарика $C = 4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r$. Иначе, $\sigma r = \varepsilon\varepsilon_0\varphi$, откуда $r = \frac{\varepsilon\varepsilon_0\varphi}{\sigma} = 0{,}021$ м.

9.82 Найти соотношение между радиусом шара R и максимальным потенциалом φ, до которого он может быть заряжен в воздухе, если при нормальном давлении разряд в воздухе наступает при напряженности электрического поля E_0 = 3 МВ/м. Каким будет максимальный потенциал φ шара диаметром D = 1 м?

Решение

Напряженность поля у поверхности заряженного шара равна $E = \frac{q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 R^2}$. Заряд q и потенциал φ шара связаны соотношением $q = C\varphi$, где емкость шара $C = 4\pi\varepsilon\varepsilon_0 R$. Отсюда $E = \frac{\varphi}{R}$. Поскольку максимального значения потенциал достигает при $E = E_0$, то $\varphi_{max} = E_0 R$ или $\varphi_{max} = 3\cdot 10^6 R$. При диаметре шара $D = 1$ м имеем $\varphi_{max} = 1{,}5$ МВ.

9.83 Два шарика одинаковых радиуса R = 1 см и массы m = 0,15 кг заряжены до одинакового потенциала φ = 3 кВ и Находятся на некотором расстоянии r_1 друг от друга. При этом энергия гравитационного взаимодействия $W_{гр} = 10^{-11}$ Дж. Шарики сближаются до расстояния r_2. Работа, необходимая для сближения шариков А = $2\cdot10^{-5}$ Дж. Найти энергию электростатического взаимодействия шариков после их соединения.

Решение

До сближения шарики обладали энергией гравитационного взаимодействия $W_{гр} = Gm^2/r_1$ — (1) и энергией электрического взаимодействия $W_{эл} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r_1}$ — (2). Заряд шарика $q = C\varphi = 4\pi\varepsilon\varepsilon_0 R\varphi$ — (3). Поскольку радиусы и потенциалы шариков одинаковы, то $q_1 = q_2 = q$ и уравнение (2) с учетом (3), можно переписать $W_{эл} = \frac{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 R^2\varphi^2}{r_1}$. Из (1) найдем $r_1 = \frac{Gm^2}{W_{гр}}$. Тогда $W_{эл} = \frac{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 R^2\varphi^2 W_{гр}}{Gm^2}$ — (4). Для сближения шариков необходимо совершить работу A против сил поля, которая равна приращению энергии электростатического взаимодействия. $A = W'_{эл} - W_{эл}$, где $W'_{эл}$ — искомая энергия электростатического взаимодействия шариков после их сближения. Отсюда $W'_{эл} = A + W_{эл}$ или, с учетом (4), $W'_{эл} = A + \frac{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 R^2\varphi^2 W_{гр}}{Gm^2}$. Подставляя числовые данные, получим $W'_{эл} = 2{,}67$ мкДж.

9.84 Площадь пластин плоского воздушного конденсатора $S = 1$ м^2, расстояние между ними d = 1,5 мм. Найти емкость этого конденсатора.

Решение

Емкость плоского конденсатора определяется соотношением $C = \varepsilon\varepsilon_0 S/d$. Для воздуха $\varepsilon = 1$. Подставив числовые значения, получим $C = 5{,}9$ нФ.

9.85 Конденсатор предыдущей задачи заряжен до разности потенциалов U = 300 В. Найти поверхностною плотность заряда σ на его пластинах.

Решение

Напряженность поля плоского конденсатора $E = \frac{U}{d}$. С другой стороны, $E = \frac{\sigma}{\varepsilon\varepsilon_0}$. Тогда $\frac{U}{d} = \frac{\sigma}{\varepsilon\varepsilon_0}$, откуда $\sigma = \frac{U\varepsilon\varepsilon_0}{d} = 1{,}77$ мкКл/м^2.

9.86 Требуется конденсатор емкостью C = 250 пФ. Для этого на парафинированную бумагу толщиной d = 0,05 мм наклеивают с обеих сторон кружки станиоля. Каким должен быть диаметр D кружков станиоля?

Решение

Емкость конденсатора выражается формулой $C = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 S}{d}$, где $S = \pi\frac{D^2}{4}$. Т. е. $C = \frac{\varepsilon\varepsilon_0\pi D^2}{4d}$. Отсюда $D = \sqrt{\frac{4Cd}{\varepsilon\varepsilon_0\pi}}$. Диэлектрическая проницаемость парафина $\varepsilon = 2$. Подставив числовые данные, получим $D = 3$ см.

9.87 Площадь пластин плоскою воздушного конденсатор S = 0,01 м^2. Расстояние между ними d = 5 мм. К пластинам приложена разность потенциалов U_1 = 300 В. После отключения конденсатора от источника напряжения пространство между пластинами заполняется эбонитом. Какова будет разность потенциалов U_2 между пластинами после заполнения? Найти емкость конденсатора C_1 и C_2и поверхностные плотности заряда σ_1 и σ_2 на пластинах до и после их заполнения.

Решение

Т. к. заполнение конденсатора эбонитом производ[illegible]ся после отключения от источника напряжения, то по з[illegible], сохранения электрического заряда заряд на плас[illegible]ах $q = const$. Следовательно, и поверхностная плотность [illegible]да на пластинах $\sigma = \frac{q}{S} = const$. Т. к. $E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0\varepsilon} = \frac{U}{d}$, то [illegible] и после заполнения имеем $\sigma \cdot d = U_1\varepsilon_0\varepsilon_1$ — (1) и $\sigma \cdot d = $ [illegible] $\times \varepsilon_0\varepsilon_2$ — (2). Приравняв правые части уравнений (1) [illegible] (2), имеем $U_1\varepsilon_1 = U_2\varepsilon_2$, откуда $U_2 = \frac{U_1\varepsilon_1}{\varepsilon_2} = 115$ В. До и [illegible]е заполнения конденсатора имеем $C_1 = \frac{\varepsilon_0\varepsilon_1 S}{d} = 17{,}$[illegible]; $C_2 = \frac{\varepsilon_0\varepsilon_2 S}{d} = 46$ пФ; $\sigma = \frac{q}{S} = \frac{C_1 U_1}{S} = 531$ нКл/м^2.

9.88 Площадь пластин плоскою воздушного конденсатор S = 0,01 м^2. Расстояние между ними d = 5 мм. К пластинам приложена разность потенциалов U_1 = 300 В. При включенном источнике напряжения пространство между пластинами заполняется эбонитом. Какова будет разность потенциалов U_2 между пластинами после заполнения? Найти емкость конденсатора C_1 и C_2 и поверхностные плотности заряда σ_1 и σ_2 на пластинах до и после их заполнения.

Решение

В данной задаче рассматриваются два крайних состояния конденсатора: когда он не заполнен диэлектриком и когда заполнен. Сам процесс заполнения не учитывается. Если заполнение конденсатора эбонитом производить при включенном источнике напряжения, то $U = const$. Следовательно, и напряженность поля свободных зарядов на обкладках конденсатора $E = \frac{U}{d} = const$. С другой стороны, напряженность поля свободных зарядов $E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0 \varepsilon}$, тогда до и после заполнения имеем $\frac{U}{d} = \frac{\sigma_1}{\varepsilon_0 \varepsilon_1}$ и $\frac{U}{d} = \frac{\sigma_2}{\varepsilon_0 \varepsilon_2}$, откуда $\sigma_1 = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_1 U}{d} = 531$ нКл/м^2 и $\sigma_2 = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_2 U}{d} = 1{,}38$ мкКл/м^2. До и после заполнения эбонитом имеем (см. задачу 9.87) $C_1 = 17{,}7$ пФ, $C_2 = 46$ пФ, т. к. емкость конденсатора от напряжения не зависит.

9.89 Площадь пластин плоского конденсатора S = 0,01 м^2, расстояние между ними d = 1 см. К пластинам приложена разность потенциален U = 300 В. В пространстве между пластиной находятся плоскопараллельная пластинка стекла толщиной d_1 = 0,5 см и плоскопараллельная пластика парафина толщиной d_2 = 0,5 см. Найти напряженности E_1 и E_2 поля и падения потенциала U_1 и U_2 в каждом слое. Каковы будут при этом емкость C конденсатора и поверхностная плотность заряда σ на пластинах?

Решение

Разность потенциалов между обкладками конденсатора $U = \int_1^2 \vec{E} d\vec{l}$ — (1). Поскольку в плоском конденсаторе в пределах каждого диэлектрика поле однородно, равенство (1) может быть записано в виде $U = E_1 l_1 + E_2 l_2$ — (2), где $l_1 = d_1$ — толщина слоя стекла, $l_2 = d_2$ — толщина слоя парафина. Граница раздела диэлектриков параллельна обкладкам и, следовательно, нормальна силовым линиям поля. В отсутствие свободных зарядов на поверхности диэлектрика $D_1 = D_2$ и $\varepsilon_1 E_1 = \varepsilon_2 E_2$ — (3). Падение потенциала в каждом слое $U_1 = E_1 d_1$ и $U_2 = E_2 d_2$ — (4). Уравнение (2) можно записать в виде $E_1 d_1 + E_2 d_2 = U$ — (5). Из (5) и (3) имеем $E_1 = \frac{U\varepsilon_2}{\varepsilon_1 d_1 + \varepsilon_2 d_2} = 15$ кВ/м, $E_2 = \frac{\varepsilon_1 E_1}{\varepsilon_2} = 45$ кВ/м. Тогда из (4) $U_1 = 75$ В, $U_2 = 225$ В. Емкость C

найдем по формуле $\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$, где $C_1 = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_1 S}{d_1}$, $C_2 = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_2 S}{d_2}$ — (4). Отсюда емкость $C = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_1 \varepsilon_2 S}{d_1 \varepsilon_2 + d_2 \varepsilon_1} =$ $= 26{,}6$ пФ. Заряд на одной из пластин $q = \sigma \cdot S = C_1 U_1 =$ $= C_2 U_2 = CU$; отсюда $\sigma = \frac{CU}{S} = 0{,}8$ мкКл/м^2.

9.90 Между пластинами плоскою конденсатора, находящимися на расстоянии $d = 1$ см друг от друга, приложена разность потенциалов $U = 100$ В. К одной из пластин прилегает плоскопараллельная пластинка кристаллического бромистого таллия ($\varepsilon = 173$) толщиной $d_0 = 9{,}5$ мм. После отключения конденсатора от источника напряжения пластинку кристалла вынимают. Какова будет после этого разность потенциалов U_2 между пластинами конденсатора?

Решение

Если конденсатор отключен от источника напряжения, то $q = const$. Когда пластинка кристалла находится внутри конденсатора, напряженность в воздушном слое $E = \frac{U_1 \varepsilon_2}{\varepsilon_1 d_0 + \varepsilon_2 (d - d_0)}$ — (1) (см. задачу 9.89). После того как пластинку вынули, разность потенциалов между пластинами стала $U_2 = Ed$ — (2). Подставляя (2) в (1), найдем $U_2 = \frac{dU_1 \varepsilon_2}{\varepsilon_1 d_0 + \varepsilon_2 (d - d_0)} = 1{,}8$ кВ.

9.91 Коаксиальный электрический кабель состоит из жилы и концентрической цилиндрической оболочки между которыми находится диэлектрик ($\varepsilon = 3{,}2$). Найти емкость C_1 единицы длины такою кабеля, если радиус жилы $r_1 = 8$ см , оболочки $r_2 = 3{,}0$ см.

Решение

Емкость коаксиального кабеля конечной длины L можно найти по формуле $C = \frac{2\pi\varepsilon\varepsilon_0 L}{\ln(R/r)}$. Отсюда для единицы длины кабеля имеем $C_1 = \frac{C}{L} = \frac{2\pi\varepsilon\varepsilon_0}{\ln(R/r)}$; $C_1 = 214$ пФ/м.

9.92 Радиус центральной жилы коаксиальною кабеля r = 1,5 см, радиус оболочки R = 3,5 см. Между центральной жилой и оболочкой приложена разность потенциалов U = 2,3 кВ. Найти напряженность E электрического поля на расстоянии x = 2 см от оси кабеля.

Решение

Поле внутри кабеля неоднородно, и напряженность убывает с увеличением расстояния от оси системы. Поскольку вся система обладает осевой симметрией, напряженность поля может быть найдена с помощью обобщенной теоремы Гаусса: $\oint\limits_S \vec{D}d\vec{S} = \sum Q$. Если выбрать вспомогательную поверхность в виде коаксиального цилиндра, получим $D = \frac{\tau}{2\pi r}$ — (1), где τ — линейная плотность заряда на центральной жиле. При этом вектор $\vec{D}$ нормален к границе раздела и выражение (1) справедливо в любой точке конденсатора. Учитывая, что $D = \varepsilon\varepsilon_0 E$, получим выражение для напряженности поля в указанной точке, т. е. при $r = x$: $E = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon\varepsilon_0 x}$. Найдем линейную плотность заряда. Емкость кабеля $C = \frac{2\pi\varepsilon\varepsilon_0 L}{ln(R/r)} = \frac{q}{U} = \frac{\tau L}{U}$, откуда $\tau = \frac{2\pi\varepsilon\varepsilon_0 U}{ln(R/r)}$. Тогда напряженность поля $E = \frac{U}{x\,ln(R/r)} =$ ≈ 136 кВ/м.

9.93 Вакуумный цилиндрический конденсатор имеет радиус внутреннего цилиндра r = 1,5 см и радиус внешнего цилиндра R = 3,5 см. Между цилиндрами приложена разность потенциалов U = 2,3 кВ. Какую скорость v полупи электрон под действием поля этого конденсатора, двигаясь с расстояния l_1 = 2,5 см до расстояния l_2 = 2 см от оси цилиндра?

Решение

За счет работы сил электрического поля электрон приобретает кинетическую энергию, т. е. $A = \frac{mv^2}{2}$. Имеем $dA = qdU = -qEdx$. Т. к. $E = \frac{U}{x\,ln(R/r)}$, то работа

$$A = -\int\limits_{l_1}^{l_2} \frac{qUdx}{x\,ln(R/r)} = \frac{qU\,ln(l_1/l_2)}{ln(R/r)} = \frac{mv^2}{2},$$ следовательно,

$$v = \sqrt{\frac{2qU\,ln(l_1/l_2)}{m\,ln(R/r)}} = 1{,}46 \cdot 10^7 \text{ м/с}.$$

9.94 Цилиндрический конденсатор состоит из внутреннего цилиндра радиусом r = 3 мм двух слоев диэлектрика и внутреннего цилиндра радиусом R = 1 см. Первый слой диэлектрика толщиной d_1 =3 мм и примыкает к внутреннему цилиндру. Найти отношение падения потенциала U_1/U_2 в этих слоях.

Решение

Напряженность электрического поля внутри цилиндрического конденсатора $E = \frac{U}{x\ln(R/r)}$ (см. задачу 9.92). Падение потенциала в первом слое $U_1 = -\int\limits_{r+d_1}^{r} E\,dx = -\int\limits_{r+d_1}^{r} \frac{U_0}{x\ln(R/r)}dx = \frac{U_0 \ln[(r+d_1)/r]}{\ln(R/r)}$. Аналогично падение потенциала во втором слое $U_2 = \frac{U_0 \ln[R/(r+d_1)]}{\ln(R/r)}$. Отсюда $\frac{U_1}{U_2} = \frac{\ln[(r+d_1)/r]}{\ln[R/(r+d_1)]} = 1{,}35$.

9.95 При поучении фотоэлектрических явлений используется сферический конденсатор, состоящий из металлического шарика диаметром d = 1.5 см (катода) и внутренней поверхности посеребренной изнутри сферической колбы диаметром D = 11 см (анода). Воздух из колбы откачивается. Найти емкость C такого конденсатора.

Решение

Потенциал внутреннего шарика равен $\varphi_1 = \frac{2q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 d}$. Потенциал внешней сферы равен $\varphi_2 = \frac{2q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 D}$. Отсюда разность потенциалов $\Delta\varphi = \frac{2q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\left(\frac{1}{d} - \frac{1}{D}\right)$. Емкость конденсатора $C = \frac{q}{\Delta\varphi} = \frac{2\pi\varepsilon\varepsilon_0 dD}{D-d}$. Подставляя числовые данные, получим $C = 0{,}96$ пФ.

9.96 Каким будет потенциал φ шара радиусом r = 3 см, если а) сообщить ему заряд q = 1 нКл. б) окружить его концентрическим шаром радиусом R = 4 см, соединенным с землей?

Решение

а) Потенциал шара $\varphi = \frac{q}{C} = \frac{q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r}$; $\varphi = 300$ В. б) На заземленной сфере в результате взаимодействия электрического поля заряженного шара индуцируется заряд, равный по величине и противоположный по знаку заряду шара, т. е. $q = -4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r\varphi$, потенциал шара станет равным $\varphi' = \varphi + \frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\frac{q}{R}$ или $\varphi' = \varphi + \frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\frac{-4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r\varphi}{R} = \varphi\left(1 - \frac{r}{R}\right)$; $\varphi = 7{,}5$ В.

9.97 Найти емкость *C* сферического конденсата состоящего из двух концентрических сфер с радиусами $r = 10$ см и $R = 10{,}5$ см. Пространство между сферами заполнено маслом. Какой радиус R_0 должен иметь шар, помещенный в масло, чтобы иметь такую же емкость?

Решение

Емкость сферического конденсатора $C = \frac{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 rR}{R - r}$. Диэлектрическая проницаемость масла $\varepsilon = 5$. Подставляя числовые данные, получим $C = 1{,}17 \cdot 10^{-9}$ Ф. Емкость шара $C = 4\pi\varepsilon\varepsilon_0 R_0$, отсюда $R_0 = \frac{C}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0} = 2{,}1$ м.

9.98 Радиус внутреннего шара воздушного сферического конденсатора $r = 1$ см, радиус внешнего шара $R = 4$ см. Между шарами приложена разность потенциалов $U = 3$ к*B*. Найти напряженность *E* электрического поля на расстоянии $x = 3$ см от центра шаров.

Решение

Напряженность в заданной точке создается только внутренним шаром и равна $E = \frac{q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 x^2}$. Заряд q найдем из соотношения $C = \frac{4\pi\varepsilon_r\varepsilon_0 rR}{R - r} = \frac{q}{U}$, откуда $q = \frac{4\pi\varepsilon_r\varepsilon_0 RU}{R - r}$.

Тогда $E = \frac{rRU}{(R - r)x^2} = 44{,}5$ кВ/м.

9.99 Радиус внутреннего шара вакуумного сферического конденсатора $r = 1$ см, радиус внешнею шара $R = 4$ см. Между шарами приложена разность потенциалов $U = 3$ кВ. Какую скорость v получит электрон, приблизившись к центру шаров с расстояния $x_1 = 3$ см до расстояния $x_2 = 2$ см?

Решение

За счет работы A сил электрического поля электрон приобрел кинетическую энергию, т. е. $A = \frac{mv^2}{2}$. Имеем $A = edU = -eEdx$. Т. к. $E = \frac{rRU}{(R-r)x^2}$ (см. задачу 9.98), то

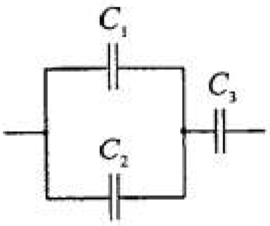
$$A = -\int_{x_1}^{x_2} \frac{erRU}{(R-r)x^2}dx = -\frac{erRU}{R-r}\int_{x_1}^{x_2}\frac{dx}{x^2}; \qquad A = \frac{erRU}{R-r}\left(\frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1}\right) =$$

$$= \frac{eUrR(x_1 - x_2)}{(R-r)x_1x_2}.$$ Тогда $\frac{mv^2}{2} = \frac{eErR(x_1 - x_2)}{(R-r)x_1x_2}$, откуда

$$v = \sqrt{\frac{2eUrR(x_1 - x_2)}{m(R-r)x_1x_2}} = 1{,}54 \cdot 10^7 \text{ м/с}.$$

9.100 Найти емкость C системы конденсаторов, изображенной на рисунке. Емкость каждого конденсатора $C_i = 0{,}5$ мкФ.

Решение



Емкость параллельного участка $C_{12} = C_1 + C_2$. Емкость всей системы конденсаторов найдем из соотношения $\frac{1}{C} = \frac{1}{C_{12}} + \frac{1}{C_3}$ или $\frac{1}{C} = \frac{C_3 + C_1 + C_2}{(C_1 + C_2)C_3}$. Отсюда $C = \frac{C_3(C_1 + C_2)}{C_1 + C_2 + C_3}$. Поскольку $C_1 = C_2 = C_3 = C_i$, то $C = \frac{2}{3}C_i = 0{,}33$ мкФ.

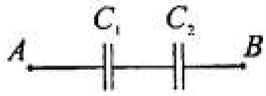
9.101 При помощи электрометра сравнивали между собой емкости двух конденсаторов. Для этого заряжали их до разностей потенциалов $U_1 = 300$ В и $U_1 = 100$ В и соединяли оба конденсатора параллельно. Измеренная при этом электрометром разность потенциалов между обкладками конденсатора оказалась $U = 250$ В. Найти отношение емкостей C_1/C_2.

Решение

Заряд на обкладках первого конденсатора $q_1 = C_1U_1$. Заряд на обкладках второго конденсатора $q_2 = C_2U_2$. После соединения конденсаторов $q_1 + q_2 = CU$, где $C = C_1 - C_2$. Отсюда $(C_1 + C_2)U = C_1U_1 + C_2U_2$. После несложных преобразований получим $\frac{C_1}{C_2} = \frac{U - U_2}{U_1 - U} = 3$.

9.102 Разность потенциалов между точками A и B $U = 6$ B. Емкость первого конденсатора $C_1 = 2$ мкФ и емкость второго конденсатора $C_1 = 4$ мкФ. Найти заряды q_1 и q_2 и разность U_1 и U_2 на обкладках каждого конденсатора.

Решение



При последовательном соединении на всех пластинах конденсатора будет одинаковый по модулю заряд, т. е. $q_1 = q_2$. При этом $q_1 = C_1U_1$, а $q_2 = C_2U_2$. Отсюда $C_1U_1 = C_2U_2$. Падение напряжения на участке AB равно $U = U_1 + U_2$, отсюда $U_1 = U - U_2$. Тогда $C_1(U - U_2) = C_2U_2$, откуда $U_2 = \frac{C_1U}{C_2 + C_1} = 2$ В; $U_1 = U - U_2 = 4$ В; $q_1 = q_2 = C_1U_1 = 8$ мкКл.

9.103 В каких пределах может меняться емкость C системы, состоящей из двух конденсаторов, если емкость одного из конденсаторов постоянна и равна $C_1 = 3{,}33$ нФ, а емкость C_2 другого изменяется от 22,2 до 555,5 пФ?

Решение

При параллельном соединении конденсаторов емкость системы равна $C = C_1 + C_2$ и изменяется от $C = 3{,}33 \times 10^{-9} + 22{,}2 \cdot 10^{-12} = 3{,}35 \cdot 10^{-9}$ Ф до $C = 3{,}33 \cdot 10^{-9} + 555{,}5 \times 10^{-12} = 3{,}89 \cdot 10^{-9}$ Ф. При последовательном соединении конденсаторов емкость системы $C = \frac{C_1C_2}{C_1 + C_2}$ и изменяется

от $C = \frac{3{,}33 \cdot 10^{-9} \cdot 22{,}2 \cdot 10^{-12}}{3{,}35 \cdot 10^{-9}} = 22 \cdot 10^{-12}$ Ф до

$C = \frac{3{,}33 \cdot 10^{-9} \cdot 555{,}5 \cdot 10^{-12}}{3{,}89 \cdot 10^{-9}} = 475{,}5 \cdot 10^{-12}$ Ф.

9.104 В каких пределах может изменяться емкость C системы состоящей из двух конденсаторов переменной емкости, емкость C_i каждого из них изменяется от 10 до 450 пФ?

Решение

При последовательном соединении емкость системы конденсаторов равна $C = \frac{C_{i1}C_{i2}}{C_{i1}+C_{i2}}$. Подставляя граничные значения, получим, что емкость C системы меняется в пределах от 20 пФ до 900 пФ. При параллельном соединении емкость системы $C = C_1 + C_2$. Подставляя граничные значения, найдем, что емкость C системы меняется от 5пФ до 225пФ.

9.105 Конденсатор емкостью C = 20 мкФ заряжен до разности потенциалов U = 100 B. Найти энергию W этого конденсатора.

Решение

Энергия заряженного конденсатора $W = \frac{CU^2}{2}$; $W = 0.1$ Дж.

9.106 Шар радиусом R_1 = 1 м заряжен до потенциала φ - 30 кВ. Найти энергию W заряженного шара.

Решение

Энергия заряженного шара $W = \frac{CU^2}{2}$, где емкость шара $C = 4\pi\varepsilon\varepsilon_0 R$. Тогда $W = \frac{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 RU^2}{2} = 2\pi\varepsilon\varepsilon_0 RU^2$; $W = 0.05$ Дж.

9.107 Шар, погруженный в керосин, имеет потенциал φ = 4.5 кВ и поверхностную плотность заряда σ = 11,3 мкКл/м^2. Найти радиус R, заряд q, емкость C и энергию W шара.

Решение

Будем считать, что весь заряд шара равномерно распределен по поверхности и задана поверхностная плотность свободных зарядов. Потенциал шара φ и его заряд q связаны соотношением $q = C\varphi$ — (1), где $q = \sigma S$ — (2); $C = 4\times$ $\times\pi\varepsilon_0\varepsilon R$ — (3). Площадь поверхности шара $S = 4\pi R^2$ — (4). Подставляя (2) — (4) в (1), получим $\sigma R = \varepsilon\varepsilon_0\varphi$, откуда $R = \frac{\varepsilon\varepsilon_0\varphi}{\sigma} = 7$ мм. Из (2) $q = 4\pi R^2\sigma = 7$ нКл. Из (1) $C = \frac{q}{\varphi} = 1{,}55$ пФ. Энергия заряженного шара $W = \frac{q^2}{2C} =$ $= 15{,}8$ мкДж.

9.108 Шар радиусом R_1 = 10 см, заряженный до потенциала φ = 3 кВ, после отключения от источника напряжения соединяется проволочкой (емкостью которой можно пренебречь) сначала с удаленным незаряженным шаром 2, а затем после отсоединения от шара 2 с удаленным незаряженным шаром 3. Шары 2 и 3 имеют радиусы $R_2 = R_3$ = 10 см. Найти: а) первоначальную энергию W_1 шара 1; б) энергию W_1' и W_1' шаром 1 и 2 после соединения и работу A разряда при соединении; в) энергии W_1' и W_3' шаров 1 и 3 после соединения и работу A разряда при соединении.

Решение

Пусть $R_1 = R_2 = R_3 = R$. Первоначальная энергия шара 1 $W_1 = \frac{q_1^2}{2C}$ — (1). Заряд шара q и его емкость C связаны соотношением $C = \frac{q}{\varphi}$ — (2), где φ — потенциал шара. Из (2) $q_1 = C\varphi$, подставляя это выражение в (1), получим $W_1 = \frac{C\varphi_1^2}{2}$. Емкость шара $C = 4\pi\varepsilon\varepsilon_0 R$, тогда $W_1 = 2\pi\varepsilon\varepsilon_0 \times R\varphi_1^2$; $W_1 = 50$ мкДж. После соединения шаров 1 и 2 проволокой перетекание заряда происходит до тех пор, пока потенциалы шаров не станут равны, т. е. $\varphi_2' = \varphi_2'$ — (3). По закону сохранения зарядов для изолированной системы имеем: $q_1 = q_1' + q_2'$ — (4), где q_1' и q_2' — заряды шаров 1 и 2 после соединения. Т. к. по условию шары находятся на большом расстоянии друг от друга, потенциал каждого из шаров определяется только зарядом самого шара, влиянием поля второго шара можно пренебречь. $\varphi_1' = \frac{q_1'}{4\pi\varepsilon_0 R}$; $\varphi_2' = \frac{q_2'}{4\pi\varepsilon_0 R}$ — (5), отсюда следует, что $q_1' = q_2'$. Поскольку емкость и потенциал шаров 1 и 2 после соединения одинаковы, то $W_1' = W_2'$. Из уравнений (3) — (5) следует, что $\varphi_1' = \frac{\varphi_1}{2}$. Тогда $W_1' = W_2' = \ = \frac{C\varphi_1^2}{8} = \frac{W_1}{4}$; $W_1' = W_2' = 12{,}5$ мкДж. Работа разряда A равна разности энергий $A = W_1 - (W_1' + W_2') = \frac{W_1}{2}$; $A = 25$ мкДж. Если теперь соединить шар 1 и шар 3, то аналогично $W_1'' = W_3' = \frac{W_1'}{4} = 3{,}125$ мкДж; $A = \frac{W_1'}{2} = 6{,}25$ мкДж.

9.109 Два металлических шарика, первый с зарядом $q_1 = 10$ нКл и радиксом $R_1 = 3$ см и второй с потенциалом $\varphi = 9$ кВ и радиусом $R_2 = 2$ см, соединены проволочкой, емкостью которой можно пренебречь. Найти: а) потенциал φ_1 первого шарика до разряда; б) заряд q_2 второго шарика до разряда; в) энергии W_1 и W_2 каждого шарика до разряда; г) заряд q_1' и φ_1' первого шарика после разряда; д) заряд q_2' и φ_2' второго шарика после разряда; е) энергию W, соединенных проводом шаров; ж) работу A разряда.

Решение

Потенциал первого шарика до разряда $\varphi_1 = \frac{q_1}{C} = \frac{q_1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 R_1} = 3$ кВ. Заряд второго шарика до разряда $q_2 = C_2\varphi_2 = 4\pi\varepsilon\varepsilon_0 R_2\varphi_2$; $q_2 = 20$ нКл. Энергия первого шарика до разряда $W_1 = 2\pi\varepsilon\varepsilon_0 R_1\varphi_1^2 = 15$ мкДж. Энергия второго шарика до разряда $W_2 = 2\pi\varepsilon\varepsilon_0 R_2\varphi_2^2 = 90$ мкДж (см. задачу 9.108). После соединения шариков $\varphi_1' = \varphi_2'$. По закону сохранения заряда $q_1 + q_2 = q_1' + q_2'$ — (1). Имеем $\varphi_1' = \frac{q_1'}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 R_1}$; $\varphi_2' = \frac{q_2'}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 R_2}$. Т. к. $\varphi_1' = \varphi_2'$, то $\frac{q_1'}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 R_1} = \frac{q_2'}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 R_2}$ или с учетом (1) получим $\frac{q_1'}{R_1} = \frac{q_1 + q_2 - q_1'}{R_2}$, откуда $q_1' = \frac{q_1 + q_2}{1 + R_2 / R_1} = 18$ нКл. Тогда $q_2' = q_1 + q_2 - q_1' = 12$ нКл. Потенциалы шариков после разряда $\varphi_1' = \varphi_2' = \frac{q_1'}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 R_1} = 5{,}4$ кВ. Энергия W соединенных шариков равна сумме энергий каждого шарика в отдельности после разряда. Т. е. $W = W_1' + W_2'$, где $W_1' = \frac{(q_1')^2}{8C_1} = \frac{(q_1')^2}{8\pi\varepsilon\varepsilon_0 R_1}$; $W_2' = \frac{(q_2')^2}{8\pi\varepsilon\varepsilon_0 R_2}$.

Следовательно. $W = \frac{1}{8\pi\varepsilon\varepsilon_0}\left(\frac{(q_1')^2}{R_1} + \frac{(q_2')^2}{R_2}\right)$; $W = 81$ мкДж.

Работа разряда A равна разности энергий до и после разряда, т. е. $A = (W_1 + W_2) - W = 24$ мкДж.

9.110 Заряженный шар 1 радиусом R_1 = 2 см приводится в соприкосновение с не заряженным шаром 2, радиус которого R_2 = 3 см. После того как шары разъединили, энергия шара 2 оказалась равной W_2= 0.4 Дж. Какой заряд q_1 был на шаре 1 до соприкосновения с шаром 2?

Решение

По закону сохранения заряда $q_1 = q_1' + q_2'$ — (1), где q_1' и q_2' — заряды шаров 1 и 2 после соприкосновения. Кроме того, потенциалы шаров будут равны, т. е. $\varphi_1 = \varphi_2$ или $\frac{q_1'}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 R_1} = \frac{q_2'}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 R_2}$, откуда $q_1' R_2 = q_2' R_1$ — (2). По условию $W_2 = \frac{(q_2')^2}{8\pi\varepsilon\varepsilon_0 R_2} = 0{,}4$ Дж, откуда $q_2' = \sqrt{8\pi\varepsilon\varepsilon_0 R_2 W_2} = 1{,}64\cdot 10^{-6}$ Кл. Подставляя полученное значение в (2), найдем $q_1' = \frac{q_2' R_1}{R_2} = 1{,}1\cdot 10^{-6}$ Кл. Тогда из (1) получим $q_1 = (1{,}6 + 1{,}1)\cdot 10^{-6} = 2{,}7\cdot 10^{-6}$ Кл.

9.111 Пластины плоского конденсатора площадью S = 0,01 м^2 каждая притягиваются друг к другу с силой F = 30 мН. Пространство между пластинами заполнено слюдой. Найти заряды , находящиеся на пластинах, напряженность E поля между пластинами и объемную плотность энергии W_0 поля.

Решение

Диэлектрическая проницаемость слюды $\varepsilon = 6$. Сила притяжения между пластинами плоского конденсатора $F = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon E^2 S}{2}$, откуда $E = \sqrt{\frac{2F}{\varepsilon_0 \varepsilon S}} = 336$ кВ/м. Силу F можно выразить иначе: $F = \frac{\sigma^2 S}{2\varepsilon_0 \varepsilon}$, где $\sigma = \frac{q}{S}$. Т. е. $F = \frac{q^2}{2\varepsilon\varepsilon_0 S}$, откуда $q = \sqrt{2F\varepsilon\varepsilon_0 S} = 178$ нКл. Объемная плотность энергии $W_0 = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 E^2}{2} = 3$ Дж/м^2.

9.112 Между пластинами плоского конденсатора вложена плоская слюдяная пластинка. Какое давление p испытывает эта пластинка при напряженности электрического поля E = 1 MB/м?

Решение

Пластинка испытывает давление $p = \frac{F}{S}$, где F — сила притяжения между пластинами конденсатора, $F = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 E^2 S}{2}$.

Отсюда $p = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 E^2}{2} = 26{,}5$ Па.

9.113 Абсолютный электрометр представляет собой плоский конденсатор, нижняя пластина которого неподвижна, а верхняя повешена к коромыслу весов. При незаряженном конденсаторе расстояние между пластинами d = 1см. Какую разность потейциалов U приложили между пластинами, если для сохранения того же расстояния d = 1 см на другую чашку весов пришлось положить груз массой m = 5,1 г? Площадь пластин конденсатора S = 50 см^2.

Решение

На верхнюю пластину электрометра действуют две силы: сила притяжения между пластинами $\vec{F}$, направленная вниз, и сила натяжения $\vec{T}$ нити коромысла весов, направленная вверх, равная по абсолютной величине весу груза $\vec{P}$, где $\vec{P} = m\vec{g}$. Запишем условие равновесия: $\vec{F} = \vec{T}$ или $F = mg$. Силу притяжения между пластинами можно выразить следующим образом: $F = \dfrac{\varepsilon\varepsilon_0 SU^2}{2d^2}$. Тогда $\dfrac{\varepsilon\varepsilon_0 SU^2}{2d^2} = mg$, откуда $U = \sqrt{\dfrac{2d^2 mg}{\varepsilon\varepsilon_0 S}} = 15$ кВ.

9.114 Разность потенциалов между пластинами плоского конденсатора C = 280 В. Площадь пластин конденсатора S = 0,01 м^2; поверхностная плотность заряда на пластинах σ = 495 нКл/м^2. Найти: а) напряженность E поля внутри конденсатора; б) расстояние d между пластинами; в) скорость v, которую получит электрон, пройдя в конденсаторе путь от одной пластины до другой; г) энергию W конденсатора; д) емкость C конденсатора; е) силу притяжения F пластин конденсатора.

Решение

Напряженность поля конденсатора $E = \dfrac{\sigma}{\varepsilon\varepsilon_0} = 56$ кВ/м. С другой стороны, $E = \dfrac{U}{d}$, отсюда $d = \dfrac{U}{E} = 5$ мм. За счет работы сил электрического поля электрону будет сообщена кинетическая энергия $W_к = A$, т. е. $\dfrac{mv^2}{2} = eU$, откуда найдем $v = \sqrt{\dfrac{2eU}{m}} = 10^7$ м/с. Энергия плоского конденсатора $W = \dfrac{\sigma^2 Sd}{2\varepsilon\varepsilon_0} = 692$ нДж. Емкость плоского конденсатора $C = \dfrac{\varepsilon\varepsilon_0 S}{d} = 1,77$ пФ. Сила притяжения пластин конденсатора $F = 138$ мкН.

9.115 Площадь пластин плоского воздушного конденсатора $S = 0{,}01$ м^2, расстояние между ними $d = 5$ мм. Какая разность потенциалов U была приложена к пластинам конденсатора если известно, что при разряде конденсатора выделилось $Q = 4.19$ мДж тепла?

Решение

Заряженный конденсатор обладает энергией $W = \dfrac{\varepsilon\varepsilon_0 S U^2}{2d}$. При разрядкс конденсатора эта энергия выделяется в виде тепла. Следовательно, $Q = \dfrac{\varepsilon\varepsilon_0 S U^2}{2d}$, откуда $U = \sqrt{\dfrac{2dQ}{\varepsilon\varepsilon_0 S}} =$ $= 21{,}7$ кВ.

9.116 Площадь пластин плоского воздушного конденсатора $S = 0{,}01$ м^2, расстояние между ними $d = 5$ мм. К пластинам конденсатора приложена разность потенциалов $U = 3$ кВ. Какова будет напряженность E поля конденсатора, если, не отключая его от источника напряжения, пластины раздвинуть до расстояния $d_2 = 5$ см? Найти энергии W_1 и W_2 конденсатора до после раздвижения пластин.

Решение

Поскольку конденсатор постоянно подключен к источнику, то напряжение на нем не изменяется. Напряженность поля конденсатора при раздвинутых пластинах $E = \dfrac{U}{d_2}$; $E = 60$ кВ/м. Емкость плоского конденсатора $C = \dfrac{\varepsilon\varepsilon_0 S}{d}$ — (1). При увеличении расстояния между пластинами емкость уменьшается. Из формулы $W = \dfrac{CU^2}{2}$ — (2), выражающей энергию W конденсатора через его емкость и напряжение, следует, что энергия конденсатора также уменьшится. Из (1) и (2) следует, что энергия конденсатора до раздвижения пластин $W_1 = \dfrac{\varepsilon\varepsilon_0 S U^2}{2d_2} = 20$ мкДж. Энергия конденсатора после раздвижения пластин $W_2 = \dfrac{\varepsilon\varepsilon_0 S U^2}{2d_2} = 8$ мкДж.

9.117 Площадь пластин плоского воздушного конденсатора S = 0,01 м^2, расстояние между ними d = 5 мм. К пластинам конденсатора приложена разность потенциалов U = 3 кВ. Какова будет напряженность E поля конденсатора, если, сначала конденсатор отключается от источника напряжения, а затем раздвигаются пластины конденсатора до расстояния d_2 = 5 см? Найти энергии W_1 и W_2 конденсатора до после раздвижения пластин.

Решение

Поскольку конденсатор отключили от источника напряжения, то заряд на его пластинах, а также плотность заряда σ останутся неизменными. Напряженность поля конденсатора $E = \frac{\sigma}{2\varepsilon\varepsilon_0}$. Как видно из формулы, напряженность при $\sigma = const$ не зависит от расстояния между пластинами, следовательно, после раздвижения пластин напряженность не изменится и ее можно найти по формуле $E = \frac{U}{d_1}$, т. е. $E_1 = E_2 = 150$ кВ/м. Энергия заряженного конденсатора выражается через заряд и емкость формулой $W = \frac{q^2}{2C}$. Емкость плоского конденсатора $C = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 S}{d}$. Заряд конденсатора равен $q = C_1 U$. Тогда энергия конденсатора до раздвижения пластин $W_1 = \frac{C_1 U^2}{2} = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 S U^2}{2d_1}$; $W_1 = 20$ мкДж. Энергия конденсатора после раздвижения пластин $W_2 = \frac{C_1^2 U^2}{2C_2} = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 S U^2 d_2}{2d_1}$; $W_2 = 50$ мкДж.

9.118 Площадь пластин плоского воздушного конденсатора S = 0,01 м^2 ,расстояние между ними d_1 = 1 мм. К пластинам конденсатора приложена разность потенциалов U = 0,1 кВ. Пластины раздвигаются до расстояния d_2 = 25 мм. Найти энергии W_1 и W_2 конденсатора до и после раздвижения пластин, если источник напряжения перед раздвижением: а) не отключается; б) отключается.

Решение

а) Энергия конденсатора до раздвижения пластин $W_1 = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 S U^2}{2d_2} = 443$ мкДж. Энергия конденсатора после раздвижения пластин $W_2 = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 S U^2}{2d_2} = 17{,}8$ мкДж (см. задачу 9.116). б) Энергия конденсатора до раздвижения пластин $W_1 = \frac{C_1 U^2}{2} = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 S U^2}{2d_1}$; $W_1 = 443$ мкДж. Энергия конденсатора после раздвижения пластин $W_2 = \frac{C_1^2 U^2}{2C_2} = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 S U^2 d_2}{2d_1}$; $W_2 = 11{,}1$ мкДж (см. задачу 9.117).

9.119 Плоский конденсатор заполнен диэлектриком и на его пластины подана некоторая разность потенциалов. Его энергия при этом W = 20мкДж. После того как конденсатор отключили от источника напряжения, диэлектрик вынули из конденсатора. Работа, которую надо было совершить против сил электри¬ческого поля, чтобы вынуть диэлектрик, A =70 мкДж. Найти Диэлектрическую проницаемость ε диэлектрика.

Решение

Энергия конденсатора, заполненного диэлектриком, $W_1 = \frac{C_1U_1^2}{2}$. После удаления диэлектрика емкость конденсатора уменьшилась в ε раз и стала равной $C_2 = \frac{C_1}{\varepsilon}$. Т. к. заряд конденсатора остался прежним, то разность потенциалов в силу связи $q = CU$ увеличилась в ε раз: $U_2 = \varepsilon U_1$. Энергия конденсатора после удаления диэлектрика $W_2 = \frac{C_1U_1^2\varepsilon^2}{2\varepsilon} = W_1\varepsilon$. Работа, совершенная против сил кулоновского притяжения, равна $A = W_2 - W_1 = W_1(\varepsilon - 1)$, отсюда $\varepsilon = \frac{A}{W_1} + 1$; $\varepsilon = 4{,}5$.

9.120 Площадь пластин плоского воздушного конденсатора S = 12,5 $с$м^2, расстояние между ними d_1 = 5 мм. К пластинам конденсатора приложена разность потенциалов U = 6 кВ. Пластины конденсатора раздвигаются до расстояния d_2 = 1 см. Найти изменение емкости конденсатора ΔC, потока напряженности ΔN_E сквозь площадь электродов и объемной платности энергии ΔW_0 электрического поля, если источник напряжения перед раздвижением: а) не отключается; б) отключается.

Решение

а) Если источник напряжения отключается, то разность потенциалов между пластинами конденсатора остается постоянной. Емкость конденсатора $C = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 S}{d}$, отсюда изменение емкости $\Delta C = \varepsilon\varepsilon_0 S\left(\frac{1}{d_1} - \frac{1}{d_2}\right)$; $\Delta C = 1{,}1$ Пф. По теореме Гаусса поток напряженности сквозь любую замкнутую поверхность $N_E = \frac{1}{\varepsilon\varepsilon_0}\sum q_i$, в нашем случае $N_E = \frac{q}{\varepsilon\varepsilon_0}$, а изменение потока напряженности $\Delta N_E = \frac{1}{\varepsilon\varepsilon_0}(q_1 - q_2)$. Поскольку $q_1 = C_1U = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 SU}{d_1}$, а

$q_2 = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 SU}{d_2}$, то $\Delta N_E = SU\left(\frac{1}{d_1} - \frac{1}{d_2}\right)$; $\Delta N_E = 750$ В·м.

Объемная плотность энергии $W_0 = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 E^2}{2}$, где $E = \frac{U}{d}$. Отсюда $\Delta W_0 = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 U^2}{2}\left(\frac{1}{d_1^2} - \frac{1}{d_2^2}\right)$; $\Delta W_0 = 48$ МДж/м^3.

б) Если конденсатор перед раздвижением отключается от источника напряжения, то заряд на пластинах конденсатора остается постоянным. Емкость, как и в случае «а», уменьшится на величину $\Delta C = 1{,}1$ пФ. Поток напряженности не изменится, т. к. $q_1 = q_2$, т. е. $\Delta N_E = 0$. При $q = const$ напряженность $E = \frac{\sigma}{\varepsilon\varepsilon_0} = const$, т. е. объемная плотность энергии тоже не изменится, $\Delta W_0 = 0$.

9.121 Найти объемную плотность энергии W_0 электрического поля в точке, находящейся: а) на расстоянии $x = 2$ см от поверхности заряженного шара радиусом $R = 1$ см, б) вблизи бесконечно протяженной заряженной плоскости, в) на расстоянии $x = 2$ см от бесконечно длинной заряженной нити. Поверхностная плотность заряда на шаре и плоскость $\sigma = 16{,}7$ мкКл/м^2, линейная плотность заряда на нити ,$\tau = 167$ нКл/м. Диэлектрическая проницаемость среды $\varepsilon = 2$.

Решение

Объемная плотность энергии $W_0 = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 E^2}{2}$. а) Напряженность поля на расстоянии x от поверхности заряженного шара $E = \frac{q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 (R+x)^2}$, где $q = \sigma \cdot 4\pi R^2$. Тогда $W_0 = \frac{\sigma^2 R^4}{2\varepsilon\varepsilon_0 (R+x)^4}$; $W_0 = 97$ МДж/м^3. б) Напряженность поля бесконечной заряженной плоскости $E = \frac{\sigma}{2\varepsilon\varepsilon_0}$, тогда $W_0 = \frac{\sigma^2}{8\varepsilon\varepsilon_0}$; $W_0 = 1{,}97$ Дж/м^3. в) Напряженность поля бесконечной заряженной нити $E = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon\varepsilon_0 x}$, тогда $W_0 = \frac{\tau^2}{8\pi^2 \varepsilon\varepsilon_0 x^2}$; $W_0 = 50$ МДж/м^3.

9.122 На пластины плоского конденсатора, расстояние между которыми d = 3 см, подана разность потенциалов U = 1 кВ. Пространство между пластинами заполняется диэлектриком (ε = 1). Найти поверхностную плотность связанных (поляризационных) зарядов $\sigma_{св}$. Насколько изменяется поверхностная плотность заряда на пластинах при заполнении конденсатора диэлектриком? Задачу решить, если заполнение конденсатора диэлектриком производится: а) до отключения конденсатора от источника напряжения; б) после отключения конденсатора от источника напряжения.

Решение

Введем обозначения: σ_0 — поверхностная плотность заряда на пластинах конденсатора в отсутствие диэлектрика, $\sigma_д$ — поверхностная плотность заряда на пластинах в присутствии диэлектрика, $\sigma_{св}$ — поверхностная плотность связанных (поляризационных) зарядов на диэлектрике. Совместное действие зарядов $\sigma_д$ и $\sigma_{св}$ таково, как будто бы на границе раздела проводника и диэлектрика имеется заряд, распределенный с плотностью $\sigma = \sigma_д - \sigma_{св}$ — (1). Таким образом, σ — поверхностная плотность «эффективных» зарядов, т. е. зарядов, определяющих суммарное результирующее поле в диэлектрике. Очевидно, величины σ_0, $\sigma_д$ и σ связаны с соответствующими напряженностями поля следующими соотношениями: в отсутствие диэлектрика $E_1 = \dfrac{\sigma_0}{\varepsilon_0} = \dfrac{U_1}{d}$ — (2); в присутствии диэлектрика $E_2 = \dfrac{\sigma_д}{\varepsilon\varepsilon_0} = \dfrac{\sigma}{\varepsilon_0} = \dfrac{U_2}{d}$ — (3). Из (1) имеем $\sigma_{св} = \sigma_д - \sigma$ или, на основании (3), $\sigma_{св} = \varepsilon\varepsilon_0 E_2 - \varepsilon_0 E_2 = \varepsilon_0(\varepsilon - 1)E_2 = \varepsilon_0(\varepsilon - 1)\dfrac{U_2}{d}$. а) До отключения конденсатора от источника напряжения $U_1 = U_2 = U$ и $\sigma_{св} = \varepsilon_0 \times (\varepsilon - 1)\dfrac{U}{d} = 17{,}7$ мкКл/м^2. Изменение поверхностной плотности заряда при заполнении конденсатора диэлектриком $\sigma_д - \sigma_0 = \varepsilon_0(\varepsilon - 1)\dfrac{U}{d} = \sigma_{св} = 17{,}7$ мкКл/м^2. Таким образом, благодаря источнику напряжения на пластинах конденсатора появятся добавочные заряды, компенсирующие уменьшение заряда, вызванное поляризацией диэлектрика. б) После отключения конденсатора от источника напряжения $q = const$ и $U_2 = \dfrac{\varepsilon_1 U_1}{\varepsilon_2}$ (см. решение 9.87) и $\sigma_{св} = \varepsilon_0 \times (\varepsilon - 1)\dfrac{U_2}{d}\varepsilon_0(\varepsilon - 1)\dfrac{\varepsilon_1 U_1}{\varepsilon_2 d} = 2.53$ мкКл/м^2. Т. к. $q = const$, то $\sigma_{св} = \sigma_0$, т. е. поверхностная плотность заряда на пластинах конденсатора не изменяется.

9.123 Пространство между пластинами плоского конденсатора заполнено диэлектриком, диэлектрическая восприимчивость которого $\chi = 0{,}08$. Расстояние между пластинами $d = 5$ мм. На пластины конденсатора подана разность потенциалов $U = 4$ кВ. Найти поверхностную плотность связанных зарядов $\sigma_{св}$ на диэлектрике и поверхностную плотность заряда $\sigma_{д}$ на пластинах конденсатора.

Решение

Поляризованность P, численно равная поверхностной плотности связанных зарядов $\sigma_{св}$ на диэлектрике, пропорциональна напряженности поля в диэлектрике, т.е. $P = \sigma_{св} = \aleph' E$. В системе СИ диэлектрическая восприимчивость $\aleph'$ имеет размерность фарад на метр. Можно показать, что $\aleph' = 4\pi\varepsilon_0\aleph$, где $\aleph$ — безразмерная величина (табличное значение диэлектрической восприимчивости). Тогда поверхностная плотность связанных зарядов на диэлектрике $\sigma_{св} = 4\pi\varepsilon_0\aleph E = 4\pi\varepsilon_0\aleph\dfrac{U}{d} = 7{,}1$ мкКл/м². Найдем диэлектрическую проницаемость диэлектрика. Т.к. $\sigma_{св} = \varepsilon_0(\varepsilon - 1)E$ (см. задачу 9.122), то $\sigma_{св} = 4\pi\varepsilon_0\aleph E = \varepsilon_0(\varepsilon - 1)E$, откуда $\varepsilon - 1 = 4\pi\aleph$, или $\varepsilon = 1 + 4\pi\aleph = 1 + 4\pi \cdot 0{,}8 = 2$. Тогда $E = \dfrac{U}{d} = \dfrac{\sigma_д}{\varepsilon\varepsilon_0}$. Отсюда поверхностная плотность заряда на пластинах конденсатора $\sigma_д = \dfrac{U\varepsilon\varepsilon_0}{d} = 14$ мкКл/м².

9.124 Пространство между пластинами плоского конденсатора заполнено стеклом. Расстояние между пластинами $d = 4$ мм. На пластины конденсатора подана разность потенциалов $U = 1{,}2$ кВ. Найти: а) напряженность E поля в стекле; б) поверхностную плотность заряда $\sigma_{д}$ на пластинах конденсатора; поверхностную плотность связанных зарядов $\sigma_{св}$ на стекле; г) диэлектрическую восприимчивость χ стекла.

Решение

а) Напряженность поля в стекле $E = \dfrac{U}{d} = 300$ кВ/м (см. задачу 9.122). Диэлектрическая проницаемость стекла $\varepsilon = 6$.
б) Поверхностная плотность заряда на пластинах равна

$\sigma_{я} = \frac{U\varepsilon\varepsilon_0}{d} = 15{,}9$ мкКл/м^2 (см. задачу 9.123). в) Поверхностная плотность зарядов на стекле равна $\sigma_{св} = \varepsilon_0 \times \times(\varepsilon - 1)\frac{U}{d} = 13{,}3$ мкКл/м^2 (см. задачу 9.122). г) Диэлектрическая восприимчивость стекла и поверхностная плотность связанных зарядов связаны соотношением $\sigma_{св} = \frac{4\pi\varepsilon_0 \aleph U}{d}$ (см. задачу 9.123). Отсюда $\aleph = \frac{\sigma_{св} d}{4\pi\varepsilon_0 U} = 0{,}4$.

9.125 Пространство между пластинами плоского конденсатора заполнено маслом. Расстояние между пластинами $d = 1$ см. Какую разность потенциалов U надо подать на пластины конденсатора, чтобы поверхностная плотность связанных зарядов на масле была равна $\sigma_{св} = 6{,}2$ мкКл/м^2?

Решение

Имеем $\sigma_{св} = \varepsilon_0(\varepsilon - 1)\frac{U}{d}$ — (1) (см. задачу 9.122). Диэлектрическая проницаемость масла $\varepsilon = 5$. Из (1) $U = \frac{\sigma_{св} d}{\varepsilon_0(\varepsilon - 1)} = 1{,}75$ кВ.

9.126 Пространство между пластинами плоского конденсора заполнено стеклом. Площадь пластин конденсатора $S = 0{,}01$ м^2. Пластины конденсатора притягиваются друг к другу с силой $F = 4{,}9$ мН. Найти поверхностную плотность связанных зарядов $\sigma_{св}$ на стекле.

Решение

Имеем $F = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 S U^2}{2d^2}$ — (1). Поверхностная плотность зарядов на стекле равна $\sigma_{св} = \varepsilon_0(\varepsilon - 1)\frac{U}{d}$ (см. задачу 9.122).

Из (1) $\frac{U}{d} = \sqrt{\frac{2F}{\varepsilon\varepsilon_0 S}}$. Тогда $\sigma_{св} = \varepsilon_0(\varepsilon - 1)\sqrt{\frac{2F}{\varepsilon\varepsilon_0 S}}$; $\sigma_{св} = 0{,}6$ мкКл/м^2.

9.127 Пространство между пластинами плоского конденсатора заполнено парафином. При присоединении пластин к источнику напряжения давление пластин на парафин стало равным p = 5 Па. Найти: а) напряженность E электрического поля и электрическое смещение D в парафине; б) поверхностную плотность связанных зарядов $\sigma_{св}$ на парафине; в) поверхностную плотность заряда $\sigma_{св}$ на пластинах конденсатора; г)объемную плотность энергии W_0 электрического поля в парафине; д) диэлектрическую восприимчивость χ парафина.

Решение

а) Сила притяжения между пластинами плоского конденсатора $F = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 E^2 S}{2}$, откуда $E = \sqrt{\frac{2F}{\varepsilon\varepsilon_0 S}}$. Поскольку давление $p = \frac{F}{S}$, то $E = \sqrt{\frac{2p}{\varepsilon\varepsilon_0}} = 752$ кВ/м. Электрическое смещение $D = \varepsilon\varepsilon_0 E = 13{,}3$ мкКл/м^2. б) Имеем $\sigma_{св} = \varepsilon_0(\varepsilon - 1)\times \sqrt{\frac{2F}{\varepsilon\varepsilon_0 S}}$ (см. задачу 9.126). С учетом $p = \frac{F}{S}$ имеем $\sigma_{св} = \varepsilon_0(\varepsilon - 1)\sqrt{\frac{2p}{\varepsilon\varepsilon_0}} = 6{,}7$ мкКл/м^2. в) Поверхностная плотность заряда на пластинах конденсатора $\sigma_д = \varepsilon\varepsilon_0 E = D$; $\sigma_д = 13{,}3$ мкКл/м^2. г) Объемная плотность энергии $W_0 = \frac{ED}{2} = 5$ Дж/м^2. д) Имеем $\sigma_{св} = 4\pi\varepsilon_0 \aleph E$ (см. задачу 9.123), отсюда $\aleph = \frac{\sigma_{св}}{4\pi\varepsilon_0 E} = 0.08$.

9.128 Пространство между пластинами плоского конденсатора заполнено диэлектриком. Расстояние между пластинами d = 2 мм. На пластины конденсатора подана разность потенциалов U_1 = 0,6 кВ. Если, отключив источник напряжения, вынуть диэлектрик из конденсатора, то разность потенциалов на ретинах конденсатора возрастет до U_2 = 1,8 кВ. Найти поверхностную плотность связанных зарядов $\sigma_{св}$ на диэлектрике и диэлектрическую восприимчивость χ диэлектрика.

Решение

После отключения конденсатора от источника напряжения $q = const$ и $U_2 = \varepsilon U_1$ — (1). Из решения задачи 9.122 имеем $\sigma_{св} = \varepsilon_0(\varepsilon - 1)\frac{U_1}{d}$. Найдем из (1) $\varepsilon = \frac{U_2}{U_1}$. Тогда $\sigma_{св} = \varepsilon_0\left(\frac{U_2}{U_1} - 1\right)\frac{U_1}{d}$; $\sigma_{св} = 5{,}3$ мкКл/м^2. Поверхностная плотность связанных зарядов и диэлектрическая восприимчивость диэлектрика связаны соотношением $\sigma_{св} = 4\pi\varepsilon_0 \aleph \frac{U_1}{d}$. Отсюда $\aleph = \frac{d\sigma_{св}}{4\pi\varepsilon_0 U_1}$; $\aleph = 0{,}159$.

9.129 Пространство между пластинами плоского конденсатора объемом V = 20 см^3 заполнено диэлектриком (ε = 5). Пластины конденсатора присоединены к источнику напряжения. При этом поверхностная плотность связанных зарядов на диэлектрике $\sigma_{св}$ = 8,35 мкКл/м^2. Какую работу A надо совершить против сил электрического поля, чтобы удалить диэлектрик из конденсатора? Задачу решить, если удаление диэлектрика производится: а) до отключения источника напряжения; б) после отключения источника напряжения.

Решение

Работа A против сил кулоновского поля равна изменению энергии конденсатора $\Delta W = A$. а) До отключения конденсатора от источника напряжения $U_1 = U_2 = U$ и $\sigma_{св} = \varepsilon_0(\varepsilon - 1)\frac{U}{d}$ — (1) (см. задачу 9.122). Энергия конденсатора с диэлектриком $W_1 = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 SU^2}{2d} = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 V}{2}\left(\frac{U}{d}\right)^2$. Энергия конденсатора без диэлектрика $W_2 = \frac{\varepsilon_0 V}{2}\left(\frac{U}{d}\right)^2$. Отсюда $\Delta W = \frac{\varepsilon_0 V}{2}\left(\frac{U}{d}\right)^2(1-\varepsilon)$. Из (1) найдем $\frac{U}{d} = \frac{\sigma_{св}}{\varepsilon_0(1-\varepsilon)}$, или $-\frac{U}{d} = \frac{\sigma_{св}}{\varepsilon_0(1-\varepsilon)}$, тогда $\Delta W = \frac{V\sigma_{св}^2}{2\varepsilon_0(1-\varepsilon)} = -19{,}7$ мкДж, т. е. энергия конденсатора уменьшилась, следовательно, работа сил поля положительна, а работа против них отрицательна. Тогда $A = -19{,}7$ мкДж. б) Если конденсатор отключен от источника, то $q = const$ и $U_2 = \varepsilon U_1$ — (1). Энергия конденсатора с диэлектриком $W_1 = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 V}{2}\left(\frac{U_1}{d}\right)^2$. Энергия конденсатора без диэлектрика $W_2 = \frac{\varepsilon_0 V}{2}\left(\frac{U_2}{d}\right)^2$. Отсюда

$$\Delta W = \frac{\varepsilon_0 V}{2}\left(\varepsilon^2\left(\frac{U_1}{d}\right)^2 - \varepsilon^2\left(\frac{U_2}{d}\right)^2\right); \quad \Delta W = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 V}{2}\left(\frac{U_1}{d}\right)^2(\varepsilon - 1).$$

Поскольку $\sigma_{св} = \varepsilon_0(\varepsilon - 1)\frac{U_1}{d}$, откуда $\frac{U_1}{d} = \frac{\sigma_{св}}{\varepsilon_0(\varepsilon - 1)}$, то $\Delta W = \frac{\varepsilon V\sigma_{св}^2}{2\varepsilon_0(\varepsilon - 1)}$; $\Delta W = 98$ мкДж, т. е. энергия конденсатора увеличилась, следовательно, работа сил поля отрицательна, а работа против них положительна. Тогда $A = 98$ мкДж.

§ 10. Электрический ток

10.1 Ток I в проводнике меняется со временем t по уравнению $I = 4 + 2t$, где t — в амперах и t — в секундах. Какое количество электричества q проходит через поперечное сечение проводника за время от $t_1 = 2$ с до $t_2 = 6$ с? При каком постоянном токе I_0 через поперечное сечение проводника за то же время проходит такое же количество электричества?

Решение

По определению сила тока $I = \frac{dq}{dt}$, отсюда $dq = Idt$;

$q = \int_{t_1}^{t_2} Idt$; $q = \int_{t_1}^{t_2} (4+2t)dt = 4t\Big|_{t_1}^{t_2} + t^2\Big|_{t_1}^{t_2}$; $q = 4(t_2 - t_1) + t_2^2 - t_1^2$;

$q = 48$ Кл. При постоянном токе $I_0 = \frac{q}{t}$, где $t = t_2 - t_1 = 4$ с.

Подставляя числовые значения, получим $I_0 = 12$ А.

10.2 Ламповый реостат состоит из пяти электрических лампочек сопротивлением $r = 3500$ м, включенных параллельно. Найти сопротивление R реостата, когда: а) горят все лампочки; б) вывинчиваются одна, две, три, четыре лампочки.

Решение

а) Если лампочки включены параллельно, то их общее сопротивление R находится по формуле $\frac{1}{R} = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3} + \frac{1}{r_4} + \frac{1}{r_5}$. Т. к. сопротивления всех лампочек одинаковы и равны r, то $\frac{1}{R} = \frac{5}{r}$, откуда $R = \frac{r}{5}$; $R = 70$ Ом.

б) Если выкрутить одну лампочку, то $R = \frac{r}{4} = 87{,}5$ Ом; две лампочки — $R = \frac{r}{3} = 116{,}7$ Ом; три лампочки — $R = \frac{r}{2} = 175$ Ом; четыре лампочки — $R = r = 350$ Ом.

10.3 Сколько витков нихромовой проволоки диаметром $d = 1$ мм надо навить на фарфоровый цилиндр радиусом $a = 2{,}5$ см, чтобы получить печь сопротивлением $R = 40$ Ом?

Решение

Сопротивление проводника можно рассчитать по формуле $R = \rho\frac{l}{S}$ — (1), где ρ — удельное сопротивление (для нихрома $\rho = 100$ мкОм·м), l — длина проводника, S — площадь его поперечного сечения. Длина одного витка равна $2\pi a$, тогда длина всей проволоки $l = N \cdot 2\pi a$ — (2), где N — количество витков. Площадь поперечного сечения $S = \pi\frac{d^2}{4}$ — (3). Подставив (3) и (2) в (1), получим $R = \rho\frac{8Na}{d^2}$, откуда $N = \frac{Rd^2}{8\rho a}$; $N = 200$.

10.4 Катушка из медной проволоки имеет сопротивление $R = 10{,}8$ Ом. Масса медной проволоки $m = 3{,}41$ кг. Какой длины l и какого диаметра d проволока намотана на катушке?

Решение

Сопротивление катушки $R = \rho\frac{l}{S}$ — (1), где ρ — удельное сопротивление меди, l — длина проволоки, S — площадь ее поперечного сечения. Масса проволоки $m = V\rho_м$, где V — объем проволоки, $\rho_м$ — плотность меди. Поскольку $V = S \cdot l$, то $m = Sl\rho_м$, откуда $l = \frac{m}{S\rho_м}$ — (2). Подставив (2) в (1), получим $R = \rho\frac{m}{S^2\rho_м}$, отсюда $S = \sqrt{\frac{\rho m}{R\rho_м}}$ — (3). С другой стороны, $S = \pi\frac{d^2}{4}$ — (4), т. е. $\pi\frac{d^2}{4} = \sqrt{\frac{\rho m}{R\rho_м}}$, откуда $d = \sqrt[4]{\frac{16\rho m}{\pi^2 R\rho_м}}$; $d = 1$ мм. Подставив (4) в (2), получим $l = \frac{4m}{\pi d^2\rho_м}$; $l = 505$ м.

10.5 Найти сопротивление R железного стержня диаметром d = 1 см, если масса стержня m = 1 кг.

Решение

Сопротивление стержня можно определить по формуле $R=\rho\frac{l}{S}$, где ρ — удельное сопротивление железа, l — длина стержня, S — площадь его поперечного сечения. Длина стержня $l=\frac{4m}{\pi d^2\rho_ж}$ (см. задачу 10.4), где $\rho_ж$ — плотность железа. Площадь поперечного сечения $S=\pi\frac{d^2}{4}$, тогда $R=\rho\frac{16m}{\pi^2 d^4\rho_ж}$; $R=1{,}8$ мОм.

10.6 Медная и алюминиевая проволоки имеют одинаковую длину l и одинаковое сопротивление R. Во сколько раз медная проволока тяжелее алюминиевой?

Решение

Имеем: удельное сопротивление меди $\rho_м=0{,}017$ мкОм·м, удельное сопротивление алюминия $\rho_а=0{,}025$ мкОм·м; плотность меди $\rho'_м=2{,}6\cdot10^3$ кг/м^3, плотность алюминия $\rho'_а=2{,}6\cdot10^3$ кг/м^3. Сопротивление проволоки $R=\rho\frac{l}{S}$, где S — площадь поперечного сечения, $S=\frac{V}{l}=\frac{m}{\rho' l}$. Согласно условию $R=\rho_а\frac{l}{S_а}=\rho_м\frac{l}{S_м}$, откуда $\frac{\rho_а}{S_а}=\frac{\rho_м}{S_м}$ или $\frac{\rho_а\cdot\rho'_а}{m_а}=\frac{\rho_м\cdot\rho'_м}{m_м}$. Отсюда $\frac{m_м}{m_а}=\frac{\rho_м\cdot\rho'_м}{\rho_а\cdot\rho'_а}=2{,}2$.

10.7 Вольфрамовая нить электрической лампочки при t_1 = 20 °С имеет сопротивление R_1 = 35,8 Ом. Какова будет температура нити лампочки, если при включении в сеть напряжением U = 120 В по нити идет ток I = 0,33 А? Температурный коэффициент сопротивления вольфрама $\alpha=4{,}6\cdot10^{-3}$ К$^{-1}$.

Решение

Зависимость сопротивления нити от температуры выражается соотношением $R_1=R_0(1+\alpha T_1)$, где R_0 — сопротивление нити при температуре $t_0=0°$ С. Отсюда $R_0=\frac{R_1}{1+\alpha T_1}=32{,}8$ Ом. По закону Ома $I=\frac{U}{R_2}$, откуда $R_2=\frac{U}{I}=364$ Ом. Поскольку $R_2=R_0(1+\alpha T_2)$, то $T_2=\frac{R_2-R_0}{R_0\alpha}=1927$ К.

10.8 Реостат из железной проволоки, амперметр и генератор включены последовательно. При $t_0 = 0$ °С сопротивление реостата $R_0 = 120$ Ом, сопротивление амперметра $R_{A0} = 20$ Ом. Амперметр показывает ток $I_0 = 22$ мА. Какой ток I будет показывать амперметр, если реостат нагреется на $\Delta T = 50$ К? Темперный коэффициент сопротивления железа $\alpha = 6\cdot10^{-3}$ К$^{-1}$.

Решение

Запишем закон Ома для первоначального состояния цепи: $I_0 = \dfrac{U}{R_0 + R_{A0}}$ — (1). После того как реостат нагрелся, его сопротивление R_0 изменилось и стало равным R. Амперметр стал показывать ток $I = \dfrac{U}{R + R_{A0}}$ — (2). Сопротивление реостата можно найти по формуле $R = \rho\dfrac{l}{S}$ — (3). Удельное сопротивление ρ зависит от температуры следующим образом: $\rho = \rho_0(1 + \alpha\Delta T)$ — (4). В первоначальном состоянии $R_0 = \rho_0\dfrac{l}{S}$, откуда $\dfrac{l}{S} = \dfrac{R_0}{\rho_0}$ — (5). Подставив (4) и (5) в (3), получим $R = R_0(1 + \alpha\Delta T)$ — (6). Из (1) найдем $U = I_0(R_0 + R_{A0})$ — (7). Подставляя (6) и (7) в (2), найдем $I = \dfrac{I_0(R_0 + R_{A0})}{R_0(1 + \alpha\Delta T) + R_{A0}}$; $I = 17{,}5$ мА.

10.9 Обмотка катушки из медной проволоки при $t_1 = 14$ °С сопротивление $R_1 = 10$ Ом. После пропускания тока сопротивление обмотки стало равным $R_2 = 12{,}2$ 0м. До какой температуры нагрелась обмотка? Температурный коэффициент сопротивления меди $\alpha = 4{,}15\cdot10^{-3}$ К$^{-1}$.

Решение

Сопротивление катушки до нагревания $R_1 = \rho_1\dfrac{l}{S} = \rho_0(1 + \alpha t_1)\dfrac{l}{S}$ — (1). Сопротивление катушки после нагревания $R_2 = \rho_2\dfrac{l}{S} = \rho_0(1 + \alpha t_2)\dfrac{l}{S}$ — (2). Разделив (2) на (1), получим $\dfrac{R_2}{R_1} = \dfrac{1 + \alpha t_2}{1 + \alpha t_1}$, откуда $1 + \alpha t_2 = \dfrac{R_2}{R_1}(1 + \alpha t_1)$;

$t_2 = \dfrac{R_2}{R_1}\left(\dfrac{1}{\alpha} + t_1\right) - \dfrac{1}{\alpha}$; $t_2 \approx 70$° С.

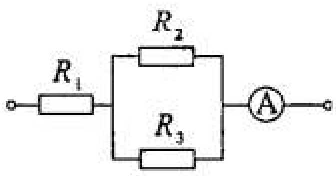
10.10 Найти падение потенциала U на медном проводе длиной $l = 500$ м и диаметром $d = 2$ мм, если ток в нем $I = 2$ А.

Решение

Ток, текущий по участку однородного проводника, подчиняется закону Ома $I = \frac{U}{R}$, где U — падение потенциала на этом участке, R — сопротивление участка. Сопротивление провода $R = \rho\frac{l}{S}$, где ρ — удельное сопротивление меди, l — длина провода, S — площадь его поперечного сечения. Т. к. $S = \pi\frac{d^2}{4}$, то $R = \rho\frac{4l}{\pi d^2}$. Из закона Ома $U = IR = I\rho\frac{4l}{\pi d^2}$. Подставив числовые значения, найдем $U = 5{,}4$ В.

10.11 Найти падения потенциала U в сопротивлениях $R_1 = 4$ Ом, $R_2 = 2$ Ом и $R_3 = 4$ Ом, если амперметр показывает ток $I_1 = 3$А. Найти токи I_2 и I_3 в сопротивлениях R_2 и R_3.

Решение



По закону Ома $I_1 = \frac{U_1}{R_1}$, откуда $U_1 = I_1R_1 = 12$ Ом. Полное сопротивление цепи $R = R_1 + R_{23}$, где $\frac{1}{R_{23}} = \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}$; $R_{23} = \frac{R_2R_3}{R_2 + R_3} = \frac{8}{6}$ Ом. Падение потенциала на всем участке цепи $U = U_1 + U_{23}$. При параллельном сопротивлении все сопротивления находятся под одной разностью потенциала, следовательно, $U_{23} = U_2 = U_3$. Согласно закону Ома $U = I_1R = I_1(R_1 + R_{23})$, тогда $U_2 = U_3 = U - U_1$; $U_2 = U_3 = I_1(R_1 + R_{23}) - U_1 = 4$ В. Сопротивление R_1 и эквивалентное сопротивление R_{23} соединены последовательно, следовательно, токи, текущие через них, равны $I_1 = I_{23}$, где $I_{23} = I_2 + I_3$, т. е. $I_1 = I_2 + I_3$. По закону Ома $I_2 = \frac{U_2}{R_2} = 2$ А, тогда $I_3 = I_1 - I_2 = 1$ А.

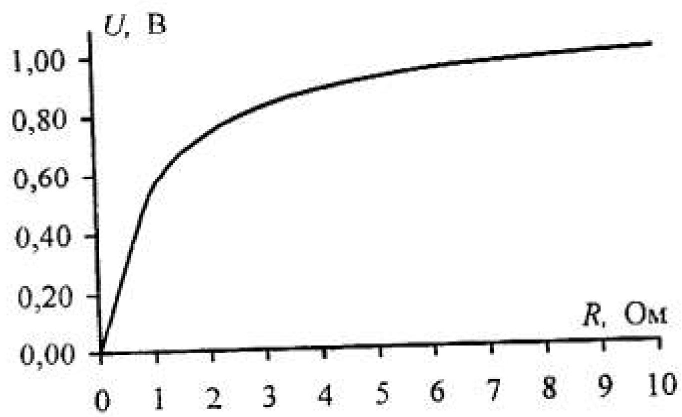
10.12 Элемент, имеющий э.д.с. ε = 1,1 В и внутреннее сопротивление r = 1 Ом, замкнут на внешнее сопротивление R = 9 Ом. Найти ток I в цепи, падение потенциала U во внешней цепи и падение потенциала U_r внутри элемента. С каким к.п.д. η работает элемент?

Решение

Согласно закону Ома для замкнутой цепи $I = \dfrac{\varepsilon}{R+r}$; $I = 0{,}11$ А. Согласно закону Ома для однородного участка цепи $I = \dfrac{U}{R}$, откуда $U = IR = 0{,}99$ В. Кроме того, $I = \dfrac{U_r}{r}$, откуда $U_r = I \cdot r = 0{,}11$ В. К.п.д. источника тока равен отношению мощности P_1, выделяемой внешним участком цепи (полезной мощности), к полной мощности P, развиваемой источником: $\eta = \dfrac{P_1}{P}$, где $P_1 = I^2 R$; $P = \varepsilon I$. Тогда к.п.д. источника $\eta = \dfrac{IR}{\varepsilon}$; $\eta = 0{,}9$.

10.13 Построить график зависимости падения потенциала U во внешней цепи от внешнего сопротивления R для цепи предыдущей задачи. Сопротивление R взять в пределах $0 \le R \le 10$ Ом через каждые 2 Ом.

Решение



Имеем $U = IR$, где согласно закону Ома для замкнутой цепи $I = \dfrac{\varepsilon}{R+r}$. Тогда $U = \dfrac{\varepsilon}{R+r} R = \dfrac{1{,}1}{1+R} R$. Для заданного интервала значений R составим таблицу и построим график. На графике видно, что кривая асимптотически приближается к прямой $U = \varepsilon = 1{,}1$ В.

R, Ом	0,00	2,00	4,00	6,00	8,00	10.00
U, В	0,00	0,73	0,88	0,94	0,98	1,00

10.14 Элемент с э.д.с. $\varepsilon = 2$ В имеет внутреннее сопротивление $r = 0{,}5$ Ом. Найти падение потенциала U_r внутри элемента при токе в цепи $I = 0{,}25$ А. Каково внешнее сопротивление цепи R при этих условиях?

Решение

Падение потенциала внутри элемента $U_r = I \cdot r = 0{,}125$ В (см. задачу 10.12). Согласно закону Ома для замкнутой цепи сила тока $I = \frac{\varepsilon}{R + r}$, откуда $R = \frac{\varepsilon}{I} - r$; $R = 7{,}5$ Ом.

10.15 Элемент с э.д.с. $\varepsilon = 1{,}6$ В имеет внутреннее сопротивление $r = 0{,}5$ Ом. Найти к.п.д. η элемента при токе в цепи $I = 2{,}4$ А.

Решение

К.п.д. элемента $\eta = \frac{IR}{\varepsilon}$ (см. задачу 10.12). По закону Ома для замкнутой цепи $I = \frac{\varepsilon}{R + r}$, откуда $R = \frac{\varepsilon - I \cdot r}{I}$. Тогда $\eta = \frac{\varepsilon - Ir}{\varepsilon} = 25\%$.

10.16 Э.д.с. элемента $\varepsilon = 6$ В. При внешнем сопротивлении $R = 1{,}1$ Ом ток в цепи $I = 3$ А. Найти падение потенциала U_r внутри элемента и его сопротивление r.

Решение

Согласно второму закону Кирхгоффа $U_r + IR = \varepsilon$, откуда $U_r = \varepsilon - IR$; $U_r = \varepsilon - IR = 2{,}7$ В. По закону Ома для участка цепи $I = \frac{U_r}{r}$, откуда $r = IU_r = 0{,}9$ Ом.

10.17 Какую долю э.д.с. элемента ε составляет разность потенциалов U на его зажимах, если сопротивление элемента r в n раз меньше внешнего сопротивления R? Задачу решить для: а) $n = 0{,}1$; б) $n = 1$; в) $n = 10$.

Решение

Согласно закону Ома сила тока $I = \frac{U}{R} = \frac{\varepsilon}{R + r}$. По условию $R = nr$, тогда $\frac{U}{nr} = \frac{\varepsilon}{r(n+1)}$. Отсюда $\frac{U}{\varepsilon} = \frac{n}{n+1}$.

а) $\frac{U}{\varepsilon} = 9{,}1\%$; б) $\frac{U}{\varepsilon} = 50\%$; в) $\frac{U}{\varepsilon} = 91\%$.

10.18 Элемент, сопротивление и амперметр соединены последовательно. Элемент имеет э.д.с. $\varepsilon = 2$ В и внутреннее сопротивление $r = 0{,}4$ Ом. Амперметр показывает ток $I = 1$ А. С каким к.п.д. η работает элемент?

Решение

К.п.д. элемента $\eta = \frac{\varepsilon - I_r}{\varepsilon}$ (см. задачу 10.15), $\eta = 80\%$.

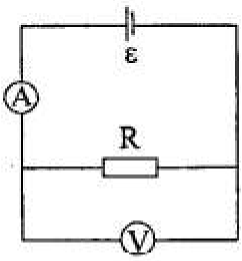
10.19 Имеются два одинаковых элемента с э.д.с. $\varepsilon = 2$ В и внутренним сопротивлением $r = 0{,}3$ Ом. Как надо соединить эти элементы (последовательно или параллельно), чтобы получить больший ток, если внешнее сопротивление: *а*) $R = 0.2$ Ом: б) $R = 16$ Ом? Найти ток I в каждом из этих случаев.

Решение

Согласно закону Ома для замкнутой цепи сила тока $I = \frac{\varepsilon}{R + r}$. При последовательном соединении элементов их эквивалентное сопротивление равно $2r$, а суммарная э.д.с. равна 2ε. Тогда $I_1 = \frac{2\varepsilon}{R + 2r}$. При параллельном соединении их эквивалентное сопротивление равно $0.5r$, а суммарная э.д.с. равна ε. Тогда $I_2 = \frac{\varepsilon}{R + 0{,}5r}$. Подставляя числовые данные, получим: а) $I_1 = 5$ А, $I_2 = 5.7$ А; б) $I_1 = 0{,}24$ А, $I_2 = 0{,}124$ А. Т. е. при маленьком внешнем сопротивлении элементы выгоднее соединять параллельно, а при большом — последовательно.

10.20 Считая сопротивление вольтметра R_V бесконечно большим, определяют сопротивление R по показаниям амперметра и вольтметра. Найти относительную погрешность $\Delta R/R$ найденного сопротивления, если в действительности сопротивление вольтметра равно R_V. Задачу решить для $R_V = 1000$ Ом и сопротивления: *а*) $R = 10$ Ом; б) $R = 100$ Ом; в) $R = 1000$ Ом.

Решение

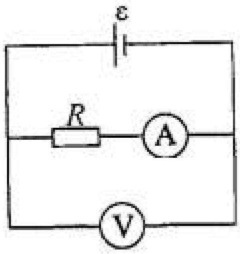


Общее сопротивление резистора и вольтметра, т. к. они соединены параллельно, можно найти по формуле $R_{об} = \frac{RR_V}{R + R_V}$.

Тогда $\Delta R = R - R_{об} = R\left(1 - \frac{R_V}{R + R_V}\right)$, а следовательно, $\frac{\Delta R}{R} = 1 - \frac{R_V}{R + R_V}$. а) Если $R = 10$ Ом, то $\frac{\Delta R}{R} = 0{,}01 = 1\%$. б) Если $R = 100$ Ом, то $\frac{\Delta R}{R} = 0{,}1 = 10\%$. в) Если $R = 1000$ Ом, то $\frac{\Delta R}{R} = 0.5 = 50\%$.

10.21 Считая сопротивление амперметра R_A бесконечно малым, определяют сопротивление R по показаниям амперметра и вольтметра. Найти относительную погрешность $\Delta R/R$ найденного сопротивления, если в действительности сопротивление амперметра равно R_A. Решить задачу для $R_A = 0{,}2$ Ом и сопротивления: *а*) $R = 1$ Ом; б) $R = 10$ Ом; в) $R = 100$ Ом.

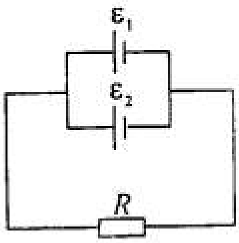
Решение



Общее сопротивление резистора и амперметра, т. к. они соединены последовательно, можно найти по формуле $R_{об} = R + R_A$. Тогда $\Delta R = |R - R_{об}| = R_A$, а следовательно, $\dfrac{\Delta R}{R} = \dfrac{R_A}{R}$. а) Если $R = 1$ Ом, то $\dfrac{\Delta R}{R} = 0{,}2 = 20\,\%$. б) Если $R = 10$ Ом, то $\dfrac{\Delta R}{R} = 0{,}02 = 2\,\%$. в) Если $R = 100$ Ом, то $\dfrac{\Delta R}{R} = 0{,}002 = 0{,}2\,\%$.

10.22 Два параллельно соединенных элемента с одинаковыми э.д.с. $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 2$ В и внутренними сопротивлениями $r_1 = 1$ Ом и $r_2 = 1{,}5$ Ом замкнуты на внешнее сопротивление $R = 1{,}4$ Ом. Найти ток I в каждом из элементов и во всей цепи.

Решение



При параллельном соединении источников тока с одинаковыми э.д.с. общее внутреннее сопротивление $r = \dfrac{r_1 r_2}{r_1 + r_2} = 0{,}6$ Ом, а общая э.д.с. $\varepsilon = \varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 2$ В. По закону Ома для полной цепи ток через сопротивление R: $I = \dfrac{\varepsilon}{R + r} = 1$ А. Согласно первому закону Кирхгоффа $I = I_1 + I_2$ — (1), где I_1 и I_2 — соответственно токи через первый и второй элементы, и т. к. элементы соединены параллельно, то $r_1 I_1 = r_2 I_2$ — (2). Решая совместно уравнения (1) и (2), находим, что $I_1 = \dfrac{I r_1}{r_1 + r_2} = 0{,}4$ А и $I_2 = \dfrac{I r_2}{r_1 + r_2} = 0{,}6$ А.

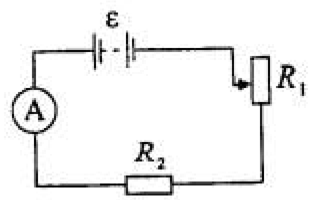
10.23 Два последовательно соединенных элемента с одинаковыми э.д.с. $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 2$ В и внутренними сопротивлениями $r_1 = 1$ Ом и $r_2 = 1{,}5$ Ом замкнуты на внешнее сопротивление $R = 0{,}5$ Ом. Найти разность потенциалов U на зажимах каждого элемента.

Решение

Согласно закону Ома для замкнутой цепи при последовательном соединении элементов сила тока в цепи равна $I = \dfrac{2\varepsilon}{R + r_1 + r_2} = 1{,}33$ А. Разность потенциалов на зажимах первого элемента $U_1 = \varepsilon - Ir_1 = 0{,}66$ В. Разность потенциалов на зажимах второго элемента $U_2 = \varepsilon - Ir_2 = 0$.

10.24 Батарея с э.д.с. $\varepsilon = 20$ В, амперметр и реостаты с сопротивлениями R_1 и R_2 соединены последовательно. При выведенном реостате R_1 амперметр показывает ток $I = 8$ А, при введенном реостате R_1 — ток $I = 5$ А. Найти сопротивления R_1 и R_2 реостатов и падения потенциала U_1 и U_2 на них, когда реостат R_1 полностью включен.

Решение



Задачу решаем в предположении равенства нулю внутреннего сопротивления э.д.с. и сопротивления амперметра. По закону Ома для всей цепи при выведенном реостате R_1 ток

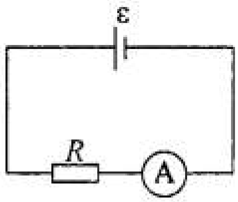
$I_1 = \dfrac{\varepsilon}{R_2}$ — (1), а при введенном реостате R_1 ток

$I_2 = \dfrac{\varepsilon}{R_1 + R_2}$ — (2). Решая совместно уравнения (1) и (2),

находим $R_2 = \dfrac{\varepsilon}{I_1} = 2{,}5$ Ом; $R_1 = \dfrac{\varepsilon}{I_1} - R_2 = 1{,}5$ Ом. По закону Ома для участка цепи падение потенциалов на реостатах $U_1 = I_2 R_1 = 7{,}5$ В; $U_2 = I_2 R_2 = 12{,}5$ В.

10.25 Элемент, амперметр и некоторое сопротивление соединены последовательно. Если взять сопротивление из медной проволоки длиной l = 100 м и поперечным сечением S = 2 мм^2, то амперметр показывает ток I_1 = 1,43 А. Если же взять сопротивление из алюминиевой проволоки длиной l = 57,3 м и поперечным сечением S = 1 мм^2, то амперметр показывает ток I_2 = 1 А. Сопротивление амперметра R_A = 0,05 Ом. Найти э.д.с. ε элемента и его внутреннее сопротивление r.

Решение



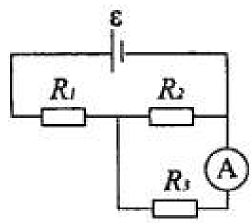
По закону Ома для полной цепи $I = \dfrac{\varepsilon}{r + R_A + R}$, где сопротивление $R = \rho\dfrac{l}{S}$, ρ — удельное сопротивление материала проволоки. Тогда для медной и алюминиевой проволоки соответственно имеем $I_1 = \dfrac{\varepsilon}{r + R_A + \rho_1 l_1 / S_1}$ — (1) и $I_2 = \dfrac{\varepsilon}{r + R_A + \rho_2 l_2 / S_2}$ — (2). Решая совместно уравнения (1) и (2), получим выражение для внутреннего сопротивления источника тока

$$\frac{(R_A + \rho_2 l_2 / S_2) - I_2(R_A + \rho_1 l_1 / S_1)}{I_1 - I_2} = 0{,}5 \text{ Ом}.$$

Из (1) э.д.с. источника тока $\varepsilon = I_1\left(r + R_A + \rho_1\dfrac{l_1}{S_1}\right) = 2$ В.

10.26 Напряжение на зажимах элемента в замкнутой цепи U = 2,1 В, сопротивления R_1 = 5 Ом, R_2 = 6 Ом и R_3 = 3 Ом. Какой ток I показывает амперметр?

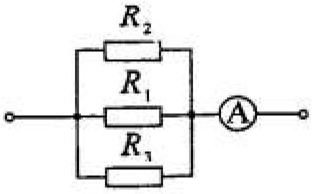
Решение



Согласно первому правилу Кирхгоффа $I_1 = I_2 + I_3$ — (1), где I_1, I_2 и I_3 соответственно токи через сопротивления R_1, R_2 и R_3. Т. к. элемент и сопротивления R_1 и R_3 соединены последовательно, то $U = U_1 + U_2$, и т. к. по закону Ома для участка цепи $U_1 = I_1R_1$ и $U_2 = I_2R_2$, то $U = I_1R_1 + I_2R_2$ — (2). Т. к. сопротивления R_2 и R_3 соединены параллельно, то $U_2 = U_3$, или т. к. по закону Ома для участка цепи $U_3 = I_3R_3$, то $I_2R_2 = I_3R_3$ — (3). Амперметр покажет ток через сопротивление R_3. Выражая из уравнений (2) и (3) соответственно токи I_1, I_2 и подставляя их в уравнение (1), окончательно получаем $I_3 = \dfrac{UR_2}{R_3R_1 + R_3R_2 + R_1R_2} = 0{,}2$ А.

10.27 Сопротивления $R_2 = 20$ Ом и $R_3 = 15$ Ом. Через сопротивление R_2 течет ток $I_2 = 0{,}3$ А. Амперметр показывает ток $I = 0{,}8$ А. Найти сопротивление R_1.

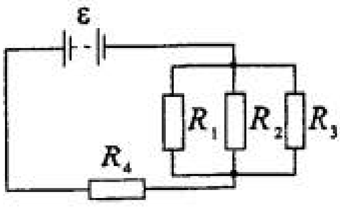
Решение



При параллельном соединении сопротивлений ток, текущий через эквивалентное сопротивление R_{123}, равен сумме токов, текущих через R_1, R_2, R_3. $I = I_1 + I_2 + I_3$. При этом все сопротивления находятся под одной разностью потенциалов, т. е. $U = U_1 = U_2 = U_3$. Согласно закону Ома $U = I_2R_2$. Сила тока $I_3 = \frac{U}{R_3} = \frac{I_2R_2}{R_3} = 0{,}4$ А, тогда $I_1 = I - I_2 - I_3$; $I_1 = 0{,}1$ А. Искомое сопротивление $R_1 = \frac{U}{I_1} = 60$ Ом.

10.28 Э.д.с. батареи $\varepsilon = 100$ В, сопротивления $R_1 = R_3 = 40$ Ом, $R_2 = 80$ Ом и $R_4 = 34$ Ом. Найти ток I_2, текущий через сопротивление R_2, и падение потенциала U_2 на нем.

Решение



Для параллельного участка цепи $I_{123} = I_1 + I_2 + I_3$; $U_{123} = U_1 + U_2 + U_3$. Ток, текущий через сопротивление $R_и$ и эквивалентное сопротивление R_{123}, $I = I_4 = I_{123}$; $I = \frac{\varepsilon}{R}$

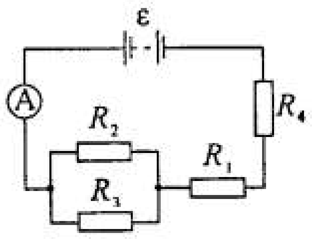
Найдем сопротивление параллельного участка $\frac{1}{R_{123}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} = \frac{1}{16}$ Ом$^{-1}$, следовательно, $R_{123} = 16$ Ом.

Полное сопротивление цепи $R = R_{123} + R_4 = 50$ Ом. Тогда $I = 2$ А. Напряжение на зажимах источника $U = \varepsilon - I \cdot r$, но т. к. $r \to 0$, то $U = \varepsilon$. Падение напряжения

на сопротивлении R_4: $U_4 = IR_4 = 68$ В, но $U = U_{123} + U_4$, следовательно, $U_{123} = U_2 = U - U_4$; $U_2 = 32$ В. Тогда $I_2 = \frac{U_2}{R_2} = 0{,}4$ А.

10.29 Э.Д.С. батареи ε = 120 *В*, сопротивления R_3 = 20 Ом и R_4 = 25 Ом. Падение потенциала на сопротивлении R_1 равно U_1 = 40 В. Амперметр показывает ток I = 2 А. Найти сопротивление R_2.

Решение



Падение напряжения на параллельном участке цепи $U_{23} = \varepsilon - U_1 - U_4$ — (1), где $U_4 = IR_4 = 50$ В — (2). Кроме того, $U_{23} = U_2 = U_3$. Сумма токов, протекающих через сопротивления R_2 и R_3, равна току, который показывает амперметр. $I_2 + I_3 = I$ — (3). Из (1) и (2) найдем $U_{23} = 30$ В, тогда по закону Ома $I_3 = \frac{U_{23}}{R_3} = 1{,}5$ А, а $I_2 = I - I_3 = 0{,}5$ А. Также по закону Ома $I_2 = \frac{U_{23}}{R_2}$, откуда $R_2 = \frac{U_{23}}{I_2} = 60$ Ом.

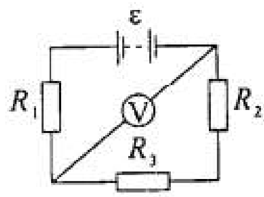
10.30 Батарея с э.д.с. ε = 10 В и внутренним сопротивлением r = 1 Ом имеет к.п.д. η = 0,8 (см. рисунок к задаче 10.29). Падения потенциала на сопротивлениях R_1 и R_4 равны U_1 = 4 В и U_4 = 2 В. Какой ток I показывает амперметр? Найти падение потенциала U_2 на сопротивлении R_2.

Решение

По закону Ома для замкнутой цепи ток, текущий через амперметр, равен $I = \frac{\varepsilon}{R + r}$ — (1). Полное сопротивление цепи R найдем из соотношения $\eta = \frac{R}{R + r}$, откуда $R = \frac{r\eta}{1 - \eta} = 4$ Ом. Тогда из (1) ток $I = 2$ А. Согласно второму закону Кирхгоффа $U_1 + 2U_2 + U_4 = \varepsilon$, отсюда $U_2 = \frac{\varepsilon - U_1 - U_4}{2} = 2$ В.

10.31 Э.д.с. батареи ε = 100 В, сопротивления R_1 = 100 Ом, R_2 = 200 Ом и R_3 = 300 Ом, сопротивление вольтметра R_v = 2 кОм. Какую разность потенциалов U показывает амперметр?

Решение



По закону Ома для замкнутой цепи ток, текущий через сопротивление R_1 и через эквивалентное сопротивление параллельного участка цепи R', равен $I = \frac{\varepsilon}{R+r}$ или, поскольку внутренним сопротивлением источника r мы пренебрегаем, $I = \frac{\varepsilon}{R}$ — (1). Полное сопротивление цепи $R = R_1 + R'$ — (2). Эквивалентное сопротивление R' найдем из соотношения: $\frac{1}{R'} = \frac{1}{R_{1'}} + \frac{1}{R_2 + R_3}$; $R' = \frac{R_{1'}(R_2 + R_3)}{R_2 + R_3 + R_{1'}} = 400$ Ом. Тогда из (2) получим $R = 500$ Ом. Из (1) найдем $I = 0{,}2$ А. Сумма токов, текущих через вольтметр и сопротивления R_2 и R_3, равна току I; $I = I_V + I_{23}$, где $I_V = \frac{U}{R_{1'}}$; $I_{23} = \frac{U}{R_2 + R_3}$. Т. е. $I = \frac{U}{R_V} + \frac{U}{R_2 + R_3} = \frac{U(R_2 + R_3 + R_{1'})}{R_{1'}(R_2 + R_3)}$ или $I = \frac{U}{R'}$. Отсюда $U = IR' = 80$ В.

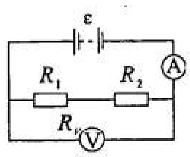
10.32 Сопротивления $R_1 = R_2 = R_3$ = 200 Ом (см. рисунок к задаче 10.31), сопротивление вольтметра R_v = 1 кОм. Вольтметр показывает разность потенциалов U = 100 В. Найти э.д.с. ε батареи.

Решение

По закону Ома для замкнутой цепи ток, текущий через сопротивление R_1 и через эквивалентное сопротивление параллельного участка цепи R', $I = \frac{\varepsilon}{R+r}$ или, поскольку внутренним сопротивлением источника r мы пренебрегаем, $I = \frac{\varepsilon}{R}$ — (1). Сумма токов, текущих через вольтметр и сопротивления R_2 и R_3, равна току I. $I = I_{1'} + I_{23}$, где $I_V = \frac{U}{R_V}$; $I_{23} = \frac{U}{R_2 + R_3}$. Отсюда $I = \frac{U}{R_{1'}} + \frac{U}{R_2 + R_3} = 0{,}35$ А. Полное сопротивление цепи $R = R_1 + R'$. Эквивалентное сопротивление R' найдем из соотношения: $\frac{1}{R'} = \frac{1}{R_{1'}} + \frac{1}{R_2 + R_3}$; $R' = \frac{R_{1'}(R_2 + R_3)}{R_2 + R_3 + R_{1'}}$. Тогда $R = R_1 + \frac{R_{1'}(R_2 + R_3)}{R_2 + R_3 + R_{1'}}$; $R = 485$ Ом. Из (1) найдем $\varepsilon = IR$. Подставляя числовые данные, получим $\varepsilon = 170$ В.

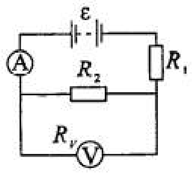
10.33 Найти показания амперметра и вольтметра в схемах, изображенных на рисунках. Э.д.с. батареи ε = 110 В, сопротивления R_1 = 400 Ом и R_2 = 600 Ом, сопротивление вольтметра R_v = 1 кОм.

Решение



Будем считать внутреннее сопротивление э.д.с. равным нулю.

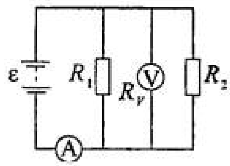
а) Т. к. R_1 и R_2 соединены последовательно, то $R_{12} = R_1 + R_2 = 1$ кОм. Вольтметр подключен параллельно R_{12}, поэтому сопротивление всей цепи $R = \dfrac{R_V R_{12}}{R_V + R_{12}} = 500$ Ом. Амперметр покажет ток во всей цепи, который по закону Ома $I = \dfrac{\varepsilon}{R} = 0{,}22$ А, а вольтметр покажет падение напряжения на сопротивлении R_{12}, а т. к. $R_{12} = R_V$, то ток через R_{12} равен $I_{12} = \dfrac{I}{2} = 0{,}11$ А, тогда по закону Ома для участка цепи $U = I_{12}R_{12} = 110$ В.



б) Т. к. сопротивление R_2 и вольтметр соединены параллельно, то их общее сопротивление $R' = \dfrac{R_2 R_V}{R_2 + R_V} = 375$ Ом. Общее сопротивление всей цепи $R = R_1 + R' = 775$ Ом. Показание амперметра $I = \dfrac{\varepsilon}{R} = 0{,}142$ А. По первому закону Кирхгоффа $I = I_2 + I_V$, где I_2 и I_V соответственно токи через R_2 и вольтметр, и, кроме того, $I_2 R_2 = I_V R_V$, тогда $I_2 = \dfrac{IR_V}{R_2 + R_V} = 0{,}089$ А. Показание вольтметра $U = I_2 R_2 = 53{,}2$ В.

в) Т. к. оба сопротивления и вольтметр соединены параллельно, то $\dfrac{1}{R} = \dfrac{1}{R_1} + \dfrac{1}{R_2} + \dfrac{1}{R_V}$, откуда сопротивление всей цепи

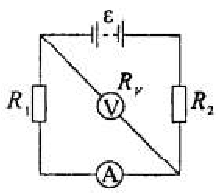
$$R = \frac{R_1 R_2 R_V}{R_2 R_V + R_1 R_V + R_1 R_2} = 193{,}6 \text{ Ом}.$$



Показание амперметра $I = \dfrac{\varepsilon}{R} = 0{,}57$ А.

Показание вольтметра $U = IR = 110$ В.

г) Т. к. сопротивление R_1 и вольтметр соединены параллельно, то их общее сопротивление $R' = \dfrac{R_1 R_V}{R_1 + R_V} = 285{,}7$ Ом. Полное сопротивление цепи $R = R_2 + R' = 885{,}7$ Ом. По закону Ома ток в цепи $I = \dfrac{\varepsilon}{R} = 0{,}12$ А. С другой стороны, по первому закону Кирхгоффа $I = I_1 + I_V$, а также $I_1 R_1 = I_V R_V$, тогда ток, который покажет амперметр,



$$I_1 = \frac{IR_V}{R_1 + R_V} = 0{,}088 \text{ А}.$$

10.34 Амперметр с сопротивлением R_A = 0,16 Ом зашунтован сопротивлением R = 0,04 Ом. Амперметр показывает ток I_0 = 8 А. Найти ток I в цепи.

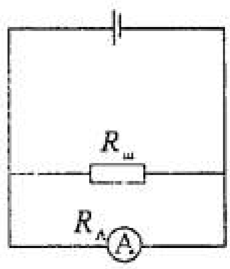
Решение

Шунтирующее сопротивление подключается параллельно амперметру, следовательно, ток в цепи $I = I_0 + I_ш$. Падения напряжения на сопротивлениях амперметра и шунта одинаковы, поэтому $I_0 R_A = I_ш R$; $I_ш = I_0 \frac{R_A}{R}$. Тогда

$I = I_0 + I_0 \frac{R_A}{R} = I_0\left(1 + \frac{R_A}{R}\right)$. Подставляя числовые данные, получим $I = 40$ А.

10.35 Имеется предназначенный для измерения токов до I = 10 А амперметр с сопротивлением R_A = 0,18 Ом, шкала которого разделена на 100 делений. Какое сопротивление R надо взять и как его включить, чтобы этим амперметром можно было измерять ток до I_0 = 100 А? Как изменится при этом цена деления амперметра?

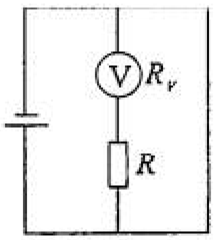
Решение



Если необходимо измерить силу тока в n раз большую, чем можно измерить данным амперметром, т. е. $\frac{I_0}{I} = n = 10$, то следует параллельно подключить шунт с сопротивлением $R_ш = \frac{R_A}{n-1}$. Таким образом, $R_ш = 0{,}02$ Ом. Цена деления без шунта равна 0,1 А, с шунтом 1 А.

10.36 Имеется предназначенный для измерения разности потенциалов до U = 30 В вольтметр с сопротивлением R_1 = 2 кОм, шкала которого разделена на 150 делений. Какое сопротивление R надо взять и как его включить, чтобы этим вольтметром можно было измерять разности потенциалов до U_0 = 75 В? Как изменится при этом цена деления вольтметра?

Решение



Если необходимо измерить напряжение в n раз большее, чем то, которое может измерить данный вольтметр, т. е. $n = \frac{U_0}{U}$, то необходимо последовательно подключить добавочное сопротивление $R = R_V(n-1)$. Т. к. $n = 2{,}5$, то $R = 3$ кОм. Цена деления вольтметра без добавочного сопротивления была 0,2 В, с сопротивлением стала 0,5 В.

10.37 Имеется предназначенный для измерения токов до I = 15 мА амперметр с сопротивлением R_A = 5 Ом. Какое сопротивление R надо взять и как его включить, чтобы этим прибором можно было измерять: а) ток до I_0 = 150 мА; б) разность потенциалов до U_0 = 150 В?

Решение

а) Добавочное сопротивление $R=\frac{R_A}{n-1}$, где $n=\frac{I_0}{I}=10$ (см. задачу 10.35), нужно подключить параллельно. $R=0{,}56$ Ом. б) Надо последовательно подключить добавочное сопротивление $R=R_A(n-1)$, где $n=\frac{U_0}{U}$ (см. задачу 10.36). Т. к. $U=IR_A$, то $n=\frac{U_0}{IR_A}=2000$. Отсюда $R=9995$ Ом.

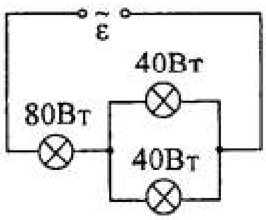
10.38 Имеется 120-вольтовая электрическая лампочка мощностью P = 40 Вт. Какое добавочное сопротивление R надо включить последовательно с лампочкой, чтобы она давала нормальный накал при напряжении в сети U_0 = 220 В? Какую длину l нихромовой проволоки диаметром d = 0,3 мм надо взять, чтобы получить такое сопротивление?

Решение

При последовательном соединении $U_0=U_1+U_2$, где U_1 — падение напряжения на лампочке, U_2 — падение напряжения на добавочном сопротивлении. По условию $U_1=120$ В, тогда $U_2=U_0-U_1=100$ В. Мощность лампочки $P=I^2R_1=\frac{U_1^2}{R_1}$, отсюда сопротивление лампочки $R_1=\frac{U_1^2}{P}=360$ Ом, ток $I=\sqrt{\frac{P}{R_1}}=0{,}33$ А. Тогда добавочное сопротивление $R_2=\frac{U_2}{I}=303$ Ом. Длину нихромовой нити, имеющей такое сопротивление, можно найти по формуле $R_2=\rho\frac{l}{S}$, откуда $l=\frac{R_2S}{\rho}=\frac{R_2\pi d^2}{4\rho}$. Подставляя числовые данные, получим $l=21{,}2$ м.

10.39 Имеется три 110-вольтовых электрических лампочки, мощности которых $P_1 = P_2 = 40$ Вт и $P_3 = 80$ Вт. Как надо включить эти лампочки, чтобы они давали нормальный накал при напряжении в сети $U_0 = 220$ В? Начертить схему. Найти токи I_1, I_2 и I_3, текущие через лампочки при нормальном накале.

Решение



При параллельном включении двух лампочек мощностью по 40 Вт получается «потребитель», рассчитанный на то же напряжение и мощность, а следовательно, имеющий такое же сопротивление, что и 80-ваттная лампочка. Схема соединения лампочек изображена на рисунке. Падение напряжения на лампочках 1 и 2 равно падению напряжения на лампочке 3 и равно $U = \frac{U_0}{2}$. Тогда $I_3 = \frac{P_3}{U} = 0{,}73$ А и $I_1 = I_2 = \frac{P_1}{U} = 0{,}365$ А.

10.40 В лаборатории, удаленной от генератора на расстояние $l = 100$ м, включили электрический нагревательный прибор, потребляющий ток $I = 10$ А. На сколько понизилось напряжение U на зажимах электрической лампочки, горящей в этой лаборатории, если сечение медных подводящих проводов $S = 5$ мм^2?

Решение

Сопротивление проводов можно рассчитать по формуле $R = \rho\frac{2l}{S}$, где ρ — удельное сопротивление меди. Тогда падение напряжения $U = IR = I\rho\frac{2l}{S}$; $U = 6{,}8$ В.

10.41 От батареи с э.д.с. $\varepsilon = 500$ В требуется передать энергию на расстояние $l = 2{,}5$ км. Потребляемая мощность $P = 10$ кВт. Найти минимальные потери мощности dP в сети, если диаметр медных подводящих проводов $d = 1{,}5$ см.

Решение

Потери мощности в проводах $\Delta P = I^2 R$, где ток в цепи $I = \frac{P}{\varepsilon}$, а R — сопротивление проводов. Учитывая двухпроводность линии, $R = 2\rho\frac{l}{S}$, где $\rho = 0{,}017 \cdot 10^{-6}$ Ом·м — удельное сопротивление меди при 0° С. Тогда $\Delta P = \frac{P^2}{\varepsilon^2} 2\rho\frac{l}{S}$ или, учитывая $S = \pi\frac{d^2}{4}$, $\Delta P = \frac{8P^2\rho l}{\pi\varepsilon^2 d^2}$;

$$\Delta P = \frac{8 \cdot 10^8 \cdot 0{,}017 \cdot 10^{-6} \cdot 2{,}5 \cdot 10^3}{3{,}14 \cdot 500^2 \cdot 1{,}5^2 \cdot 10^{-4}} = 193 \text{ Вт}.$$

10.42 От генератора с э.д.с. ε = 110 В требуется передать энергию на расстояние l = 250 м. Потребляемая мощность P = 1 кВт. Найти минимальное сечение S медных подводящих проводов, если потери мощности в сети не должны превышать 1%.

Решение

По условию потери мощности в сети не должны превышать 1%, следовательно, к.п.д. $\eta = 99\%$. Сопротивление проводов $R = \rho\frac{2l}{S}$ — (1), где ρ — удельное сопротивление меди. С другой стороны, согласно закону Ома $R = \frac{U}{I}$ — (2). Поскольку мощность генератора $p = \varepsilon I$, то $I = \frac{p}{\varepsilon}$ — (3). Падение напряжения $\eta = \frac{U}{\varepsilon}$, откуда $U = \eta\varepsilon$ — (4). Подставив (3) и (4) в (2), найдем $R = \frac{\eta\varepsilon^2}{P}$ — (5). Приравняв правые части (1) и (5), получим $\frac{\eta\varepsilon^2}{P} = \rho\frac{2l}{S}$, откуда $S = \frac{2pl\rho}{\eta\varepsilon^2}$; $S = 78\,\text{мм}^2$.

10.43 В цепь включены последовательно медная и стальная проволоки одинаковых длины и диаметра. Найти: а) отношение количеств теплоты, выделяющихся в этих проволоках; б) отношение падений напряжения на этих проволоках.

Решение

При последовательном включении по медной и стальной проволоке течет одинаковый ток. Согласно закону Джоуля — Ленца на медной проволоке выделится количество тепла $Q_1 = I^2R_1t = I^2\rho_1\frac{l}{S}t$, а на стальной проволоке — количество тепла $Q_2 = I^2R_2t = I^2\rho_2\frac{l}{S}t$. Отношение $\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2} = 0{,}17$. Падение напряжения на медной проволоке $U_1 = IR_1 = I\rho_1\frac{l}{S}$. Падение напряжения на стальной проволоке $U_2 = IR_2 = I\rho_2\frac{l}{S}$. Отношение $\frac{U_1}{U_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2} = 0{,}17$.

10.44 В цепь включены параллельно медная и стальная проволоки одинаковых длины и диаметра. Найти: а) отношение количеств теплоты, выделяющихся в этих проволоках; б) отношение падений напряжения на этих проволоках.

Решение

При параллельном включении медной и стальной проволоки падение напряжения на них одинаково. Согласно закону Джоуля — Ленца $Q_1 = \frac{U^2}{R_1}t = \frac{U^2}{\rho_1 l/S}t$, а $Q_2 = \frac{U^2}{R_2}t = \frac{U^2}{\rho_2 l/S}t$. Отношение $\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{\rho_2}{\rho_1} = 5{,}9$. Падение напряжения $U_1 = U_2$, следовательно, $\frac{U_1}{U_2} = 1$.

10.45 Элемент с э.д.с. $\varepsilon = 6$ В дает максимальный ток $I = 3$ А. Найти наибольшее количество теплоты Q_r, которое может быть выделено во внешнем сопротивлении в единицу времени.

Решение

За счет работы электрического тока во внешнем сопротивлении выделяется количество теплоты $Q = A = I\varepsilon t$. При $t = 1$ с количество теплоты $Q = 18$ Дж.

10.46 Батарея с э.д.с. $\varepsilon = 240$ В и внутренним сопротивлением $r = 1$ Ом замкнута на внешнее сопротивление $R = 23$ Ом. Найти полную мощность P_0, полезную мощность P и к.п.д. η батареи.

Решение

К.п.д. батареи $\eta = \frac{R}{R+r} = 0{,}96$. Полная мощность батареи $P_0 = \varepsilon I$, где согласно закону Ома $I = \frac{\varepsilon}{R+r}$, т. е. $P_0 = \frac{\varepsilon^2}{R+r}$; $P_0 = 2{,}4$ кВт. Полезная мощность $P = \eta P_0 = 2{,}3$ кВт.

10.47 Найти внутреннее сопротивление r генератора, если известно, что мощность P, выделяющаяся во внешней цепи, одинакова при внешних сопротивлениях $R_1 = 5$ Ом и $R_2 = 0{,}2$ Ом. Найти к.п.д. η генератора в каждом из этих случаев.

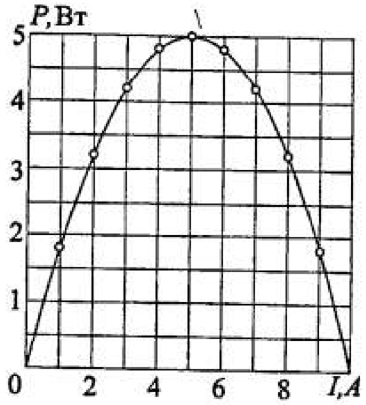
Решение

Мощность, выделяющаяся во внешней цепи: $P = I_1^2 R_1$ или $P = I_2^2 R_2$. Согласно закону Ома для замкнутой цепи $I_1 = \frac{\varepsilon}{R_1 + r}$, а $I_2 = \frac{\varepsilon}{R_2 + r}$. Тогда $P = \frac{\varepsilon^2 R_1}{(R_1 + r)^2} = \frac{\varepsilon_2 R_2}{(R_2 + r)^2}$, откуда $R_1(R_2 + r)^2 = R_2(R_1 + r)^2$. Раскрыв скобки и проведя несложные преобразования, найдем $r = \sqrt{R_1 R_2} = 1$ Ом. Для первого сопротивления к.п.д. генератора $\eta_1 = \frac{R_1}{R_1 + r} = 83\%$.

Для второго сопротивления $\eta_2 = \frac{R_2}{R_2 + r} = 17\%$.

10.48 На графике дана зависимость полезной мощности P от тока I в цепи. По данным этой кривой найти внутреннее сопротивление r и э.д.с. ε элемента. Построить график зависимости от тока I в цепи к.п.д. η элемента и падения потенциала U во внешней цепи.

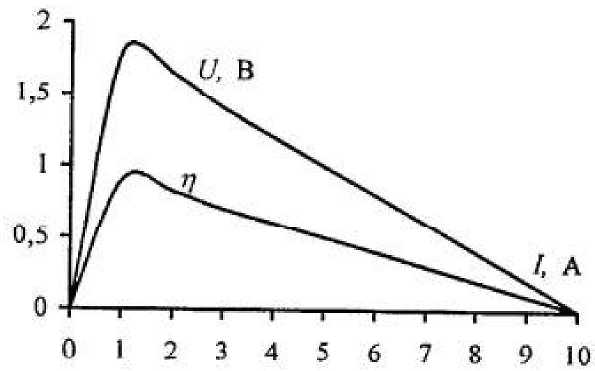
Решение



По точкам на кривой составим таблицу:

I, А	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
P, Вт	0	1,8	3,2	4,2	4,8	5	4,8	4,2	3,2	1,8	0

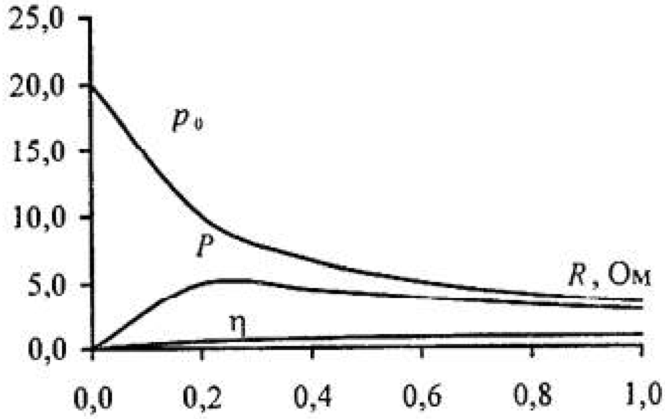
Мощность, выделяемая во внешней цепи (полезная мощность), достигнет максимума при внешнем сопротивлении R, равном внутреннему сопротивлению r элемента. При этом падение потенциала во внешней цепи $U = \frac{\varepsilon}{2}$. Тогда к.п.д. элемента $\eta = 0{,}5$. В нашем случае $P_{max} = IU = 5$ Вт.



Следовательно, $U = \frac{P_{max}}{I} = 1$ В; отсюда э.д.с. элемента $\varepsilon = 2U = 2$ В. Т. к. при этом $I = \frac{\varepsilon}{2r}$, то внутреннее сопротивление элемента $r = \frac{\varepsilon}{2I} = 0{,}2$ Ом. Падение потенциала во внешней цепи $U = \frac{P}{I}$; к.п.д. элемента $\eta = \frac{U}{\varepsilon} = \frac{P}{\varepsilon \cdot I}$.

10.49 По данным кривой, изображенной на рисунке к задаче 10.48, построить график зависимости от внешнего сопротивления R цепи: к.п.д. η элемента, полной мощности P_0 и полезной мощности P. Кривые построить для значений внешнего сопротивления R, равных: 0, r, $2r$, $3r$, $4r$ и $5r$, где r — внутреннее сопротивление элемента.

Решение



Имеем $\varepsilon = 2$ В; $r = 0{,}2$ Ом (см. задачу 10.48). Полная мощность, развиваемая источником, равна $P_0 = I^2(R+r) = I\varepsilon = \frac{\varepsilon^2}{R+r}$. Полезная мощность $P = I^2R = \frac{\varepsilon^2 R}{(R+r)^2}$. К.п.д. источника $\eta = \frac{P}{P_0} = \frac{R}{R+r}$. Подставив числовые данные, получим следующие зависимости: $P_0 = \frac{4}{R+0{,}2}$; $P = \frac{4R}{(R+0{,}2)^2}$; $\eta = \frac{R}{R+0{,}2}$. Для заданного интервала значений R составим таблицу и построим графики.

R, Ом	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1
P_0, Вт	20	10	6,67	5	4	3,33
P, Вт	0	5	4,44	3,75	3,2	2,78
η	0	0,5	0,67	0,75	0,8	0,83

10.50 Элемент замыкают сначала на внешнее сопротивление $R_1 = 2$ Ом, а затем на внешнее сопротивление $R_2 = 0{,}5$ Ом. Найти э.д.с. ε элемента и его внутреннее сопротивление r, если известно, что в каждом из этих случаев мощность, выделяющаяся во внешней цепи, одинакова и равна $P = 2{,}54$ Вт.

Решение

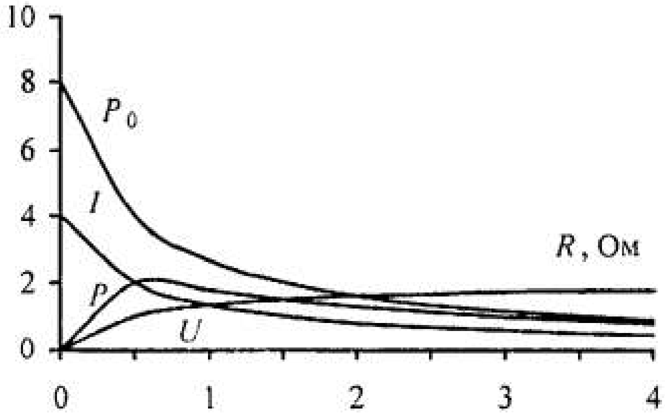
Мощность, выделяющаяся во внешней цепи, равна $P = I^2 \times$ $\times R$, где согласно закону Ома для полной цепи $I = \dfrac{\varepsilon}{R+r}$.

Отсюда $P = \dfrac{\varepsilon^2 R}{(R+r)^2}$. По условию $P = \dfrac{\varepsilon^2 R_1}{(R_1+r)^2} =$ $= \dfrac{\varepsilon^2 R_2}{(R_2+r)^2}$ — (1), отсюда $\dfrac{R_1+r}{\sqrt{R_1}} = \dfrac{R_2+r}{\sqrt{R_2}}$; $r\dfrac{\sqrt{R_1}-\sqrt{R_2}}{\sqrt{R_1R_2}} =$ $= \sqrt{R_1}-\sqrt{R_2}$; $r = \sqrt{R_1R_2} = 1$ Ом. Из (1) найдем $\varepsilon = (R_1+r)\sqrt{\dfrac{P}{R_1}} = 3{,}4$ Ом.

10.51 Элемент с э.д.с. $\varepsilon = 2$ *В* и внутренним сопротивлением $r = 0{,}5$ Ом замкнут на внешнее сопротивление R . Построить график зависимости от сопротивления R: тока I в цепи, падения потенциала U во внешней цепи, полезной мощности P и полной мощности P_0. Сопротивление взять в пределах $0 \le R \le 4$ Ом через каждые 0,5 Ом.

Решение

Зависимость тока I в цепи от внешнего сопротивления R выражается законом Ома для полной цепи: $I = \dfrac{\varepsilon}{R+r}$ или, с учетом данных задачи, $I = \dfrac{2}{R+0{,}5}$. К.п.д. элемента $\eta = \dfrac{U}{\varepsilon}$, кроме того, $\eta = \dfrac{R}{R+r}$ (см. задачу 10.49). Тогда $U = \dfrac{\varepsilon R}{R+r}$; $U = \dfrac{2R}{R+0{,}5}$. Зависимость полезной мощности P и полной мощности P_0 задается соотношением $P = \dfrac{\varepsilon^2 R}{(R+r)^2}$; $P_0 = \dfrac{\varepsilon^2}{R+r}$ (см. задачу 10.49) или $P = \dfrac{4R}{(R+0{,}5)^2}$; $P_0 = \dfrac{4}{R+0{,}5}$. Для заданного интервала значений R составим таблицу и построим графики.



R, Ом	0	0,5	1	1.5	2	2,5	3	3,5	4
I, А	4	2	1,33	1	0,8	0,67	0,57	0,5	0,44
U, В	0	1	1,33	1.5	1.6	1.67	1,71	1,75	1,78
P, Вт	0	2	1,78	1.5	1.28	1.11	0.98	0,88	0,79
P_0, Вт	8	4	2.67	2	1.6	1.33	1.14	1	0,89

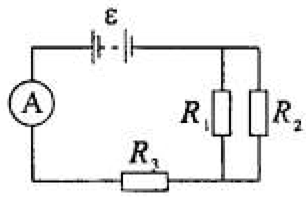
10.52 Элемент с э.д.с. ε и внутренним сопротивлением r замкнут на внешнее сопротивление R. Наибольшая мощность, выделяющаяся во внешней цепи, P = 9 Вт. При этом в цепи течет ток I = 3 А. Найти э.д.с. ε и внутреннее сопротивление r элемента.

Решение

Имеем $P_{max}=UI$, при этом $U=\frac{\varepsilon}{2}$ (см. задачу 10.48), т. е. $P_{max}=P=\frac{\varepsilon I}{2}$. Отсюда $\varepsilon=\frac{2P}{I}=6$ В. Имеем $r=\frac{\varepsilon}{2I}$ (см. задачу 10.48); $r=1$ Ом.

10.53 Э.д.с. батареи ε = 120 В, сопротивления R_3 = 30 Ом, R_2 = 60 Ом. Амперметр показывает ток I = 2 А. Найти мощность P, выделяющуюся в сопротивлении R_1.

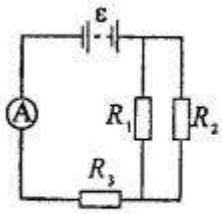
Решение



Мощность, выделяющаяся в цепи, определяется соотношением $P=UI$, где U — падение напряжения на данном участке, I — ток, протекающий через него. Падение напряжения на сопротивлении R_1: $U_1=\varepsilon-R_3I=60$ В. Ток в параллельном участке цепи $I=I_1+I_2$. По закону Ома $I_2=\frac{U_1r}{R_2}=1$ А, тогда $I_1=I-I_2$; $I_1=1$ А. Отсюда искомая мощность $P_1=I_1\cdot U_1=60$ Вт.

10.54 Э.д.с. батареи $\varepsilon_1 = 100$ В, ее внутреннее сопротивление $r = 2$ Ом, сопротивления $R_1 = 25$ Ом и $R_3 = 78$ Ом. На сопротивлении R_1 выделяется мощность $P_1 = 16$ Вт. Какой ток I показывает амперметр?

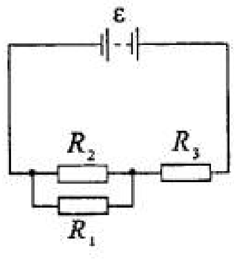
Решение



По определению мощности тока $P_1 = I_1 U_1$ — (1), а из закона Ома сопротивление $R_1 = \frac{U_1}{I_1}$ — (2). Решая совместно уравнения (1) и (2), найдем ток $I_1 = \sqrt{\frac{P_1}{R_1}}$. Т. к. сопротивления R_1 и R_2 соединены параллельно, то $R_1 I_1 = R_2 I_2$, тогда ток $I_2 = \frac{R_1 I_1}{R_2}$. По первому правилу Кирхгоффа ток, который покажет амперметр, $I = I_1 + I_2 = I_1\left(1 + \frac{R_1}{R_2}\right) = \sqrt{\frac{P_1}{R_1}}\left(1 + \frac{R_1}{R_2}\right)$ — (3). С другой стороны, по закону Ома $I = \frac{\varepsilon}{r + R}$ — (4), где $R = R_{12} + R_3$ — (4) — сопротивление внешней цепи. Поскольку сопротивления R_1 и R_2 соединены параллельно, то $R_{12} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$ — (6). Подставляя (5), с учетом (6), в (4), получаем $I = \frac{\varepsilon}{r + R_1 R_2 / (R_1 + R_2) + R_3}$ — (7). Исключая из соотношений (3) и (7) сопротивление R_2, окончательно находим $I = \frac{\varepsilon - \sqrt{P_1 R_1}}{r + R_3} = 1$ А.

10.55 Э.д.с. батареи $\varepsilon = 120$ В, сопротивления $R_1 = 25$ Ом, $R_2 = R_3 = 100$ Ом. Найти мощность P_1, выделяющуюся на сопротивлении R_1.

Решение



Т. к. сопротивления R_1 и R_2 соединены параллельно, то $R_{12} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$ и $U_1 = U_2$. Общее сопротивление внешней цепи $R = R_{12} + R_3 = 120$ Ом. По закону Ома для всей цепи ток $I = \frac{\varepsilon}{R} = 1$ А. Согласно первому закону Кирхгоффа $I = I_1 + I_2$ — (1) и, кроме того, $I_1 R_1 = I_2 R_2$ — (2). Решая совместно уравнения (1) и (2), находим ток через сопротивление R_1: $I_1 = \frac{IR_2}{R_2 + R_1} = 0{,}8$ А. Тогда мощность, выделяющаяся на сопротивлении R_1: $P_1 = I_1 U_1 = I_1^2 R_1 = 16$ Вт.

10.56 К.п.д. батареи η = 80% (см. рис. 1), сопротивление R_1 = 100 Ом. На сопротивлении R_1 выделяется мощность P_1 = 16 Вт. Найти э.д.с. ε батареи, если известно, что падение потенциала на сопротивлении R_3 равно U_3 = 40 В.

Решение

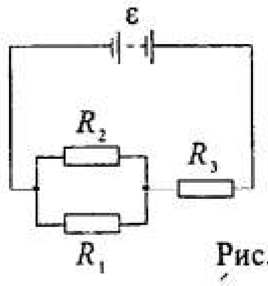


Рис. 1

Рассмотрим упрощенную эквивалентную схему (см. рис. 2), где r — внутреннее сопротивление участка цепи AB. По определению к.п.д. батареи $\eta = \frac{P_{полез}}{P_{полн}}$ — (1), где $P_{полез} = I^2 R_{AB}$ — (2) — полезная мощность, которая выделяется на участке AB, $P_{полн} = I^2(R_{AB} + r)$ — (3) — полезная мощность батареи. Подставляя (2) и (3) в (1), получаем $\eta = \frac{I^2 R_{AB}}{I^2(R_{AB}+r)} = \frac{IR_{AB}}{I(R_{AB}+r)}$ — (4).

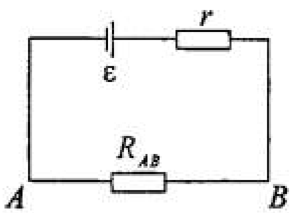
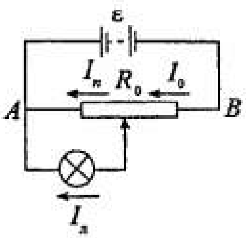


Рис. 2

По закону Ома для участка цепи падение потенциала на участке AB равно $U_{внешн} = IR_{AB}$ — (5), а по закону Ома для полной цепи $I = \frac{\varepsilon}{R_{AB}+r}$, откуда э.д.с. батареи $\varepsilon = I(R_{AB}+r)$ — (6). Подставляя (5) и (6) в (4), получаем $\eta = \frac{U_{внешн}}{\varepsilon}$, откуда э.д.с. батареи $\varepsilon = \frac{U_{внешн}}{\eta}$ — (7). Мощность тока, выделяемая на сопротивлении R_1, равна $p_1 = I_1 U_1$, и поскольку по закону Ома для участка цепи $I_1 = \frac{U_1}{R_1}$, то $P_1 = \frac{U_1^2}{R_1}$. Тогда падение потенциала на сопротивлении R_1 равно $U_1 = \sqrt{P_1 R_1}$, и т. к. сопротивления R_1 и R_2 соединены параллельно, то падения потенциалов на них $U_1 = U_2 = \sqrt{P_1 R_1}$ — (8). Полное падение потенциала на участке AB равно $U_{внешн} = U_1 + U_3 = U_2 + U_3$ — (9). Подставляя (8) в (9), получаем $U_{внешн} = \sqrt{P_1 R_1} + U_3$ — (10). Подставляя (10) в (7), окончательно находим э.д.с. батареи $\varepsilon = \sqrt{P_1 R_1} + U_3 / \eta = 100$ В.

10.57 Э.д.с. батареи ε = 120 В, полное сопротивление потенциометра R_0 = 120 Ом. Сопротивление R лампочки меняется при нагревании от 30 до 300 Ом. На сколько меняется при этом разность потенциалов U на лампочке, если подвижный контакт стоит на середине потенциометра? На сколько меняется при этом мощность P, потребляемая лампочкой?

Решение



По условию задачи подвижный контакт C стоит на середине потенциометра, поэтому сопротивления на участках AC и CB равны между собой: $R_{AC} = R_{CB} = \dfrac{R_0}{2}$ — (1), где R_0 — полное сопротивление потенциометра. Т. к. лампочка подключена параллельно участку AC, то падения потенциалов в лампочке и на участке AC равны между собой: $U_п = U_{AC}$ или, с учетом (1), $I_л R_1 = I_п \dfrac{R_0}{2}$ — (2), где $I_п$ — ток на участке AC, R_1 — сопротивление лампочки в начальный момент времени. Согласно первому правилу Кирхгоффа для узла C имеем $I_0 = I_п + I_л$ — (3). Решая совместно уравнения (2) и (3), получаем $I_0 = \left(\dfrac{2R_1}{R_0} + 1\right) I_л$ — (4). С другой стороны, по закону Ома для полной цепи

$$I_0 = \frac{\varepsilon}{R_0/2 + (R_0 R_1/2)/((R_0/2) + R_1)} = \frac{2\varepsilon(R_0 + 2R_1)}{R_0(R_0 + 4R_1)} \quad — (5).$$

Приравнивая правые части уравнений (4) и (5), получаем $I_л = \dfrac{2\varepsilon}{R_0 + 4R_1}$ — (6) — ток через лампочку в начальный момент времени. Тогда разность потенциалов на лампочке в начальный момент времени $U_1 = I_л R_1$ — (7), а мощность, потребляемая лампочкой, $P_1 = I_л^2 R_1$ — (8). Подставляя (6) в (7) и (8), соответственно получаем $U_1 = \dfrac{2\varepsilon R_1}{R_0 + 4R_1} = 30$ В и

$P_1 = \dfrac{4\varepsilon^2 R_1}{(R_0 + 4R_1)^2} = 30$ Вт. В процессе нагрева сопротивление лампочки возрастает до $R_2 = 300$ Ом, тогда разность потенциалов на лампочке и мощность, потребляемая лампочкой, станут соответственно равны $U_2 = \dfrac{2\varepsilon R_2}{R_0 + 4R_2} = 54{,}5$ В и

$P_2 = \dfrac{4\varepsilon^2 R_2}{(R_0 + 4R_1)^2} = 9{,}9$ Вт.

10.58 Разность потенциалов между точками A и B равна U = 9 В. Имеются два проводника с сопротивлениями R_1 = 5 Ом и R_2 = 3 Ом. Найти количество теплоты Q_t, выделяющееся в каждом проводнике в единицу времени, если проводники между точками A и B соединены: а) последовательно; б) параллельно.

Решение

Согласно закону Джоуля — Ленца количество теплоты, выделяющееся в проводнике, равно $Q = I^2Rt$. Тогда в единицу времени выделится количество теплоты $Q_т = \frac{Q}{t} = I^2R$. а) При последовательном соединении проводников $I_1 = I_2 = \frac{U}{R_1 + R_2}$. Количество теплоты, выделившееся на первом проводнике, $Q_{т1} = I_1^2R_1 = \frac{U^2R_1}{(R_1+R_2)^2}$; $Q_{т1} = 6{,}3$ Дж. Аналогично $Q_{т2} = \frac{U^2R_2}{(R_1+R_2)^2}$; $Q_{т2} = 3{,}8$ Дж.

б) При параллельном соединении $U_1 = U_2 = U$. Тогда $I_1 = \frac{U}{R_1}$, а $I_2 = \frac{U}{R_2}$. Отсюда $Q_{т1} = \frac{U^2}{R_1} = 16{,}2$ Дж; $Q_{т2} = \frac{U^2}{R_2} = 27$ Дж.

10.59 Две электрические лампочки с сопротивлениями R_1 = 360 Ом и R_2 = 240 Ом включены в сеть параллельно. Какая из лампочек потребляет большую мощность? Во сколько раз?

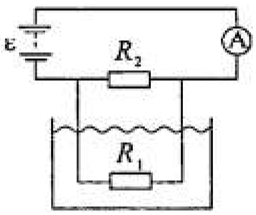
Решение

Поскольку лампочки включены в сеть параллельно, то падение напряжения на них одинаково, т. е. $U_1 = U_2 = U$. Мощности P_1 и P_2, потребляемые лампочками, определяются следующими соотношениями: $P_1 = \frac{U^2}{R_1}$ и $P_2 = \frac{U^2}{R_2}$, откуда $\frac{P_2}{P_1} = \frac{R_1}{R_2} = \frac{3}{2}$. Т. е. лампочка с меньшим сопротивлением потребляет в 1,5 раза больше.

10.60 Калориметр имеет спираль сопротивлением R_1 = 60 Ом, которая включена в цепь, как показано на рисунке. Сопротивление R_2 = 30 Ом. Амперметр показывает ток I = 6 А. На сколько нагревается масса m = 480 г воды, налитой в калориметр, за время t = 5 мин пропускания тока?

Решение

За время τ на спирали выделится количество теплоты $Q = I_1^2 R_1 \tau$ — (1), где I_1 — ток, проходящий через спираль. Поскольку спираль и сопротивление R_2 соединены параллельно, то $U_1 = U_2 = U$, а $I = I_1 + I_2$.



Тогда $I_1 = \dfrac{U}{R_1}$, где $U = IR_{12} = I\dfrac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$. Отсюда найдем $I_1 = \dfrac{IR_2}{R_1 + R_2} = 2$ А. Выделенное количество тепла пошло на нагревание воды, причем $Q = mc\Delta T$ — (2), где $c = 4{,}19 \cdot 10^3$ Дж/(кг·К) — удельная теплоемкость воды; ΔT — искомое изменение температуры. Приравнивая правые части (1) и (2), получим $I_1^2 R_1 \tau = mc\Delta T$, откуда $\Delta T = \dfrac{I_1^2 R_1 \tau}{mc} = 36$ К.

10.61 Какой объем V воды можно вскипятить, затратив электрическую энергию W = 3 гВт·ч? Начальная температура воды t_0 = 10 °С.

Решение

Электрическая энергия W задана во внесистемных единицах гектоватт-часах. В единицах системы СИ $1 \text{Вт·ч} = 3{,}6 \cdot 10^3$ Дж; $1 \text{гВт·ч} 3{,}6 \cdot 10^3 \cdot 10^2$ Дж; $3 \text{гВт·ч} = 10{,}8 \cdot 10^{12}$ Дж. Эта энергия была затрачена на нагревание воды массой $m = \rho V$ на $\Delta T = 90°$ С. Т. е. $W = cm\Delta T = c\rho V\Delta T$, откуда $V = \dfrac{W}{c\rho\Delta T}$. $c_{\text{воды}} = 4{,}2 \cdot 10^3$ Дж/кг·К; $\rho_{\text{воды}} = 1 \cdot 10^3$ кг/м³. Подставляя числовые данные, получим $V = 2{,}9 \cdot 10^{-3}$ м³ $= 2{,}9$ л.

10.62 Какую мощность P потребляет нагреватель электрического чайника, если объем V = 1 л воды закипает через время t = 5 мин? Каково сопротивление R нагревателя, если напряжение в сети U = 120 В? Начальная температура воды t_0 = 13,5 °С.

Решение

Для нагревания объема V воды до температуры кипения T_K за время τ необходимо количество тепла $Q = mc\Delta T = V\rho c\left(T_к - T_0\right)$ — (1). Количество тепла Q и мощность P связаны соотношением $Q = P\tau$ — (2). Приравнивая правые части уравнений (1) и (2), получим

$V\rho c(T_к - T_0) = P\tau$, откуда $P = \frac{V\rho c(T_к - T_0)}{\tau} = 1{,}2$ кВт. Сопротивление R нагревателя можно выразить из закона Ома: $R = \frac{U}{I}$. Мощность $P = IU$, откуда $I = \frac{P}{U}$. Тогда $R = \frac{U^2}{P} = 12$ Ом.

10.63 На плитке мощностью P = 0,5 кВт стоит чайник, в который налит объем V = 1 л воды при t_0 = 16 °C. Вода в чайнике закипела через время τ = 20 мин после включения плитки. Какое количество теплоты Q потеряно при этом на нагревание самого чайника, на излучение и т.д.?

Решение

Если бы потерь тепла не было, на нагревание воды до температуры кипения $T_к$ потребовалось бы количество тепла $Q_1 = mc\Delta T = V\rho c(T_к - T_0)$. На самом деле было израсходовано тепла $Q_2 = P\tau$. Отсюда потери тепла составили $Q = Q_2 - Q_1 = P\tau - V\rho c(T_к - T_0)$; $Q = 2{,}5 \cdot 10^5$ Дж.

10.64 Нагреватель электрической кастрюли имеет две одинаковые секции с сопротивлением R = 20 Ом каждая. Через какое время τ закипит объем V = 2,2 л воды, если: а) включена одна секция; б) обе секции включены последовательно; в) обе секции включены параллельно? Начальная температура воды t_0 = 16 °C, напряжение в сети U = 110 В, к.п.д. нагревателя η = 85 %.

Решение

а) Мощность нагревателя $P = IU = \frac{U^2}{R}$ — (1). За время τ выделится количество теплоты $Q = \eta P\tau$ — (2), которое пойдет на нагревание воды до температуры кипения $T_к$, т. е. $Q = V\rho c(T_к - T_0)$ — (3). Решая совместно уравнения (1) — (4), получим $\tau = \frac{V\rho c(T_к - T_0)R}{\eta U^2} = 1506$ с = 25 мин.

б) При последовательном включении секций их общее сопротивление равно $2R$. Отсюда $\tau = 50$ мин. в) При параллельном соединении секций их общее сопротивление равно $\frac{R}{2}$. Отсюда $\tau = 12{,}5$ мин.

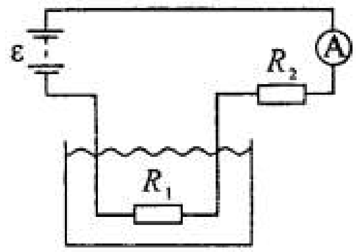
10.65 Нагреватель электрического чайника имеет две секции. При включении одной из них вода в чайнике закипит через время τ_1 = 15 мин, при включении другой — через время τ_2 = 30 мин. Через какое время τ закипит вода в чайнике, если включить обе секции: а) последовательно; б) параллельно?

Решение

В предыдущей задаче была получена формула, связывающая время нагрева воды τ и сопротивление R секции нагревателя. $\tau = \frac{mc\Delta T}{\eta U^2} R$. Поскольку τ прямо пропорционально R и величины, входящие в коэффициент при R, постоянны, т. е. они сократятся при преобразованиях, то можно записать: а) при последовательном соединении секций $\tau = \tau_1 + \tau_2 = 45$ мин; б) при параллельном соединении $\tau = \frac{\tau_1 \tau_2}{\tau_1 + \tau_2} = 10$ мин.

10.66 Нагреватель электрического чайника сопротивлением R_1 включен в цепь, как показано на рисунке. Э.д.с. батареи ε = 120 В, сопротивление R_2 = 10 Ом. Амперметр показывает ток I = 2 А. Через какое время закипит объем V = 0,5 л воды? Начальная температура воды t_0 = 4 °С. К.п.д. η = 76% нагревателя.

Решение

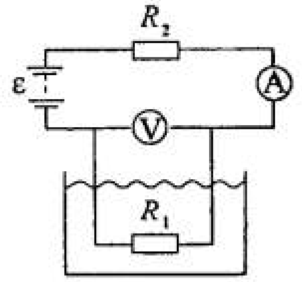


Имеем $\tau = \frac{V\rho c(T_к - T_0)R_1}{\eta U_1^2}$ (см. задачу 10.64). Т. к. сопротивления R_1 и R_2 включены последовательно, то ток в цепи $I = \frac{\varepsilon}{R_1 + R_2}$, отсюда $R_1 = \frac{\varepsilon}{I} - R_2 = 50$ Ом. Падение напряжения на сопротивлении R_1 равно $U_1 = IR_1 = 100$ В. Подставляя числовые данные, получим $\tau = 22$ мин.

10.67 Калориметр имеет спираль сопротивлением R_1, которая включена в цепь, как показано на рисунке. Э.д.с. батареи $\varepsilon = 110$ В, к.п.д. спирали $\eta = 80\%$. В калориметр налита масса $m = 500$ г керосина. Амперметр показывает ток $I = 2$ А, вольтметр показывает напряжение $U = 10{,}8$ В. Каково сопротивление R_1 спирали? Найти удельную теплоемкость с керосина, если за время $\tau = 5$ мин пропускания тока керосин нагрелся на $\Delta t = 5$ °C. Каково сопротивление R_2? Сопротивление вольтметра считать бесконечно большим.

Решение

Количество тепла, необходимое для нагревания керосина на Δt, есть $Q_1 = cm\Delta t$. По закону Джоуля — Ленца количество тепла, выделяемое спиралью за время τ, есть $Q_2 = IU\tau$. По закону сохранения энергии $Q_1 = \eta Q_2$ или $cm\Delta t = \eta IU\tau$, откуда удельная теплоемкость керосина $c = \eta \dfrac{IU\tau}{m\Delta t} = 2{,}07$ кДж/(кг·К). Из закона Ома для участка цепи сопротивление $R_1 = \dfrac{U}{I} = 5{,}4$ Ом.



По закону Ома для всей цепи ток $I = \dfrac{\varepsilon}{R_1 + R_2}$, откуда сопротивление $R_2 = \dfrac{\varepsilon}{I} - R_1 = 49{,}6$ Ом.

10.68 Объем $V = 4{,}5$ л воды можно вскипятить, затратив электрическую энергию $W = 0{,}5$ кВт·ч. Начальная температура воды $t_0 = 23$ °C. Найти к.п.д. η нагревателя.

Решение

Количество тепла, необходимое для того, чтобы вскипятить воду, $Q = cm(t_к - t_0) = c\rho V(t_к - t_0)$, где $c = 4{,}19$ кДж/(кг·К) — удельная теплоемкость воды, $m = \rho V$ — масса воды, $t_к = 100°$ C — температура кипения воды. По определению $\eta = \dfrac{Q}{W}$. Подставляя числовые данные, получим $\eta = \dfrac{c\rho V(t_к - t_0)}{W} = 0{,}8 = 80\,\%$.

10.69 Для отопления комнаты пользуются электрической печью, включенной в сеть напряжением U = 120 В. Комната теряет в единицу времени количество теплоты Q_τ = 87,08 МДж/сут. Требуется поддерживать температуру комнаты постоянной. Найти: а) сопротивление R печи; б) длину l нихромовой проволоки диаметром d = 1 мм, необходимой для обмотки такой печи; в) мощность P печи.

Решение

Мощность печи $P = \dfrac{Q_\tau}{\tau}$, где $\tau = 24\text{ ч} = 86400\text{ с}$, тогда $P = 1\text{ кВт}$. С другой стороны, $P = IU$, откуда сила тока в сети $I = \dfrac{P}{U}$ — (1). По закону Ома для участка цепи $I = \dfrac{U}{R}$ — (2). Приравнивая правые части уравнений (1) и (2), находим сопротивление печи $R = \dfrac{U^2}{P} = 14{,}4\text{ Ом}$. Сопротивление проволоки также можно выразить как $R = \rho\dfrac{l}{S}$, где ρ — удельное сопротивление материала проволоки, l — ее длина, S — площадь поперечного сечения. Тогда $l = \dfrac{RS}{\rho} = \dfrac{R\pi d^2}{4\rho} = 11{,}3\text{ м}$.

10.70 Температура водяного термостата объемом V = 1 л поддерживается постоянной при помощи нагревателя мощностью P = 26 Вт. На нагревание воды тратится 80% этой мощности. На сколько понизится температура воды в термостате за время τ = 10 мин, если нагреватель выключить?

Решение

Количество тепла, отданное водой при охлаждении, $Q_1 = cm\Delta t = c\rho V\Delta t$. По закону Джоуля — Ленца количество тепла нагревателя $Q_2 = IU\tau = P\tau$. По закону сохранения энергии $Q_1 = \eta Q_2$ или $c\rho V\Delta t = \eta P\tau$, откуда изменение температуры $\Delta t = \dfrac{\eta P\tau}{c\rho V} = 2{,}97°\text{ C}$.

10.71 Сколько надо заплатить за пользование электрической энергией в месяц (30 дней), если ежедневно в течение времени $\tau = 6$ ч горят две 120-вольтовых лампочки, потребляющие ток $I = 0{,}5$ А? Кроме того, ежедневно кипятится объем $V = 3$ л воды. Начальная температура воды $t_0 = 10$ °С. Стоимость 1 кВт·ч энергии принять равной 4 коп. К.п.д. нагревателя $\eta = 80\%$.

Решение

Количество энергии, потребляемое в сутки лампочками, $w_1 = 2IU\tau$, а в месяц $W_1 = 30w_1 = 60IU\tau$. Количество энергии, необходимое для нагревания воды в сутки, $Q = C\rho V(t_к - t_0)$, при этом затрачивается энергия $W = cm\Delta T = c\rho V\Delta T$, а в месяц $W_2 = \dfrac{30c\rho V(t_к - t_0)}{\eta}$. Полная энергия, которая расходуется за месяц, $W = W_1 + W_2 = 30\left(2IU\tau + \dfrac{c\rho V(t_к - t_0)}{\eta}\right) = 120{,}18$ МДж. За пользование электроэнергией надо заплатить $N = \dfrac{W \cdot n}{10^3 \cdot 3600} = 133$ коп.= =1р. 33коп.

10.72 Электрический чайник, содержащий объем $V = 600$ см^3 воды при $t_0 = 9$ °С, забыли выключить. Сопротивление нагревателя чайника $R = 16$ 0м. Через какое время τ после включения вода в чайнике выкипит? Напряжение в сети $U = 120$ В, к.п.д. нагревателя $\eta = 60\%$.

Решение

По закону Джоуля — Ленца $Q_{полн} = I^2R\tau$; $Q_{полезн} = Q_1 + Q_2$. Количество теплоты, необходимое для нагревания воды до температуры кипения, $Q_1 = cm(t_к - t_0)$. Количество теплоты, необходимое для испарения воды, $Q_2 = rm$. По закону сохранения энергии $Q_{полезн} = \eta Q_{полн}$; $cm(t_к - t_0) + rm = \eta I^2R\tau$; $m = \rho V$. По закону Ома $I = \dfrac{U}{R}$, отсюда $I^2 = \dfrac{U^2}{R^2}$; $\rho V\left[c(t_K - t_0) + r\right] = \eta\dfrac{U^2}{R}\tau$, следовательно,

$$\tau = \frac{\rho VR\left[c(t_к - t_0) + r\right]}{\eta U^2}; \ \tau = 49 \text{ мин.}$$

10.73 В ртутном диффузионном насосе в единицу времени испаряется масса $m_\tau = 100$ г/мин ртути. Каково должно быть сопротивление R нагревателя насоса, если он включается в сеть напряжением $U = 127$ В? Удельная теплота парообразования ртути $q = 296$ кДж/кг.

Решение

Количество тепла, необходимое для испарения ртути, $Q = qm$ — (1). С другой стороны, по закону Джоуля — Ленца $Q = IU\tau$ — (2). Приравниваем правые части уравнений (1) и (2) $qm = IU\tau$, отсюда сила тока нагревателя насоса $I = \frac{qm}{U\tau} = \frac{qm_\tau}{U}$. Из закона Ома для участка цепи сопротивление нагревателя насоса $R = \frac{U}{I} = \frac{U^2}{qm_\tau} = 32{,}69$ Ом.

10.74 В цепь, состоящую из медного провода площадью поперечного сечения $S_1 = 3$ мм^2, включен свинцовый предохранитель площадью поперечного сечения $S_2 = 1$ мм^2. На какое повышение температуры Δt_1 медного провода при коротком замыкании цепи рассчитан предохранитель? Считать, что при коротком замыкании вследствие кратковременности процесса все выделившееся тепло идет на нагревание цепи. Начальная температура предохранителя $t_0 = 17$ °C.

Решение

В медном проводе выделится количество теплоты $Q_1 = m_1c_1\Delta T_1 = \rho_1 l_1 S_1 c_1 \Delta T_1$ — (1), где ρ_1 — плотность меди, l_1 — длина провода, c_1 — удельная теплоемкость меди. В свинцовом предохранителе выделится количество теплоты $Q_2 = m_2c_2\Delta T_2 + m_2 r = \rho_2 l_2 S_2 \left(c_2\left(T_{пл} - T_0\right) + r\right)$ — (2), где ρ_2 — плотность свинца, l_2 — длина предохранителя, c_2 — удельная теплоемкость свинца, r — удельная теплота плавления свинца. По закону Джоуля — Ленца $Q_1 = I_1^2 R_1 t$, $Q_2 = I_2^2 R_2 t$. Поскольку провод и предохранитель включены в цепь последовательно, то $I_1 = I_2$, тогда $\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{R_1}{R_2} = \frac{\rho_1' l_1 S_2}{\rho_2' l_2 S_1}$ — (3), где ρ_1' и ρ_2' — удельные сопротивления меди и свинца. Из уравнений (1) — (3) найдем

$$\frac{\rho_1 l_1 S_1 c_1 \Delta T_1}{\rho_2 l_2 S_2 \left(c_2\left(T_{пл} - T_0\right) + r\right)} = \frac{\rho_1' l_1 S_2}{\rho_2' l_2 S_1},$$ откуда

$$\Delta T_1 = \frac{\rho_2 \rho_1' S_2^2 \left(c_2\left(T_{пл} - T\right)_0 + r\right)}{\rho_2' \rho_1 S_1^2 c_1}.$$ Подставляя числовые данные, получим $\Delta T_1 = 1{,}8$ К.

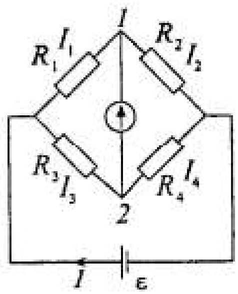
10.75 Найти количество теплоты Q_τ, выделившееся в единицу времени в единице объема медного провода при плотности тока $j = 300$ кА/м^2.

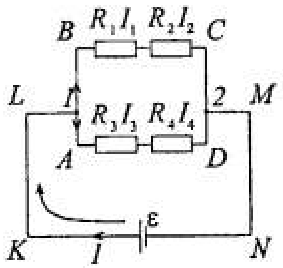
Решение

Согласно закону Джоуля — Ленца за время τ в проводнике выделяется количество теплоты $Q = I^2 R\tau$. Тогда в единицу времени в единице объема проводника выделится количество теплоты $Q_\tau = \dfrac{I^2 R}{V}$. Имеем $R = \rho\dfrac{l}{S}$; $V = Sl$, тогда $Q_\tau = \dfrac{I^2}{S^2}\rho$, где $\rho = 0{,}017\cdot10^{-6}$ Ом·м — удельное сопротивление меди. Плотность тока $j = \dfrac{I}{S}$, отсюда $Q_\tau = j^2\rho = 1{,}5\cdot10^3$ Дж/(м^3·с).

10.76 Найти токи I_1 в отдельных ветвях мостика Уитстона при условии, что через гальванометр идет ток $I_\tau = 0$. Э.д.с. элемента $\varepsilon = 2$ В, сопротивления $R_1 = 30$ Ом, $R_2 = 45$ Ом и $R_3 = 200$ Ом.

Решение

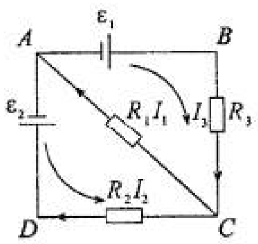




Т. к. $I_г = 0$, то потенциалы в точках 1 и 2 одинаковые, следовательно, можно рассматривать упрощенную эквивалентную схему. По первому правилу Кирхгоффа для узла 1 имеем: $I = I_1 + I_3$ — (1). По второму правилу Кирхгоффа для контуров $KLBCMN$ и $KLADMN$ соответственно имеем: $\varepsilon = I_1(R_1 + R_2)$ — (2) и $\varepsilon = I_3(R_3 + R_4)$ — (3). Поскольку $U_{AD} = U_{BC}$, а также $I_1 = I_2$ и $I_3 = I_4$, то падения потенциалов на сопротивлениях R_2 и R_4 равны между собой, то $I_1R_2 = I_3R_4$ — (4). Из уравнения (2) находим, что $I_1 = I_2 = \dfrac{\varepsilon}{R_1 + R_2}$ — (5). Подставляя числовые данные, получим $I_1 = I_2 = 26{,}7$ мА. Из уравнения (3) находим, что $I_3 = \dfrac{\varepsilon}{R_3 + R_4}$ — (6), а из уравнения (4) находим, что $R_4 = \dfrac{I_1R_2}{I_3}$ — (7). Подставляя (5) в (7), получаем $R_4 = \dfrac{R_2\varepsilon}{I_3(R_1 + R_2)}$ — (8). Решая совместно уравнения (6) и (8) и учитывая, что $I_3 = I_4$, окончательно получаем $I_3 = I_4 = \dfrac{R_1\varepsilon}{R_3(R_1 + R_2)} - 4$ мА.

10.77 Э.д.с. элементов $\varepsilon_1 = 2{,}1$ В и $\varepsilon_2 = 1{,}9$ В, сопротивления $R_1 = 45$ Ом, $R = 10$ Ом и $R_3 = 10$ Ом. Найти токи I, во всех участках цепи.

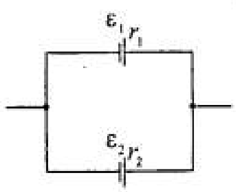
Решение



На рисунке стрелками указано выбранное направление токов. Для узла A согласно первому правилу Кирхгоффа имеем $I_1 + I_2 = I_3$. Для контуров ABC и ACD по второму правилу Кирхгоффа имеем $I_3R_3 + I_1R_1 = \varepsilon_1$, $I_1R_1 - I_2R_2 = \varepsilon_2$. Подставляя числовые данные, получим систему уравнений: $I_3 = I_1 + I_2$, $10I_3 + 45I_1 = 2.1$, $45I_1 - 10I_2 = 1.9$. Решая эту систему, получим $I_1 = 0{,}04$ А, $I_2 = -0.01$ А, $I_3 = 0{,}03$ А. Знак «минус» у тока I_2 указывает на то, что его направление противоположно выбранному.

10.78 Какая разность потенциалов U получается на зажимах двух элементов, включенных параллельно, если их э.д.с. $\varepsilon_1 = 1{,}4$ В и $\varepsilon_2 = 1{,}2$ В и внутреннее сопротивление $r_1 = 0{,}6$ Ом и $r_2 = 0{,}4$ Ом?

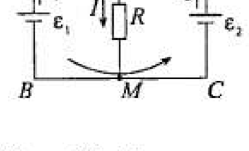
Решение



Согласно закону Ома для неоднородного участка цепи $I = \frac{\varepsilon_1 + (\varphi_1 - \varphi_2)}{r_1}$; $I = \frac{-\varepsilon_2 + (\varphi_1 - \varphi_2)}{r_2}$. Таким образом, $\frac{\varepsilon_1 + U}{r_1} = \frac{-\varepsilon_2 + U}{r_2}$, откуда $r_2(\varepsilon_1 - U) = r_1(U - \varepsilon_2)$; $r_2\varepsilon_1 - r_2U = r_1U - r_1\varepsilon_2$; $U = \frac{r_2\varepsilon_1 + r_1\varepsilon_2}{r_1 + r_2}$; $U = 1{,}28$ В.

10.79 Два элемента с одинаковыми э.д.с. $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 2$ В и внутренними сопротивлениями $r_1 = 1$ Ом и $r_2 = 2$ Ом замкнуты на внешнее сопротивление R. Через элемент с э.д.с. ε_1 течет ток $I_1 = 1$ А. Найти сопротивление R и ток I_2, текущий через элемент с э.д.с. ε_2. Какой ток I течет через сопротивление R?

Решение



Выберем и рассмотрим два контура $ABCD$ и $ABMN$. Для каждого из них выберем направление обхода. Предположительно определим направление токов в каждом из элементов схемы. По второму правилу Кирхгоффа для контура $ABCD$ имеем $\varepsilon_2 - \varepsilon_1 = I_2r_2 - I_1r_1$ — (1); для контура $ABMN$ имеем $-\varepsilon_1 = -I_1r_1 - IR$ — (2). По первому правилу Кирхгоффа для узла N имеем $I = I_1 + I_2$ — (3). Из уравнения (1) ток $I_2 = \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1 + I_1r_1}{r_2} = 0{,}5$ А. Решаем систему уравнений методом подстановки, т. к. у нас есть три уравнения и три неизвестных. Подставив найденное значение тока I_2 в уравнение (3), найдем ток $I = I_1 + I_2 = 1{,}5$ А. Из уравнения (2) сопротивление $R = \frac{\varepsilon_1 - I_1R}{I} = 0{,}66$ Ом.

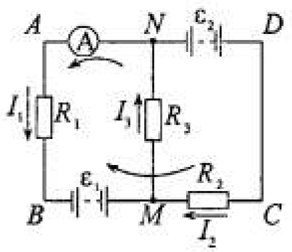
10.80 Два элемента с одинаковыми э.д.с. $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 4$ В и внутренними сопротивлениями $r_1 = r_2 = 0{,}5$ Ом замкнуты на внешнее сопротивление R. Через элемент с э.д.с. ε_1 течет ток $I_1 = 2$ А. Найти сопротивление R и ток I_2, текущий через элемент с э.д.с. ε_2. Какой ток I течет через сопротивление R?

Решение

Т. к. внутренние сопротивления источников э.д.с. равны, то токи (см. задачу 10.79) $I_1 = I_2 = 2$ А, а, следовательно, $I = 2I_1 = 4$ А, тогда сопротивление $R = \dfrac{\varepsilon_1 - I_1 r_1}{I} = 0{,}75$ Ом.

10.81 Батареи имеют э.д.с. $\varepsilon_1 = 110$ В и $\varepsilon_2 = 220$ В, сопротивления $R_1 = R_2 = 100$ Ом, $R_3 = 500$ Ом. Найти показание амперметра.

Решение



Выберем и рассмотрим два контура $ABCD$ и $ABMN$, для каждого из них выберем направление обхода. Предположительно определим направление токов в каждом сопротивлении. По второму правилу Кирхгоффа для контура $ABMN$ имеем $\varepsilon_1 = I_3 R_3 + I_1 R_1$ — (1); для контура $ABCD$ имеем $\varepsilon_2 - \varepsilon_1 = -I_2 R_2 - I_1 R_1$ — (2). Согласно первому правилу Кирхгоффа для узла M имеем $I_3 = I_1 + I_2$ — (3). Из уравнения (1) ток $I_3 = \dfrac{\varepsilon_1 - I_1 R_1}{R_3}$, а из уравнения (2) ток $I_2 = \dfrac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1 + I_1 R_1}{R_2}$. Амперметр покажет ток через сопротивление R_1, который из уравнения (3) $I_1 = I_3 - I_2 = \dfrac{\varepsilon_1 - I_1 R_1}{R_3} - \dfrac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1 + I_1 R_1}{R_2}$ или окончательно $I_1 = \dfrac{\varepsilon_1 R_2 - \varepsilon_2 R_3 + \varepsilon_1 R_3}{R_2 R_3 + R_1 R_2 + R_1 R_3} = -0{,}4$ А. Знак «минус» означает, что мы ошиблись в выборе направления тока I_1, т. е. он течет в противоположном направлении.

10.82 Батареи имеют э.д.с. $\varepsilon_1 = 2$ В и $\varepsilon_2 = 4$ В, сопротивление $R_1 = 0{,}5$ Ом (см. рисунок к задаче 10.81). Падение потенциала на сопротивлении R_2 равно $U_2 = 1$В (ток через R_2 направлен справа налево). Найти показание амперметра.

Решение

Выберем и рассмотрим два контура $NMCD$ и $ABMN$. Для каждого из них выберем направление обхода. Предположительно определим направление токов в каждом из элементов схемы. По второму правилу Кирхгоффа для контура $ABMN$ имеем $I_1R_1 + I_3R_3 = \varepsilon_1$, для контура $NMCD$ имеем $I_3R_3 + I_2R_2 = \varepsilon_2$. Падение сопротивления на R_2: $U_2 = I_2R_2$. Подставляя числовые данные, получим систему уравнений $\begin{cases} 0{,}5I_1 - I_3R_3 = -2, \\ I_3R_3 + 1 = 4. \end{cases}$ Решив эту систему, получим $I_1 = 2$ А.

10.83 Батареи имеют э.д.с. $\varepsilon_1 = 30$ В и $\varepsilon_2 = 5$ В, сопротивления $R_2 = 10$ Ом, $R_3 = 20$ Ом (см. рисунок к задаче 10.81). Через амперметр течет ток $I = 1$ А, направленный от R_3 к R_1. Найти сопротивление R_1.

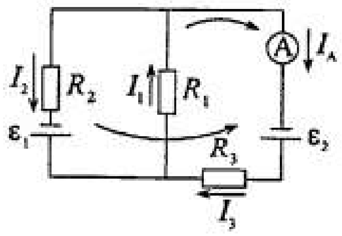
Решение

Воспользуемся результатами задачи 10.81 $I_1 = \dfrac{\varepsilon_1R_2 - \varepsilon_2R_3 + \varepsilon_1R_3}{R_2R_3 + R_1R_2 + R_1R_3}$. Преобразуем это выражение и выразим из него R_1: $I_1R_2R_3 + I_1R_1R_1 + I_1R_1R_3 = \varepsilon_1R_2 - \varepsilon_2R_3 + {}$ ${} + \varepsilon_1R_3 - I_1R_2R_3$; $\quad R_1I_1(R_2 + R_3) = R_2(\varepsilon_1 - I_1R_3) + R_3(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)$;

$$R_1 = \frac{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)R_2 + (\varepsilon_1 - R_2I_1)R_3}{I_1(R_2 + R_3)} = \frac{100 + 500}{30} = 20\,\text{Ом}.$$

10.84 Батареи имеют э.д.с. $\varepsilon_1 = 2$ В и $\varepsilon_2 = 3$ В, сопротивления $R_1 = 1$ кОм, $R_2 = 0{,}5$ кОм и $R_3 = 0{,}2$ кОм, сопротивление амперметра $R_A = 0{,}2$ кОм. Найти показание амперметра.

Решение

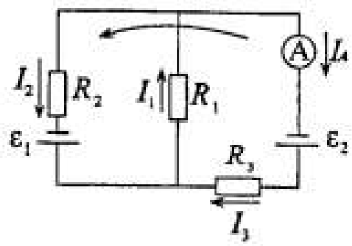


Выберем и рассмотрим два контура, для каждого из них выберем направление обхода. Предположительно определим направление токов в каждом сопротивлении и амперметре. Для каждого контура запишем уравнение по второму правилу Кирхгоффа $\varepsilon_2 = I_3R_3 + I_1R_1 + I_AR_A$ — (1); $\varepsilon_1 - \varepsilon_2 = I_2R_2 - I_3R_3 - I_AR_A$ — (2). С учетом $I_A = I_3$ уравнения (1) и (2) можно переписать следующим образом: $\varepsilon_2 = I_A(R_3 + R_A) + I_1R_1$ или $I_1 = \dfrac{\varepsilon_2 - I_A(R_3 + R_A)}{R_1}$ — (5); $\varepsilon_1 - \varepsilon_2 = I_2R_2 - I_A(R_3 - R_A)$ или $I_2 = \dfrac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2 + I_A(R_3 + R_A)}{R_2}$ — (6). Из уравнения (3), с учетом уравнений (5) и (6), имеем $I_A = I_2 - I_1 = \dfrac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2 + I_A(R_3 + R_A)}{R_2} - \dfrac{\varepsilon_2 - I_A(R_3 + R_A)}{R_1}$, откуда ток через амперметр $I_A = \dfrac{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)R_1 - \varepsilon_2R_2}{R_2R_3 - (R_3 + R_A)(R_1 - R_2)} = -0{,}45$ А. Знак «минус» означает, что направление тока I_A противоположно направлению, указанному на рисунке.

10.85 Батареи имеют э.д.с. $\varepsilon_1 = 2$ В и $\varepsilon_2 = 3$ В, сопротивление $R_3 = 1{,}5$ кОм, сопротивление амперметра $R_4 = 0{,}5$ кОм Падение потенциала на сопротивлении R_2 равно $U_2 = 1$ В (ток через R_2 направлен сверху вниз). Найти показание амперметра.

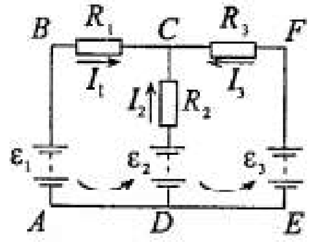
Решение

Выберем контур, направление обхода по нему и запишем для него уравнение по второму правилу Кирхгоффа $\varepsilon_1 - \varepsilon_2 = U_2 - I_3R_3 - I_AR_A$. Кроме того, по первому правилу Кирхгоффа $I_1 = I_2 + I_A$. Отсюда показание амперметра $I_A = \dfrac{U_2 - \varepsilon_1 + \varepsilon_2}{R_3 + R_A} = 1$ мА.



10.86 В схеме, изображенной на рисунке к задаче 10.86, токи I_1 и I_3 направлены справа налево, ток I_2 — сверху вниз. Падения потенциала па сопротивлениях R_1, R_2 и R_3 равны $U_1 = U_2 = U_3 = 10$ В. Найти э.д.с. ε_2 и ε_3, если э.д.с. $\varepsilon_1 = 25$ В.

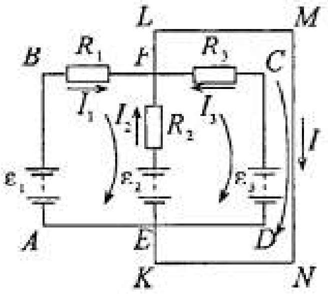
Решение



Выберем и рассмотрим два контура, для каждого из них выберем направление обхода. Предположительно определим направление токов в каждом сопротивлении. Для каждого контура запишем уравнение по второму правилу Кирхгофа $\varepsilon_3 - \varepsilon_1 = I_1R_1 - I_3R_3$ — (1); $\varepsilon_2 - \varepsilon_1 = I_2R_2 + I_1R_1$ — (2). Согласно первому правилу Кирхгоффа $I_2 = I_1 + I_3$ — (3). Подставим (3) в (2), тогда $\varepsilon_2 - \varepsilon_1 = I_1R_2 + I_3R_2 + I_1R_1$, откуда $I_3 = \dfrac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1 - I_1R_2 - I_1R_1}{R_2}$ — (4). После подстановки (4) в (1) получаем $I_1 = \dfrac{(\varepsilon_3 - \varepsilon_1)R_2 + (\varepsilon_2 - \varepsilon_1)R_3}{R_1R_2 + R_2R_3 + R_1R_3} = 385$ мА. Подставляя найденное значение тока I_1 в уравнение (4), получаем $I_3 = -308$ мА. Знак «минус» означает, что направление тока I_3 противоположно указанному на рисунке направлению. Подставляя найденное значение токов I_1 и I_3 в уравнение (3), находим $I_2 = 77$ мА.

10.87 Батареи имеют э. д. с. $E_1 = E_2 = E_3 = 6$ В, сопротивления $R_1 = 20$ Ом, $R_2 = 12$ Ом (рис. 46). При коротком замыкании верхнего узла схемы с отрицательным зажимом батарей через замыкающий провод течет ток $I = 1{,}6$ А. Найти токи I_iво всех участках цепи и сопротивление R_3.

Решение



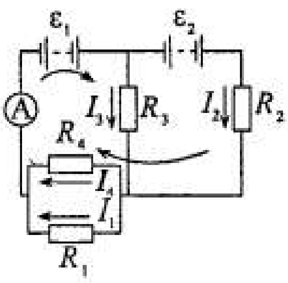
Для контура $ABFE$ по второму правилу Кирхгоффа при направлении обхода по часовой стрелке имеем $\varepsilon_1 - \varepsilon_2 = I_1R_1 - I_2R_2$ и т. к. $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$, то $I_1R_1 = I_2R_2$ — (1). Для контура $FCDE$ по второму правилу Кирхгоффа, при направлении обхода по часовой стрелке, имеем $\varepsilon_2 - \varepsilon_3 = I_2R_2 - I_3R_3$, т. к. $\varepsilon_2 = \varepsilon_3$, то $I_3R_3 = I_2R_2$ — (2). При коротком замыкании узлов E и F получаем контур $KLMN$, для которого по второму правилу Кирхгоффа имеем $\varepsilon_2 = I_2R_2$ — (3). откуда ток через сопротивление R_2 равен $I_2 = \dfrac{\varepsilon_2}{R_2} = 0{,}5$ А.

По первому правилу Кирхгоффа для узла F имеем $I_1 + I_2 + I_3 = I$ — (4). Из уравнсния (1) с учетом (3) $I_1R_1 = \varepsilon_2$ находим ток через сопротивление R_1: $I_1 = \dfrac{\varepsilon_2}{R_1} = 0.3$ А. Из уравнения (4) находим ток через сопротивление R_3: $I_3 = I - I_1 - I_2 = 0{,}8$ А. Из уравнения (2) с учетом (3) сопротивление $R_3 = \dfrac{\varepsilon_2}{I_3} = 7{,}5$ Ом.

10.88 В схеме, изображенной на рисунке, токи I_1 и I_3 направлены справа налево, ток I_2 — сверху вниз. Падения потенциала на сопротивлениях R_1, R_2 и R_3 равны$U_1 = U_3 = 2U_2 = 10$ В. Найти э. д. с. E_2 и E_3, если э. д. с. $E_1 = 25$ В.

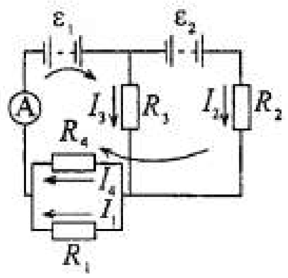
Решение

Рассмотрим контур $ABCD$. По второму правилу Кирхгоффа $U_1 - U_2 = \varepsilon_2 - \varepsilon_2$ и $U_1 = 2U_2$, отсюда $\varepsilon_2 = U_1 - \dfrac{U_1}{2} + \varepsilon_1 = \dfrac{U_1}{2} + \varepsilon_1$; $\varepsilon_2 = 30$ В. Аналогично рассмотрим контур $CDFE$. По второму правилу Кирхгоффа $U_3 + U_2 = \varepsilon_3 - \varepsilon_2$ и $U_3 = 2U_2$, откуда $\varepsilon_3 = \dfrac{U_3}{2} + U_3 + \varepsilon_2$; $\varepsilon_3 = 45$ В.



10.89 Батареи имеют э.д.с. $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 100$ В, сопротивления $R_1 = 20$ Ом, $R_2 = 10$ Ом, $R_3 = 40$ Ом и $R_4 = 30$ Ом. Найти показание амперметра.

Решение



Выберем и рассмотрим два контура, для каждого из них выберем направление обхода. Предположительно определим направление токов в каждом сопротивлении. Для каждого контура запишем уравнение по второму правилу Кирхгоффа $\varepsilon_1 = I_3R_3 + I_{14}R_{14}$ — (1);

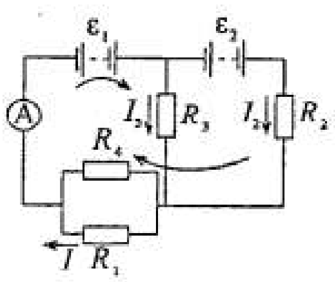
$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 = I_2R_2 + I_{14}R_{14}$ — (2), где $R_{14} = \dfrac{R_1R_4}{R_1 + R_4}$ — (3), т. к. сопротивления R_1 и R_4 соединены параллельно. Согласно первому правилу Кирхгоффа $I_{14} = I_3 + I_2$ — (4), где I_{14} — ток, который покажет амперметр. Из уравнений (1) и (2) находим токи $I_3 = \dfrac{\varepsilon_1 - I_{14}R_{14}}{R_3}$ и $I_2 = \dfrac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2 - I_{14}R_{14}}{R_2}$ и подставляем их в уравнение (4), тогда $I_{14} = \dfrac{\varepsilon_1 - I_{14}R_{14}}{R_3} + \dfrac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2 - I_{14}R_{14}}{R_2}$ — (5). Из уравнения (5) с учетом (3) окончательно получаем

$$I_{14} = \frac{\varepsilon_1R_2 + (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)R_3}{R_3R_2 + R_1R_4(R_2 + R_3)/(R_1 + R_4)} = -9 \text{ мА}.$$

Знак «минус» означает, что ток I_{14} имеет направление, противоположное указанному на рисунке.

10.90 Батареи имеют э.д.с. $\varepsilon_1 = 2\varepsilon_2$, сопротивления $R_1 = R_3 = 20$ Ом, $R_2 = 15$ Ом и $R_4 = 30$ Ом. Через амперметр течет ток $I = 1{,}5$ А, направленный снизу вверх. Найти э.д.с. ε_1 и ε_2 а также токи I_2 и I_3, текущие через сопротивления R_2 и R_3.

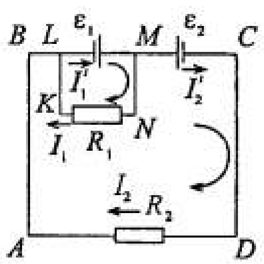
Решение



Т. к. по условию батареи имеют э.д.с. $\varepsilon_1 = 2\varepsilon_2$, то уравнения по второму правилу Кирхгоффа (см. задачу 10.89) запишутся следующим образом: $2\varepsilon_2 = I_3R_3 + IR_{14}$ — (1) и $3\varepsilon_2 = I_2R_2 + IR_{14}$ — (2), где I — показание амперметра, $R_{14} = \dfrac{R_1R_4}{R_1 + R_4}$ — (3) — общее сопротивление R_1 и R_4, т. к. они соединены параллельно. Т. к. $I = I_3 + I_2$ — (4), то $I_2 = I - I_3$ — (5), следовательно, после подстановки (5) в (2) имеем $3\varepsilon_2 = (I - I_3)R_2 + IR_{14}$ или $I_2 = \dfrac{I(R_2 + R_{14}) - 3\varepsilon_2}{R_2}$ — (6). Подставив (6) и (3) в (1), найдем э.д.с. $\varepsilon_2 = \dfrac{I[R_2R_3 + R_1R_4(R_3 + R_2)/(R_1 + R_4)]}{2R_2 + 3R_3} = 12$ В, тогда $\varepsilon_1 = 2\varepsilon_2 = 24$ В. Подставив в уравнение (6) найденное значение ε_2, находим ток $I_3 = 0{,}3$ А; после чего из уравнения (5) ток $I_2 = 1{,}2$ А.

10.91 Два одинаковых элемента имеют э.д.с. $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 2$ В и внутренние сопротивления $r_1 = r_2 = 0{,}5$ Ом. Найти токи I_1 и I_2, текущие через сопротивления $R_1 = 0{,}5$ Ом и $R_2 = 1{,}5$ Ом, а также ток I через элемент с э.д.с. ε_1.

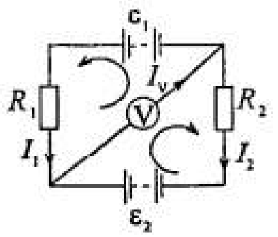
Решение



Для контура $KLMN$ по второму правилу Кирхгоффа при направлении обхода по часовой стрелке имеем $\varepsilon_1 = I_1R_1 + I_1'r_1$ — (1). Аналогично для контура $ABCD$: $\varepsilon_1 - \varepsilon_2 = I_1R_1 + I_2'r_2 + I_1'r_1$ — (2). По первому правилу Кирхгоффа для узлов L и M соответственно получаем $I_1' = I_1 + I_2$ — (3) и $I_1' = I_1 + I_2$ — (4). Из уравнений (3) и (4) следует, что $I_2' = I_2$. Т. к. $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$, то из уравнения (2) с учетом (4) получаем $I_2(R_2 + r_2) = -I_1'r_1$, откуда ток $I_2 = -\dfrac{I_1'r_1}{R_2 + r_2}$ — (5), а из уравнения (1) ток $I_1 = \dfrac{\varepsilon_1 - I_1'r_1}{R_1}$ — (6). Подставляя (5) и (6) в (3), получаем $I_1' = \dfrac{\varepsilon_1 - I_1'r_1}{R_1} - \dfrac{I_1'r_1}{R_2 + r_2}$, откуда ток через элемент ε_1 равен $I_1' = \dfrac{\varepsilon_1(R_2 + r_2)}{R_1R_2 + R_1r_2 + r_1R_2 + r_1r_2 + r_1R_1} = 1{,}78$ А. Из уравнения (5) ток через сопротивление R_2 равен $I_2 = -0{,}46$ А. Из уравнения (3) ток через сопротивление R_1 равен $I_1 = I_1' - I_2 = 2{,}24$ А.

10.92 Батареи имеют э.д.с. $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$, сопротивления $R_2 = 2R_1$. Во сколько раз ток, текущий через вольтметр, больше тока, текущего через сопротивление R_2?

Решение



Выберем и рассмотрим два контура, для каждого из них выберем направление обхода. Предположительно определим направление токов в каждом сопротивлении и в вольтметре. По второму правилу Кирхгоффа для каждого контура имеем $\varepsilon_1 = I_1R_1 + I_VR_V$ — (1) и $\varepsilon_2 = I_2R_2 + I_VR_V$ — (2) и т. к. по условию $R_2 = 2R_1$, то уравнение (2) можно переписать в виде $\varepsilon_2 = 2I_1R_1 + I_VR_V$ — (3). Согласно первому правилу Кирхгоффа $I_V = I_1 + I_2$ — (4), откуда $I_1 = I_V - I_2$ — (5). Вычтем из (3) (1), тогда $\varepsilon_2 - \varepsilon_1 = 2I_2R_1 - I_1R_1 = 0$, т. к. по условию $\varepsilon_2 = \varepsilon_1$, следовательно, с учетом (5) $2I_2R_1 = (I_V - I_2)R_1$, откуда $I_V = 3I_2$.

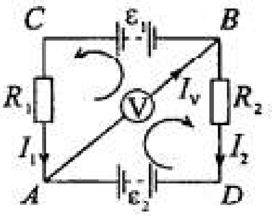
10.93 Батареи имеют э.д.с. $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 110$ В, сопротивления $R_1 = R_2 = 0{,}2$ кОм, сопротивление вольтметра $R_1 = 1$ кОм (см. рисунок к задаче 10.92). Найти показание вольтметра.

Решение

По второму правилу Кирхгоффа (см. задачу 10.92) $\varepsilon_1 = I_1R_1 + U$ — (1) и $\varepsilon_2 = I_2R_2 + U$ — (2), где $U = I_VR_V$ — показание вольтметра. Т. к. по условию $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$ и $R_1 = R_2$, то из уравнений (1) и (2) следует, что $I_1 = I_2$. Согласно первому правилу Кирхгоффа $I_V = I_1 + I_2 = 2I_1$, тогда $U = 2I_1R_V$ или $I_1 = \frac{U}{2R_V} + U = U\left(\frac{R_1}{2R_V} + 1\right)$, откуда показание вольтметра $U = \frac{2R_V\varepsilon_1}{R_1 + 2R_V} = 100$ В.

10.94 Батареи имеют э.д.с. $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$, сопротивления $R_1 = R_2 = 100$ Ом, сопротивление вольтметра $R_V = 150$ Ом (см. рисунок к задаче 10.93). Показание вольтметра $U = 150$ В. Найти э.д.с. ε_1 и ε_2 батарей.

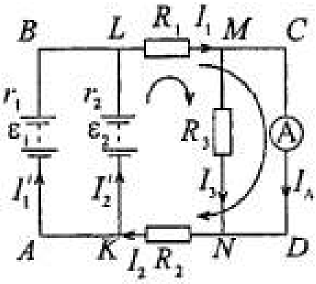
Решение



По первому правилу Кирхгоффа $I_1 + I_2 = I_V$. По второму правилу Кирхгоффа для контуров ABC и ABD соответственно имеем: $I_1R_1 + I_VR_V = \varepsilon_1$ и $I_2R_2 + I_VR_V = \varepsilon_2$. По закону Ома $I_VR_V = U$, отсюда $I_1R_1 + U = \varepsilon_1$ и $I_2R_2 + U = \varepsilon_2$. Т. к. $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$ и $R_1 = R_2$, то $(I_1 + I_2)R_1 + 2U = 2\varepsilon_1$; $I_VR_1 + 2U = 2\varepsilon_1$; $\varepsilon_1 = \dfrac{I_VR_1}{2} + U$. По закону Ома $I_V = \dfrac{U}{R_V}$, отсюда $\varepsilon_1 = \dfrac{UR_1}{2R_V} + U = U\left(\dfrac{R_1}{2R_V} + 1\right)$; $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 200$ В.

10.95 Элементы имеют э.д.с. $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 1{,}5$ *В* и внутренние сопротивления $r_1 = r_2 = 0{,}5$ Ом, сопротивления $R_1 = R_2 = 5$ Ом и $R_3 = 1$ Ом, сопротивление амперметра $R_A = 3$ Ом. Найти показание амперметра.

Решение

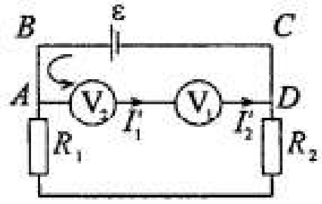


Выберем и рассмотрим три контура, для каждого из них выберем направление обхода. Предположительно определим направление токов в каждом сопротивлении и в амперметре. По второму правилу Кирхгоффа для контура $KLCD$ имеем $\varepsilon_2 = I_1R_1 + I_AR_A + I_2'r_2$ — (1). Для контура $ABCD$ имеем $\varepsilon_1 = I_1R_1 + I_AR_A + I_2R_2 + I_1'r_1$ — (2). Для контура $ABMN$ имеем $\varepsilon_1 = I_1R_1 + I_3R_3 + I_2R_2 + I_1'r_1$ — (3). По первому правилу Кирхгоффа для узла M $I_1 = I_3 + I_A$ — (4). Для узла N $I_2 = I_3 + I_A$ — (5). Вычитая (3) из (2), найдем $I_AR_A = I_3R_3$ или $3I_A = I_3$. Подставляя это выражение в (4), получим $I_1 = 4I_A$. Вычитая (2) из (1), найдем $I_2' = I_1'$. Из (4) и (5) следует, что $I_1 = I_2 = 4I_A$. Подставляя данное выражение в (1), найдем $19I_A + 0{,}5I_2' = 1{,}5$, откуда $I_2' = I_1' = 3 - 38I_A$. Из (5) имеем $4I_A = I_1' + I_2' = 6 - 76I_A$; $80I_A = 6$, отсюда ток, текущий через амперметр, $I_A = 75$ мА.

10.96 Элемент имеет э.д.с. $\varepsilon = 200$ В, сопротивления $R_1 = 2$ кОм и $R_2 = 3$ кОм, сопротивления вольтметров $R_{ri} = 3$ кОм и $R_{v2} = 2$ кОм. Найти показание вольтметров V_1 *а* V_2, если ключ K: а) разомкнут, б) замкнут. Задачу решить, применяя законы Кирхгоффа.

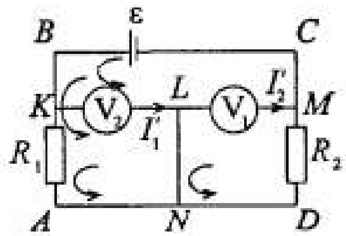
Решение

а) Если ключ разомкнут, то схема принимает упрощенный вид, изображенный на рисунке. Рассмотрим контур $ABCD$ и выберем направление обхода против часовой стрелки. Тогда по второму правилу Кирхгоффа для данного контура



$\varepsilon = I_1' R_{V1} + I_2' R_{V2}$ — (1), но т. к. вольтметры соединены между собой последовательно, то токи $I_1' = I_2'$ — (2). Уравнение (1) с учетом (2) можно переписать следующим образом: $\varepsilon = I_1'(R_{V1} + R_{V2})$, откуда ток через вольтметры $I_1' = \dfrac{\varepsilon}{R_{V1} + R_{V2}}$. Вольтметры в данном случае покажут падение напряжений на своих собственных сопротивлениях, т. е. $U_1 = I_1' R_{V1} = \dfrac{\varepsilon R_{V1}}{R_{V1} + R_{V2}} = 120$ В; $U_2 = I_1' R_{V2} = \dfrac{\varepsilon R_{V2}}{R_{V1} + R_{V2}} = 80$ В.

б) Если ключ замкнут, то схема принимает следующий вид. Укажем предполагаемое направление токов в каждом элементе и рассмотрим контуры $KBCM$, $ABCD$, $AKLM$ и $NLMD$. Направление обхода в каждом контуре выберем против часовой стрелки. Напишем уравнение по второму правилу Кирхгоффа для каждого из контуров: $\varepsilon = I_1' R_{V1} + I_2' R_{V2}$ — (1); $\varepsilon = I_1 R_1 + I_2 R_2$ — (2). Поскольку контуры $AKLM$ и $NLMD$ не содержат источников э.д.с., то для них $I_1 R_1 - I_1' R_{V1} = 0$ — (3); $I_2 R_2 - I_2' R_{V2} = 0$ — (4). По первому правилу Кирхгоффа для узла L имеем $I_1 + I_1' = I_2 + I_2'$ — (5). Из уравнений (3) и (4) соответственно получим



$I_1' = \frac{I_1 R_1}{R_{V1}}$ — (6) и $I_2' = \frac{I_2 R_2}{R_{V2}}$ — (7). Подставляя (6) и (7) в (3), получаем $I_1\left(1 + \frac{R_1}{R_{V1}}\right) = I_2\left(1 + \frac{R_2}{R_{V2}}\right)$, откуда ток $I_1 = \frac{I_2(R_{V1} + R_2)R_{V1}}{(R_{V1} + R_1)R_{V2}}$ — (8). Подставим (8) в (2), тогда $\varepsilon = \frac{I_2(R_{V2} + R_2)R_{V1}R_1}{(R_{V1} + R_1)R_{V2}} + I_2R_2$, отсюда ток

$$I_2 = \frac{\varepsilon R_{V2}(R_{V1} + R_1)}{(R_{V2} + R_2)R_{V1}R_1 + R_2R_{V2}(R_{V1} + R_1)} \text{ — (9).}$$

Следовательно, показание второго вольтметра

$$U_2 = I_2R_2 = \frac{\varepsilon R_2R_{V2}(R_{V1} + R_1)}{(R_{V2} + R_2)R_{V1}R_1 + R_2R_{V2}(R_{V1} + R_1)} = 100 \text{ В.}$$

Подставив (9) в (8), находим ток

$$I_1 = \frac{\varepsilon R_{V1}(R_{V2} + R_2)}{(R_{V2} + R_2)R_{V1}R_1 + R_2R_{V2}(R_{V1} + R_1)},$$

тогда показание первого вольтметра

$$U_1 = I_1R_1 = \frac{\varepsilon R_1R_{V1}(R_{V2} + R_2)}{(R_{V2} + R_2)R_{V1}R_1 + R_2R_{V2}(R_{V1} + R_1)} = 100 \text{ В.}$$

Применение правил Кирхгоффа к решению данной задачи авторы книги считают нерациональным. Читателю предлагается самостоятельно решить данную задачу, используя законы Ома для участка цепи и для полной цепи.

10.97 За какое время τ при электролизе водного раствора хлорной меди ($CuCl_2$) на катоде выделится масса меди m = 4,74 г. если ток I = 2 А?

Решение

Согласно первому закону Фарадея $m = KI\tau$ — (1). Электрохимический эквивалент хлорной меди $K = \frac{1}{F}\frac{A}{Z}$,

где $A = 64 \cdot 10^{-3}$ Кл/моль — постоянная Фарадея. Отсюда $K = 332{,}8 \cdot 10^{-9}$ кг/Кл. Из (1) $\tau = \frac{m}{KI}$. Подставляя числовые данные, получим $\tau \approx 2$ ч.

10.98 За какое время τ при электролизе медного купороса масса медной пластинки (катода) увеличится на Δm = 99 г? Площадь пластинки S = 25 см^2, плотность тока j = 200 А/м^2. Найти толщину d слоя меди, образовавшегося на пластинке.

Решение

Согласно первому закону Фарадея $\Delta m = KI\tau$. Молярная масса меди $A = 64\cdot10^{-3}$ кг/моль, валентность меди в $CuSO_4$ равна $Z = 2$. Отсюда электрохимический эквивалент $K = \frac{1}{F}\frac{A}{Z} = 332{,}8\cdot10^{-9}$ кг/Кл. Сила тока $I = jS$. Тогда $\Delta m = KjS\tau$, откуда $\tau = \frac{\Delta m}{KjS} = 595$ с ≈ 10 мин. Объем образовавшегося слоя меди $V = Sd = \frac{\Delta m}{\rho}$, отсюда $d = \frac{\Delta m}{\rho S} = 4{,}6\cdot10^{-6}$ м.

10.99 При электролизе медного купароса за время τ = 1 ч выделилась масса меди m = 0.5 г. Площадь каждого электрода S = 75 см^2. Найти плотность тока j.

Решение

Имеем $m = KjS\tau$ (см. задачу 10.98), откуда $j = \frac{m}{KS\tau} = \approx 55{,}6$ А/м^2.

10.100 Найти электрохимический эквивалент K водорода.

Решение

Имеем $K = \frac{1}{F}\frac{A}{Z}$, где $F = 96{,}48\cdot10^3$ Кл/моль — постоянная Фарадея, $A = 0{,}001$ — молярная масса водорода, $Z = 1$ — валентность. Подставляя числовые данные, получим $K = 1{,}04\cdot10^{-8}$ кг/Кл.

10.101 Амперметр, включенный последовательно с электролитической ванной с раствором $AgNO_3$, показывает ток I = 0,90 А. Верен ли амперметр, если за время τ = 5 мин прохождения тока выделилась масса m = 316 мг серебра?

Решение

По первому закону Фарадея $m = KI\tau$. Тогда амперметр должен показывать ток $I = \frac{m}{K\tau}$. Найдем электрохимический эквивалент серебра. Имеем $K = \frac{1}{F}\frac{A}{Z}$, где $A = 0{,}108$, $Z = 1$. Отсюда $K = 1{,}12\cdot10^{-6}$ кг/Кл. Подставляя числовые данные, получим $I = 0{,}94$ А. Следовательно, амперметр показывает ток на 0,04 А меньше, чем нужно.

10.102 Две электролитические ванны с растворами $AgNO_3$ и $CuSO_4$ соединены последовательно. Какая масса от меди выделится за время, в течение которого выделилась масса $m_1 = 180$ г серебра?

Решение

При последовательном соединении через обе ванны проходит одинаковый ток I. За время τ выделилась масса серебра $m_1 = K_1 I\tau$ — (1) и масса меди $m_2 = K_2 I\tau$ — (2). Выразив из (1) и (2) время τ, получим $\tau = \dfrac{m_1}{K_1 I} = \dfrac{m_2}{K_2 I}$, откуда $m_2 = \dfrac{m_1 K_2}{K_1}$. Электрохимический эквивалент серебра $K_1 = 1{,}12 \cdot 10^{-6}$ кг/Кл. Подставляя числовые данные, получим $m_2 = 53{,}5 \cdot 10^{-6}$ кг.

10.103 При получении алюминия электролизом раствора Al_2O_3 в расплавленном криолите проходил ток I = 20 кА при разности потенциалов на электродах U = 5 В. За какое время τ выделится масса m = 1 т алюминия? Какая электрическая энергия W при этом будет затрачена?

Решение

Имеем $m = KI\tau$, откуда $\tau = \dfrac{m}{KI}$, где $K = \dfrac{1}{96{,}48 \cdot 10^3} \times \dfrac{27 \cdot 10^{-3}}{3} = 9{,}3 \cdot 10^{-8}$ кг/Кл. Подставляя числовые данные, получим $\tau = 537634$ с $= 149{,}3$ ч. Затраченная энергия W будет равна работе электрических сил $A = P\tau$, т. е. $W = P\tau = IU\tau$. Подставляя числовые данные, получим $W = 53{,}8$ ГДж.

10.104 Какую электрическую энергию W надо затратить, чтобы при электролизе раствора $AgNO$, выделилась масса m = 500 мг серебра? Разность потенциалов на электродах U = 4 В.

Решение

Имеем $W = UI\tau$ (см. задачу 10.103). По первому закону Фарадея $m = KI\tau$, откуда $I\tau = \dfrac{m}{K}$. Тогда $W = \dfrac{Um}{K}$, где $K = 1{,}12 \cdot 10^{-6}$ кг/Кл (см. задачу 10.101). Подставляя числовые данные, получим $W = 1{,}8$ кДж.

10.105 Реакция образования воды из водорода и кислорода происходит с выделением тепла: $2H_2+O_2=2H_2O+\ 5{,}57\cdot10^5$ Дж, Найти наименьшую разность потенциалов U, при которой будет происходить разложение воды электролизом.

Решение

Для выделения массы m вещества при электролизе необходима энергия $W = IUt = \frac{mUZF}{A}$, откуда $U = \frac{WA}{mZF}$, где F — постоянная Фарадея, A — молярная масса, Z — валентность. Чтобы разложить $\nu = 2$ моль воды, т. е. чтобы выделить $m = 4$ г водорода, потребуется энергия $W = 5{,}57\cdot10^5$ Дж. Подставляя числовые данные, получим $U = 1{,}5$ В.

10.106 Найти эквивалентную проводимость Λ для очень слабого раствора азотной кислоты.

Решение

В слабых растворах все молекулы диссоциированы, т. е. степень диссоциации $\alpha \approx 1$. Тогда эквивалентная проводимость $\Lambda_\infty = F(u_+ + u_-)$. Имеем $u_+ = 3{,}26\cdot10^{-7}$ м^2/(В·с) и $u_- = 0{,}64\cdot10^{-7}$ м^2/(В·с). Подставляя числовые данные, получим $\Lambda_\infty = 37{,}6\cdot10^{-3}$ м^2/(Ом·моль).

10.107 Через раствор азотной кислоты пропускается ток I = 2 A. Какое количество электричества q переносится за время τ = 1 мин ионами каждого знака?

Решение

Запишем уравнение диссоциации для азотной кислоты $HNO_3 \to H^+ + NO_3^-$. По определению силы тока $I = \frac{q}{\tau}$, откуда $q = I\tau$ — (1) — полное количество электричества, переносимое всеми ионами за время τ. Плотность тока

положительных и отрицательных ионов соответственно равна $j^+ = q^+n^+u^+$ — (2) и $j^- = q^-n^-u^-$ — (3), где q — количество электричества, переносимое ионами каждого знака, n — концентрация ионов, u — подвижность ионов. Из уравнения диссоциации видно, что концентрации положительных и отрицательных ионов равны, следовательно, и плотности тока по модулю равны, тогда из уравнений (2) и (3) имеем $q^-u^- = q^+u^+$ или $\frac{q^-}{q^+} = \frac{u^+}{u^-}$ — (4).

Кроме того, с учетом (1), $q^+ + q^- = I\tau$ — (5). Решая совместно уравнения (4) и (5), находим $q^+ = \frac{I\tau u^+}{u^- + u^+} = 100{,}3$ Кл

и $q^- = \frac{I\tau u^-}{u^- + u^+} = 19{,}7$ Кл.

10.108 Эквивалентная проводимость раствора KCl при некоторой концентрации $\Lambda = 12{,}2 \cdot 10^{-3}$ м^2(Ом·моль), удельная проводимость при той же концентрации $\sigma = 0{,}122$ См/м, эквивалентная проводимость при бесконечном разведении $\Lambda_\infty = 13 \cdot 10^{-3}$ м^2/(Ом·моль). Найти: а) степень диссоциации α раствора KCl при данной концентрации; б) эквивалентную концентрацию η раствора; в) сумму подвижностей $u_+ + u_-$ ионов K^+ и Cl^-.

Решение

В слабых растворах степень диссоциации $\alpha \approx 1$, т. е. все молекулы диссоциированы. Следовательно, эквивалентная проводимость $\Lambda_\infty - F\left(u^+ + u^-\right)$, откуда сумма подвижностей $u^+ + u^- = \dfrac{\Lambda_\infty}{F} = 13{,}5 \cdot 10^{-7}$ м^2/(В·с). По определению эквивалентной проводимости $\Lambda = \dfrac{\sigma}{\eta}$, откуда эквивалентная концентрация $\eta = \dfrac{\sigma}{\Lambda} = 0{,}1$ моль/л. Удельная проводимость электролита определяется формулой $\sigma = \alpha\eta F\left(u^+ + u^-\right) = \alpha\eta\Lambda_\infty$, откуда степень диссоциации электролита $\alpha = \dfrac{\sigma}{\eta\Lambda_\infty} \cdot 100\% = 0{,}938 \cdot 100\% = 93{,}8\%$.

10.109 Найти сопротивление R раствора $AgNO_3$, заполняющего трубку длиной $l = 84$ см и площадью поперечного сечения $S = 5$ мм^2. Эквивалентная концентрация раствора $\eta = 0{,}1$ моль/л, степень диссоциации $\alpha = 81$ %.

Решение

Сопротивление раствора в трубке выражается формулой $R = \rho\dfrac{l}{S}$ — (1), где ρ — удельное сопротивление раствора. Удельная проводимость электролита определяется формулой $\sigma = \dfrac{1}{\rho} = \alpha\eta F\left(u^+ + u^-\right)$, где u^+ и u^- — соответственно подвижности ионов Ag^+ и NO_3^-, тогда удельное сопротивление $\rho = \dfrac{1}{\alpha\eta F\left(u^+ + u^-\right)}$ — (2). Подставляя (2) в (1), окончательно получаем $R = \dfrac{l}{S\alpha\eta F\left(u^+ + u^-\right)} = 179{,}1$ кОм.

10.110 Найти сопротивление R раствора, заполняющего трубку длиной $l = 2$ см и площадью поперечного сечения $S = 7$ см^2. Эквивалентная концентрация раствора $\eta = 0{,}05$ моль/л, эквивалентная проводимость $\Lambda = 1{,}1 \cdot 10^{-6}$ м^2(Ом·моль).

Решение

Сопротивление раствора в трубке выражается формулой $R = \rho\dfrac{l}{S}$ — (1), где ρ — удельное сопротивление раствора. По определению эквивалентной проводимости $\Lambda = \frac{\sigma}{\eta}$, откуда удельная проводимость электролита $\sigma = \Lambda\eta$ — (2). С другой стороны, $\sigma = \frac{1}{\rho}$, тогда, с учетом (2), удельное сопротивление раствора $\rho = \frac{1}{\Lambda\eta}$ — (3). Подставляя (3) в (1), окончательно получаем $R = \frac{l}{S\Lambda\eta} = 519{,}5$ кОм.

10.111 Трубка длиной $l = 3$ см и площадью поперечного сечения $S = 10$ см^2 заполнена раствором $CuSO_4$. Эквивалентная концентрация раствора $\eta = 0{,}1$ моль/л, сопротивление $R = 38$ Ом. Найти эквивалентную проводимость Λ раствора.

Решение

Сопротивление трубки $R = \rho\frac{l}{S}$. Отсюда удельное сопротивление электролита $\rho = \frac{RS}{l}$. Удельная электропроводность $\sigma = \frac{1}{\rho} = \frac{l}{RS}$. Эквивалентная проводимость $\Lambda = \frac{\sigma}{\eta} = \frac{l}{RS\eta}$; $\Lambda = 7{,}89 \cdot 10^{-3}$ м^2/(Ом·моль).

10.112 Удельная проводимость децинормального раствора соляной кислоты $\sigma = 3{,}5$ См/м. Найти степень диссоциации α.

Решение

Удельная электропроводность $\sigma = \alpha CZF(u_+ + u_-)$, где $C = 0{,}1 \cdot 10^3$ м^3/моль — молярная концентрация, $Z = 1$ — валентность, $u_+ = 32{,}6 \cdot 10^{-8}$ м^2/(В·с) и $u_- = 6{,}8 \cdot 10^{-8}$ м^2/(В·с) — подвижности ионов. Отсюда степень диссоциации $\alpha = \frac{\sigma}{CZF(u_+ + u_-)} = 0{,}92 = 92\%$.

10.113 Найти число ионов n каждого знака, находящихся в единице объема раствора предыдущей задачи.

Решение

При небольших плотностях тока, текущего в газе, имеет место закон Ома $j = qn(u_+ + u_-)E = \sigma E$, откуда $n = \frac{\sigma}{q(u_+ + u_-)} = 5{,}6 \cdot 10^{25}$ м$^{-3}$.

10.114 При освещении сосуда с газом рентгеновскими лучами в единице объема в единицу времени ионизуется число молекул $N = 10^{16}$ м$^{-3}$·с$^{-1}$. В результате рекомбинации в сосуде установилось равновесие, причем в единице объема газа находится число ионов каждого знака $n = 10^{14}$ м$^{-3}$. Найти коэффициент рекомбинации γ.

Решение

Количество рекомбинирующих за единицу времени в единице объема пар ионов пропорционально квадрату числа имеющихся в единице объема пар ионов $N = \gamma n^2$. Отсюда коэффициент рекомбинации $\gamma = \frac{N}{n^2} = 10^{-12}$ м^3/с.

10.115 К электродам разрядной трубки приложена разность потенциалов $U = 5$ В, расстояние между ними $d = 10$ см. Газ, находящийся в трубке, однократно ионизирован. Число ионов каждого знака в единице объема газа $n = 10^8$ м$^{-3}$; подвижности ионов $u_+ = 3\cdot10^{-2}$ м^2/(В·с) и $u_- = 3\cdot10^2$ м^2/(В·с). Найти плотность тока j в трубке. Какая часть полного тока переносится положительными ионами?

Решение

При небольших плотностях тока, текущего в газе, имеет место закон Ома $j = qn(u^+ + u^-)E$ (1), где E — напряженность поля между электродами, которая равна $E = \frac{U}{d}$ — (2). Т. к. по условию газ однократно ионизирован, то заряд ионов $q = e = 1{,}6\cdot10^{-19}$ Кл. Подставляя (2) в (1), окончательно получаем $j = \frac{en(u^+ + u^-)U}{d} = 0{,}24$ мкА/м^2.

Плотность тока положительных ионов $j^+ = \frac{enu^+U}{d}$, тогда

$\frac{j^+}{j} = \frac{u^+}{u^+ + u^-} = 10^{-4}\cdot100\% = 0{,}01\%$.

10.116 Площадь каждого электрода ионизационной камеры $S = 0{,}01$ м^2, расстояние между ними $d = 6{,}2$ см. Найти ток насыщения $I_н$ в такой камере, если в единице объема в единицу времени образуется число однозарядных ионов каждого знака $N = 10^{15}$ м$^{-3}$·с$^{-1}$.

Решение

Плотность тока насыщения в газе определяется формулой $j_н = Nqd$ — (1), где N — число пар ионов, созданных ионизирующим агентом в единице объема в единицу времени, d — расстояние между электродами. Сила и плотность тока связаны соотношением $j = \frac{I}{S}$, тогда $j_н = \frac{I_н}{S}$ — (2). Приравнивая правые части уравнений (1) и (2) и считая $q = e = 1{,}6\cdot10^{-19}$ Кл, получим $\frac{I_н}{S} = Ned$, откуда ток насыщения $I_н = NedS = 0{,}1$ мкА.

10.117 Найти наибольшее возможное число ионов n каждого знака, находящихся в единице объема камеры предыдущей задачи, если коэффициент рекомбинации $\gamma = 10^{-12}$ м^3/с.

Решение

Наибольшее возможное число ионов n каждого знака в единице объема камеры получится, если убывание ионов происходит только за счет рекомбинации. Тогда имеем $N = \gamma n^2$, откуда $n = \sqrt{\frac{N}{\gamma}} = 3{,}2 \cdot 10^{13}$ м$^{-3}$.

10.118 Найти сопротивление R трубки длиной l = 84 см и площадью поперечного сечения S = 5 мм^2, если она заполнена воздухом, ионизированным так, что в единице объема при равновесии находится $n = 10^{13}$ м$^{-3}$ однозарядных ионов каждого знака. Подвижности ионов $u_+ = 1{,}3 \cdot 10^{-4}$ м^2/(В·с) и $u_- = 1{,}8 \cdot 10^{-4}$м^2/(В·с).

Решение

Сопротивление трубки $R = \rho \frac{l}{S}$. Отсюда удельное сопротивление $\rho = \frac{RS}{l}$. Удельная электропроводность $\sigma = \frac{1}{\rho} = \frac{l}{RS}$. С другой стороны, $\sigma = qn(u_+ + u_-)$. Т. к. левые части равны, то можно приравнять и правые: $\frac{l}{RS} = qn(u_+ + u_-)$, отсюда $R = \frac{l}{qSn(u_+ + u_-)}$. Т. к. ионы однозарядные, то $q = e$ и окончательно $R = \frac{l}{eSn(u_+ + u_-)}$; $R = 3{,}4 \cdot 10^{14}$ Ом.

10.119 Какой ток I пройдет между электродами ионизационной камеры задачи 10.116, если к электродам приложена разность потенциалов U = 20 В? Подвижности ионов $u_+ = u_- = 10^{-4}$ м^2/(В·с), коэффициент рекомбинации $\gamma = 10^{-12}$ м^3/с. Какую долю тока насыщения составляет найденный ток?

Решение

При небольших плотностях тока, текущего в газе, имеет место закон Ома $j = qn(u_+ + u_-)E$ – (1), где $E = \frac{U}{d}$ — (2) – напряженность однородного поля, U — разность потенциалов на электродах, d — расстояние между электродами, $n = \sqrt{\frac{N}{\gamma}}$ — (3) — число пар ионов, γ — коэффициент рекомбинации, $q = e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл — заряд иона, u_+ и u_- — подвижности ионов. Подставляя (2) и (3) в (1), получаем $j = e\sqrt{\frac{N}{\gamma}}(u_+ + u_-)\frac{U}{d}$ — (4). С другой стороны, плотность тока $j = \frac{I}{S}$ — (5), где I — сила тока, S — площадь электронов. Приравнивая правые части уравнений (4) и (5), получаем $\frac{I}{S} = e\sqrt{\frac{N}{\gamma}}(u_+ + u_-)\frac{US}{d} = 3{,}3$ нА. Ток насыщения в камере (см. задачу 10.116) $I_н = NedS = 0{,}1$ мкА, тогда $\frac{I}{I_н} = 3{,}3\%$.

10.120 Какой наименьшей скоростью v должен обладать электрон для того, чтобы ионизировать атом водорода? Потенциал ионизации атома водорода U = 13,5 В.

Решение

Потенциалом ионизации атома называется разность потенциалов, которую должен пройти электрон, чтобы при соударении с атомом его ионизировать. Поэтому скорость электрона найдем из равенства $\frac{mv^2}{2} = eU$, откуда $v = \sqrt{\frac{2eU}{m}} = 2{,}2 \cdot 10^6$ м/с.

10.121 При какой температуре T атомы ртути имеют кинетическую энергию поступательного движения, достаточную для ионизации? Потенциал ионизации атома ртути U = 10,4 В.

Решение

Средняя кинетическая энергия поступательного движения атомов ртути $W_к = \frac{3}{2}kT$, где $k = 1{,}38 \cdot 10^{-23}$ Дж/К — постоянная Больцмана. Потенциальная энергия атомов в металле $W_п = eU$. По закону сохранения энергии $W_к = W_п$ или $\frac{3}{2}kT = eU$, откуда температура $T = \frac{2eU}{3k} = 8036$ К.

10.122 Потенциал ионизации атома гелия U = 24,5 В. Найти работу ионизации A.

Решение

Потенциальная энергия атомов гелия $W = eU$. По закону сохранения энергии работа ионизации идет на разрыв связи молекул, т. е. равна потенциальной энергии $A = W = eU = 39.2 \cdot 10^{-19}$ Дж.

10.123 Какой наименьшей скоростью v должны обладать свободные электроны в цезии и платине для того, чтобы они смогли покинуть металл?

Решение

По закону сохранения энергии кинетическая энергия свободных электронов $W_к = \frac{mv^2}{2}$ идет на работу выхода электронов из металла, следовательно, $\frac{mv^2}{2} = A$, откуда наименьшая скорость $v_{min} = \sqrt{\frac{2A}{m}}$. а) Для цезия $A = 1{,}9$ эВ, тогда $v_{min} = 8{,}3 \cdot 10^5$ м/с. б) Для платины $A = 5{,}3$ эВ, тогда $v_{min} = 1{,}4 \cdot 10^6$ м/с.

10.124 Во сколько раз изменится удельная термоэлектронная эмиссия вольфрама, находящегося при температуре T_1 = 2400 К, если повысить температуру вольфрама на ΔT = 100 К?

Решение

Удельная термоэлектронная эмиссия вольфрама при температурах T_1 и T_2: $j_1 = BT_1^2 e^{-\frac{A}{kT_1}}$ и $j_2 = BT_2^2 e^{-\frac{A}{kT_2}}$. Разделив второе уравнение на первое, получим $\frac{j_2}{j_1} = \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^2 \times$ $\times e^{-\frac{A}{k}\left(\frac{1}{T_2}-\frac{1}{T_1}\right)} = 2{,}6$.

10.125 Во сколько раз катод из торированного вольфрама при температуре T = 1800 К дает большую удельную эмиссию, чем катод из чистого вольфрама при той же температуре? Эмиссионная постоянная для чистого вольфрама $B_1 = 0{,}6 \cdot 10^6$ А/(м^2·К^2), для торированного вольфрама B_2 = 0,3·10^{7}А/(м^2·К^2).

Решение

Удельная эмиссия чистого вольфрама равна $j_1 = B_1 T^2 e^{-\frac{A_1}{kT}}$. Удельная эмиссия торированного вольфрама равна $j_2 = B_2 T^2 e^{-\frac{A_2}{kT}}$. По таблице 17 найдем $A_1 = 4{,}5$ эВ = $= 7{,}2 \cdot 10^{-19}$ Дж; $A_2 = 2{,}63$ эВ $= 4{,}2 \cdot 10^{-19}$ Дж. Отсюда отношение $\frac{j_2}{j_1} = \frac{B_2}{B_1} e^{\frac{1}{kT}(A_1 - A_2)}$. Подставляя числовые данные, получим $\frac{j_2}{j_1} = 11 \cdot 10^3$.

10.126 При какой температуре T_2 торированный вольфрам будет давать такую же удельную эмиссию, какую дает чистый вольфрам при T_1 = 2500 К? Необходимые данные взять из предыдущей задачи.

Решение

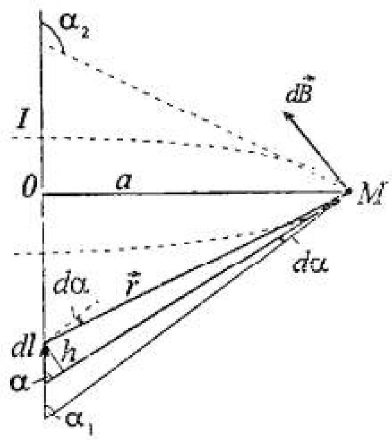
Удельная эмиссия чистого вольфрама при температуре $T_1 = 2500$ К и торированного вольфрама при температуре T_2: $j_1 = B_1 T_1^2 \, exp\left(-\frac{A_1}{kT_1}\right) = 2{,}84 \cdot 10^3$ А/м^2, $j_2 = B_2 T_2^2 \times$ $\times exp\left(-\frac{A_2}{kT_2}\right)$. По условию $j_1 = j_2$, т. е. $B_2 T_2^2 \, exp\left(-\frac{A_2}{kT_2}\right) =$ $= 2{,}84 \cdot 10^3$ А/м^2 — (1). Т. к. в основном зависимость удельной эмиссии от температуры определяется экспоненциальным множителем $exp\left(-\frac{A}{kT}\right)$, а не множителем T^2, то в первом приближении можно положить $B_2 T_1^2 \, exp\left(-\frac{A_2}{kT_2}\right) =$

$= B_2(2500)^2 \exp\left(-\frac{A_2}{kT_2}\right) 2{,}84\cdot 10^3$ А/м^2; отсюда $\exp\left(-\frac{A_2}{kT_2}\right) = \frac{2{,}84\cdot 10^3}{B_2 T_1^2} = 1{,}86\cdot 10^{-8}$ и $T_2 = 1690$ К — первое приближение. Во втором приближении $B_2\cdot(1690)^2 \times \exp\left(-\frac{A_2}{kT_2}\right) = 2{,}84\cdot 10^3$ А/м^2; отсюда $T_2 = 1770$ К — второе приближение. Далее $B_2\cdot(1770)^2 \exp\left(-\frac{A_2}{kT_2}\right) = 2{,}84\cdot 10^3$ А/м^2; отсюда $T_2 = 1750$ К — третье приближение. Аналогично $B_2\cdot(1750)^2 \exp\left(-\frac{A_2}{kT_2}\right) = 2{,}84\cdot 10^3$ А/м^2; отсюда $T_2 = 1760$ К – четвертое приближение. Легко убедиться, что пятое приближение с точностью до третьей значащей цифры совпадает с четвертым приближением. Таким образом, искомое решение $T_2 = 1760$ К.

§ 11. Электромагнетизм

11.1 Найти напряженность H магнитного поля в точке, отстоящей на расстоянии $a = 2$ м от бесконечно длинного проводника, по которому течет ток $I = 5$ А.

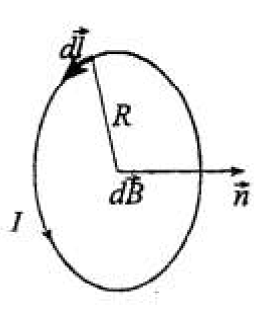
Решение



Выберем на проводнике с током элемент тока длиной $d\vec{l}$ (см. рисунок). Индукция магнитного поля, создаваемая этим элементом в точке M, согласно закону Био — Савара — Лапласа, $d\vec{B} = \frac{\mu\mu_0}{4\pi}\frac{I\left[d\vec{l}\cdot\vec{r}\right]}{r^3}$. Вектор $d\vec{B}$ в точке M направлен от нас в плоскость чертежа. Модуль этого вектора $dB = \frac{\mu\mu_0}{4\pi}\frac{Idl\sin\alpha}{r^2}$. Выразим r и dl через угол α: $r = \frac{a}{\sin\alpha}$, а поскольку $\frac{h}{dl} = \frac{rd\alpha}{dl} = \sin\alpha$, то $dl = \frac{rd\alpha}{\sin\alpha} = \frac{ad\alpha}{\sin^2\alpha}$. Тогда $dB = \frac{\mu\mu_0}{4\pi}\frac{Iad\alpha\sin\alpha\sin^2\alpha}{\sin^2\alpha a^2} = \frac{\mu\mu_0 I}{4\pi a}\sin\alpha d\alpha$. Результирующую индукцию магнитного поля в точке M найдем интегрированием: $B = \int\limits_{\alpha_1}^{\alpha_2}\frac{\mu\mu_0 I}{4\pi a}\sin\alpha d\alpha$. Здесь α — угол между направлением тока в проводнике (направлением вектора $d\vec{l}$) и вектором $\vec{r}$, проведенным от элемента $d\vec{l}$ в точку M, в которой определяется индукция магнитного поля. Если проводник бесконечно длинный, то $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = \pi$. Тогда результирующая индукция магнитного поля $B = \int\limits_0^{\pi}\frac{\mu\mu_0 I}{4\pi a}\sin\alpha d\alpha$; $B = \frac{\mu\mu_0 I}{2\pi a}$. Поскольку $B = \mu\mu_0 H$, то $H = \frac{I}{2\pi a} = 398$ мА.

11.2 Найти напряженность H магнитного поля в центре кругового проволочного витка радиусом R = 1 см, по которому течет ток I = 1 А.

Решение

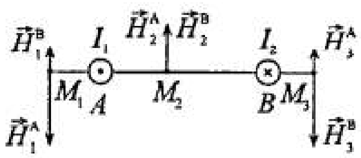


Каждый элемент тока создает в центре индукцию, направленную вдоль положительной нормали к контуру. Поэтому векторное сложение $d\vec{B}$ сводится к сложению их модулей. По закону Био — Савара — Лапласа $dB = \frac{\mu\mu_0}{4\pi}\frac{Idl}{R^2}$. Проинтегрируем это выражение по всему контуру: $B = \int dB = \frac{\mu\mu_0}{4\pi}\frac{I}{R^2}\oint dl = \frac{\mu\mu_0}{4\pi}\frac{I}{R^2}2\pi R = \frac{\mu\mu_0}{4\pi}\frac{I}{2R}$.

Поскольку $B = \mu\mu_0 H$, то $H = \frac{I}{2R}$. Подставляя числовые данные, получим $H = 50$ А/м.

11.3 На рисунке изображены сечения двух прямолинейных бесконечно длинных проводников с токами. Расстояние между проводниками AB = 10 см, токи I_1 = 20 А и I_2 = 30 А. Найти напряженности Н магнитного поля, вызванного токами I_1 и I_2 в точках M_1, M_2 и M_3. Расстояния M_1A = 2 см, AM_2 = 4 см и BM_3 = 3 см.

Решение



Согласно принципу суперпозиции напряженности $\vec{H}_1$, $\vec{H}_2$ и $\vec{H}_3$ магнитного поля в точках M_1, M_2 и M_3 складываются из напряженностей, создаваемых токами I_1 и I_2. $\vec{H}_1 = \vec{H}_1^A + \vec{H}_1^B$; $\vec{H}_2 = \vec{H}_2^A + \vec{H}_2^B$; $\vec{H}_3 = \vec{H}_3^A + \vec{H}_3^B$. Напряженность $H = \frac{I}{2\pi a}$, где a — расстояние от проводника с током до точки, в которой определяется напряженность. Тогда $H_1^A = \frac{I_1}{2\pi \cdot M_1A} = 159{,}2$ А/м; $H_1^B = \frac{I_2}{2\pi \cdot (AB + M_1A)} = 39{,}8$ А/м;

$H_2^A = \frac{I_1}{2\pi \cdot M_2A} = 79{,}6$ А/м; $H_2^B = \frac{I_2}{2\pi \cdot (AB - M_2A)} = 79{,}6$ А/м

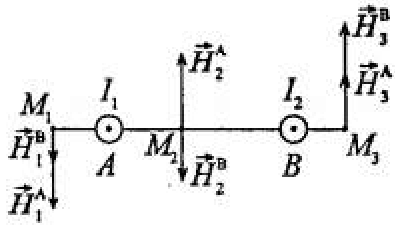
$H_3^A = \frac{I_1}{2\pi \cdot (AB + M_3B)} = 24{,}5$ А/м;

$H_3^B = \frac{I_2}{2\pi \cdot M_3B} = 159{,}2$ А/м. Отсюда, с учетом рисунка, $H_1 = H_1^A - H_1^B = 119{,}4$ А/м; $H_2 = H_2^A + H_2^B = 159{,}2$ А/м; $H_3 = H_3^B - H_3^A = 134{,}7$ А/м.

11.4 На рисунке изображены сечения двух прямолинейных бесконечно длинных проводников с токами. Расстояние между проводниками AB = 10 см, токи I_1 = 20 А и I_2 = 30 А. Найти напряженности H магнитного поля, вызванного токами I_1 и I_2 в точках M_1, M_2 и M_3. Расстояния M_1A = 2 см, AM_2 = 4 см и BM_3 = 3 см. Токи текут в одном направлении.

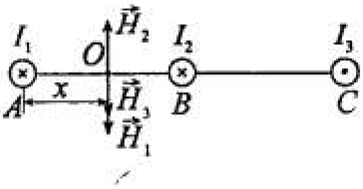
Решение

$H_1 = H_1^A + H_1^B = 199$ А/м;
$H_2 = H_2^A - H_2^B = 0$ А/м;
$H_3 = H_3^B + H_3^A = 183{,}7$ А/м (см. задачу 11.3).



11.5 На рисунке изображены сечения двух прямолинейных бесконечно длинных проводников с токами. Расстояния $AB = BC$ = 5 см, токи $I_1 = I_2 = I$ и $I_3 = 2I$. Найти точку на прямой AC, в которой напряженность магнитного поля, вызванного токами I_1, I_2 и I_3, равна нулю.

Решение

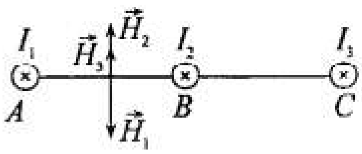


Искомая точка не может находиться на отрезке BC, т. к. векторы $\vec{H}_1$, $\vec{H}_2$ и $\vec{H}_3$ здесь направлены в одну сторону и их сумма не может быть равной нулю. Тогда точка с нулевой напряженностью магнитного поля находится на отрезке AB на расстоянии x от точки A. Направления векторов $\vec{H}_1$, $\vec{H}_2$ и $\vec{H}_3$ показаны на рисунке. По условию $\vec{H}_1 + \vec{H}_2 + \vec{H}_3 = 0$, следовательно, $H_1 + H_3 = H_2$ — (2). Напряженность магнитного поля $H = \dfrac{I}{2\pi a}$, где a — расстояние от проводника с током до точки, в которой определяется напряженность. Тогда $H_1 = \dfrac{I}{2\pi x}$ — (2); $H_2 = \dfrac{I}{2\pi(AB - x)}$ — (3);

$H_3 = \dfrac{2I}{2\pi(BC + AB - x)}$ — (4). Подставив в (2) — (4) известные числовые данные, а затем подставив эти уравнения в (1), получим $\dfrac{I}{2\pi x} + \dfrac{2I}{2\pi(0{,}1 - x)} = \dfrac{I}{2\pi(0{,}05 - x)}$. Разделив уравнение на $\dfrac{I}{2\pi}$, получим $\dfrac{1}{x} + \dfrac{2}{0{,}1 - x} = \dfrac{1}{0{,}05 - x}$. Решив данное уравнение, найдем $x = 0{,}033$ м. Т. е. точка O находится между точками I_1 и I_2 на расстоянии 3,3см от точки A.

11.6 На рисунке изображены сечения двух прямолинейных бесконечно длинных проводников с токами. Расстояния $AB = BC = 5$ см, токи $I_1 = I_2 = I$ и $I_3 = 2I$. Найти точку на прямой AC, в которой напряженность магнитного поля, вызванного токами I_1, I_2 и I_3, равна нулю. Токи текут в одном направлении.

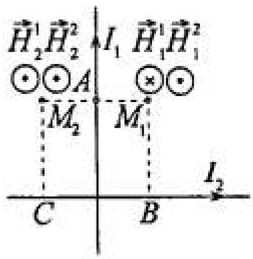
Решение



Задачу решаем аналогично 11.5. При условии, что все токи текут в одном направлении, уравнение (1) примет вид: $H_2 + H_3 = H_1$ (см. рисунок). Решая далее, получим уравнение $\frac{2}{0{,}1-x} + \frac{1}{0{,}05-x} = \frac{1}{x}$. Приведя данное уравнение к квадратному и решив его, найдем, что напряженность равна нулю в точках, лежащих правее точки A на расстояниях 1,8 см и 6,96 см от нее.

11.7 Два прямолинейных бесконечно длинных проводника расположены перпендикулярно друг к другу и находятся в одной плоскости (см. рисунок). Найти напряженности H_1 и H_2 магнитного поля в точках M_1 и M_2. если токи $I_1 = 2$ А и $I_2 = 3$ A Расстояния $AM_1 = AM_2 = 1$ см и $BM_1 = CM_2 = 2$ см.

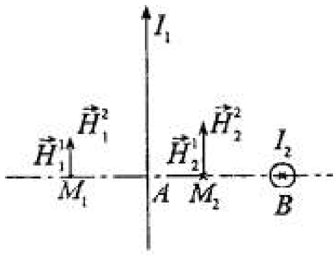
Решение



Напряженность в точке M_1: $\vec{H}_1 = \vec{H}_1^1 + \vec{H}_1^2$, где $\vec{H}_1^1$ — напряженность магнитного поля тока I_1, $\vec{H}_1^2$ — напряженность магнитного поля тока I_2. Направление векторов определим по правилу правого винта: $\vec{H}_1^1$ — от нас, $\vec{H}_1^2$ — к нам. Имеем $H_1^1 = \frac{I_1}{2\pi \cdot AM_1} = 31{,}8$ А/м; $H_1^2 = \frac{I_2}{2\pi \cdot BM_1} = 23{,}8$ А/м. Поскольку векторы $\vec{H}_1^1$ и $\vec{H}_1^2$ направлены в противоположные стороны, то имеем $H_1 = H_1^1 - H_1^2 = 8$ А/м. Напряженность в точке M_2: $\vec{H}_2 = \vec{H}_2^1 + \vec{H}_2^2$, где оба вектора $\vec{H}_2^1$ и $\vec{H}_2^2$ направлены к нам. $H_2^1 = \frac{I_1}{2\pi \cdot AM_2} = 31{,}8$ А/м; $H_2^2 = \frac{I_2}{2\pi \cdot CM_2} = 23{,}8$ А/м, тогда $H_2 = H_2^1 + H_2^2 = 55{,}6$ А/м.

11.8 Два прямолинейных бесконечно длинных проводника расположены перпендикулярно друг к другу и находятся во взаимно перпендикулярных плоскостях. Найти напряженности H_1 и H_2 магнитного поля в точках M_1 и M_2, если токи $I_1 = 2$ А и $I_2 = 3$ А. Расстояния $AM_1 = AM_2 = 1$ см и $AB = 2$ см.

Решение



Напряженность в точке M_1: $\vec{H}_1 = \vec{H}_1^1 + \vec{H}_1^2$. Вектор $\vec{H}_1^1$ направлен к нам, вектор $\vec{H}_1^2$ направлен перпендикулярно $\vec{H}_1^1$, вверх. Напряженность в точке M_2: $\vec{H}_2 = \vec{H}^1 + \vec{H}_2^2$. Вектор $\vec{H}_2^1$ направлен от нас, вектор $\vec{H}_2^2$ направлен вверх перпендикулярно $\vec{H}_2^1$. Найдем величины:

$$H_1^1 = \frac{I_1}{2\pi \cdot AM_1} = 31{,}8 \text{ А/м}; \quad H_1^2 = \frac{I_2}{2\pi \cdot (AB + AM_1)} = 15{,}9 \text{ А/м};$$

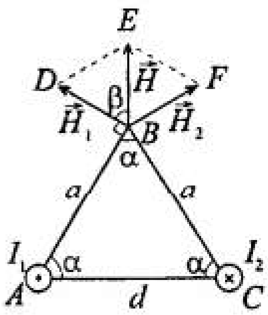
$$H_2^1 = \frac{I_1}{2\pi \cdot AM_2} = 31{,}8 \text{ А/м}; \quad H_2^2 = \frac{I_2}{2\pi \cdot (AB - AM_2)} = 47{,}8 \text{ А/м}.$$

Тогда $H_1 = \sqrt{(H_2^1)^2 + (H_1^2)^2} = 35{,}6$ А/м;

$$H_2 = \sqrt{(H_2^1)^2 + (H_2^2)^2} = 57{,}4 \text{ А/м}.$$

11.9 Два прямолинейных длинных проводника расположены параллельно на расстоянии $d = 10$ см друг от друга. По проводникам текут токи $I_1 = I_2 = 5$ А в противоположных направлениях. Найти модуль и направление напряженности H магнитного поля в точке, находящейся на расстоянии $a = 10$ см от каждого проводника.

Решение



Согласно принципу суперпозиции напряженность магнитного поля в точке B: $\vec{H} = \vec{H}_1 + \vec{H}_2$, где $H_1 = \frac{I_1}{2\pi a}$; $H_2 = \frac{I_2}{2\pi a}$. Поскольку $I_1 = I_2$, то $H_1 = H_2$. Следовательно, вектор $\vec{H}$ будет перпендикулярен плоскости, в которой лежат оба проводника. Треугольник ABC — равносторонний, т. к. $a = d$, следовательно, угол $\alpha = 60°$. $\angle DBA = \angle FBC$, отсюда $\beta = 60°$. Т. к. две боковые стороны треугольника BDE равны и угол при основании равен $60°$, то треугольник равносторонний. Тогда модуль вектора $\vec{H}$ равен модулю вектора $\vec{H}_1$, т. е. $H = H_1 = \frac{I_1}{2\pi a} = 8$ А/м.

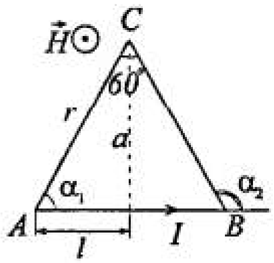
11.10 По длинному вертикальному проводнику сверху вниз идет ток I = 8 А. На каком расстоянии a от него напряженность поля, получающегося от сложения земного магнитного поля и поля тока, направлена вертикально вверх? Горизонтальная составляющая напряженности земного поля $H_г$ = 16 А/м.

Решение

Вектор магнитного поля Земли имеет горизонтальную $\vec{H}_г$ и вертикальную $\vec{H}_в$ составляющие. Для того чтобы было выполнено условие задачи, необходимо, чтобы магнитное поле тока $\vec{H}$ было равно по величине и противоположно по направлению $\vec{H}_г$. Таким образом, $H = H_г = \dfrac{I}{2\pi a}$, откуда $a = \dfrac{I}{2\pi H_г}$. Подставляя числовые данные, получим $a = 0{,}08$ м.

11.11 Найти напряженность H магнитного поля, создаваемого отрезком AB прямолинейного проводника с током, в точке C, расположенной на перпендикуляре к середине этого отрезка на расстоянии a = 5 см от него. По проводнику течет ток I = 20 А. Отрезок AB проводника виден из точки C под углом 60°.

Решение



По закону Био — Савара — Лапласа элемент контура dl, по которому течет ток I, создаст в некоторой точке A пространства магнитное поле напряженностью $dH = \dfrac{I \sin a}{4\pi r^2} dl$, где r — расстояние от точки A до элемента тока dl, α — угол между радиус-вектором $\vec{r}$ и элементом тока dl. Напряженность магнитного поля в точке C будет равна $H = \int\limits_{\alpha_2}^{\alpha_1} \dfrac{I \sin\alpha}{4\pi r^2} dl$. Но $l = a \cdot ctg\alpha$ и $dl = -\dfrac{a d\alpha}{\sin^2\alpha}$. Далее, $r = \dfrac{a}{\sin\alpha}$. Следовательно,

$$H = -\frac{I}{4\pi a}\int\limits_{\alpha_2}^{\alpha_1} \sin\alpha d\alpha = \frac{I}{4\pi a}(\cos\alpha_1 - \cos\alpha_2) = 31{,}8 \text{ А/м},$$

где $\alpha_2 = 180° - 60° = 120°$.

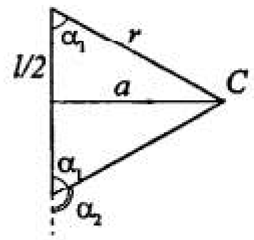
11.12 Найти напряженность H магнитного поля, создаваемого отрезком AB прямолинейного проводника с током, в точке C, расположенной на перпендикуляре к середине этого отрезка на расстоянии a = 6 см от него. По проводнику течет ток I = 30 А. Отрезок AB проводника виден из точки C под углом 90°.

Решение

Из задачи 11.11 имеем $H=\frac{I}{4\pi a}(\cos\alpha_1-\cos\alpha_2)$. Здесь $\alpha_1=45°$, $\alpha_2=180°-45°=135°$. Подставляя числовые данные, получим $H=56{,}3$ А/м.

11.13 Отрезок прямолинейного проводника с током имеет длину l = 30 см. При каком предельном расстоянии а от него для точек, лежащих на перпендикуляре к его середине, магнитное поле можно рассматривать как поле бесконечно длинного прямолинейного тока? Ошибка при таком допущении не должнапревышать 5%.

Решение



Напряженность магнитного поля, создаваемая отрезком прямолинейного проводника с током, $H_1=\frac{I}{4\pi a}\times$ $\times(\cos\alpha_1-\cos\alpha_2)$ — (1) (см. задачу 11.11). Бесконечно длинный прямолинейный проводник с током создает магнитное поле напряженностью $H_2=\frac{I}{2\pi a}$ — (2). Допускаемая ошибка $\delta=\frac{H_2-H_1}{H_2}$ — (3). Подставляя (1) и (2) в (3), получим $\delta=1-\frac{\cos\alpha_1-\cos\alpha_2}{2}$. Из рисунка видно, что $\alpha_2=\pi-\alpha_1$, тогда $\cos\alpha_2=\cos(\pi-\alpha_1)=-\cos\alpha_1$. Отсюда $\delta=1-\cos\alpha_1$ или $\cos\alpha_1=1-\delta$. Имеем $\frac{l}{2}=r\cos\alpha_1=$ $=r(1-\delta)$, где $r=\frac{a}{\sin\alpha_1}=\frac{a}{\sqrt{1-\cos^2\alpha_1}}=\frac{a}{\sqrt{1-(1-\delta)^2}}$. Тогда $\frac{l}{2}=\frac{a(1-\delta)}{\sqrt{1-(1-\delta)^2}}$, откуда $a=\frac{l\sqrt{1-(1-\delta)^2}}{2(1-\delta)}=5$ см.

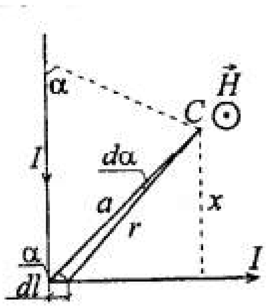
11.14 В точке C, расположенной на расстоянии a = 5 см от бесконечно длинного прямолинейного проводника с током, напряженность магнитного поля H = 400 А/м. При какой предельной длине l проводника это значение напряженности будет верным с точностью до 2%? Найти напряженность H магнитного поля в точке C, если проводник с током имеет длину l = 20 см и точка C расположена на перпендикуляре к середине этого проводника.

Решение

Воспользуемся формулой, полученной в предыдущей задаче, $\frac{l}{2} = \frac{a(1-\delta)}{\sqrt{1-(1-\delta)^2}}$. По условию $\delta = 0{,}02$, тогда $l = \frac{2a(1-\delta)}{\sqrt{1-(1-\delta)^2}} = 0{,}245$ м. Напряженность магнитного поля в точке C (см. рисунок к задаче 11.13) $H_1 = \frac{I}{4\pi a}(\cos\alpha_1 - \cos\alpha_2) = \frac{I\cos\alpha_1}{2\pi a}$ — (1). Силу тока I найдем из выражения $H_2 = \frac{I}{2\pi a}$, откуда $I = 2H_2\pi a$ — (2), где $H_2 = 400$ А/м. Значение $\cos\alpha_1$ найдем, вычислив $tg\alpha_1 = \frac{2a}{l} = 0{,}5$. Отсюда угол $\alpha_1 \approx 27°$, $\cos\alpha_1 \approx 0{,}89$. Подставляя (2) в (1), получим $H_1 = H_2\cos\alpha_1 = 356$ А/м.

11.15 Ток I = 20 А идет по длинному проводнику, согнутому под прямым углом. Найти напряженность H магнитного поля в точке, лежащей на биссектрисе этого угла и отстоящей от вершины угла на расстоянии a = 10 см.

Решение



Разобьем проводник на вертикальный и горизонтальный участки, каждый из которых создает в точке C магнитное поле. Пусть $\vec{H}_1$ — напряженность магнитного поля, создаваемого вертикальным участком, $\vec{H}_2$ — горизонтальным. Тогда результирующая напряженность $\vec{H} = \vec{H}_1 + \vec{H}_2$. Поскольку векторы $\vec{H}_1$ и $\vec{H}_2$ направлены на нас, то можно записать: $H = H_1 + H_2$ — (1). По закону Био — Савара — Лапласа

$H_1=\int\limits_0^{\frac{3\pi}{4}}\frac{I\sin\alpha}{4\pi r^2}dl$ — (2); $H_2=\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\pi}\frac{I\sin\alpha}{4\pi r^2}dl$ — (3). Выразим величины r и dl через угол α: $dl=\frac{rd\alpha}{\sin\alpha}$; $r=\frac{x}{\sin\alpha}$, где $x=\frac{a}{\sqrt{2}}$, т. е. $r=\frac{a}{\sqrt{2}\sin\alpha}$. Подставим полученные соотношения в интеграл $\int\frac{I\sin\alpha}{4\pi r^2}dl$ и вычислим его: $\int\frac{I\sin\alpha}{4\pi r^2}dl=\frac{I}{4\pi}\int\frac{\sin\alpha\cdot 2\sin^2\alpha\cdot a}{a^2\sin\alpha\cdot\sqrt{2}\sin\alpha}d\alpha=\frac{\sqrt{2}I}{4\pi a}\int\sin\alpha d\alpha$. Тогда $H_1=\frac{\sqrt{2}I}{4\pi a}\int\limits_0^{\frac{3\pi}{4}}\sin\alpha d\alpha$; $H_1=\frac{\sqrt{2}I}{4\pi a}\left(-\cos\frac{3}{4}\pi+\cos 0\right)$; $H_1=37{,}9$ А/м. Аналогично $H_2=\frac{\sqrt{2}I}{4\pi a}\left(-\cos\pi+\cos\frac{\pi}{4}\right)$; $H_2=39{,}3$ А/м. Подставив полученные значения в (1), найдем $H=77{,}2$ А/м.

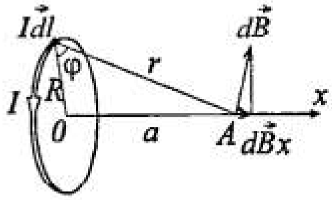
11.16 Ток $I = 20$ А, протекая по кольцу из медной проволоки сечением $S = 1$ мм^2, создает в центре кольца напряженность магнитного поля $H = 178$ А/м. Какая разность потенциалов U приложена к концам проволоки, образующей кольцо?

Решение

Напряженность в центре кругового тока $H=\frac{I}{2r}$ (см. задачу 11.2), где r — радиус витка. К концам проволоки приложена разность потенциалов $U=IR$ — (2), где сопротивление проволоки $R=\rho\frac{l}{S}$ — (3). Удельная проводимость меди $\rho=0{,}017$ мкОм·м, длина проволоки $l=2\pi r$ — (4). Из (1) найдем $r=\frac{I}{2H}$ — (5). Решая совместно уравнения (2) — (5), получим $U=\frac{\pi\rho I^2}{HS}$; $U=0{,}12$ В.

11.17 Найти напряженность H магнитного поля на оси кругового контура на расстоянии a = 3 см от его плоскости. Радиус контура R = 4 см, ток в контуре I = 2 А.

Решение



Выберем элемент тока $I\vec{dl}$. В точке A он создает поле $d\vec{B} = \frac{\mu\mu_0}{4\pi}\frac{I\left[\vec{dl},\vec{r}\right]}{r^3}$. В силу симметрии суммарный вектор $\vec{B}$ направлен вдоль оси x, а это значит, что для нахождения модуля вектора надо сложить проекции всех векторов $d\vec{B}$ на ось Ox. $dB_x = dB\cos\varphi = \ = \frac{\mu\mu_0}{4\pi}\frac{I_0 dl}{r^3}\cos\varphi$. Интегрируя это выражение по всем dl, что дает $2\pi R$, и учитывая, что $\cos\varphi = \frac{R}{r}$, $r = \left(a^2 + R^2\right)^{\frac{1}{2}}$, получаем $B = \frac{\mu\mu_0}{4\pi}\frac{2\pi R^2 I}{\left(a^2 + R^2\right)^{\frac{3}{2}}}$.

Поскольку $B = \mu\mu_0 H$, то $H = \frac{R^2 I}{2\left(a^2 + R^2\right)^{\frac{3}{2}}}$; H = 12,7 А/м.

11.18 Напряженность магнитного поля в центре кругового витка H_0 = 0,8 Э. Радиус витка R = 11 см. Найти напряженность H магнитного поля на оси витка на расстоянии a = 10 см от его плоскости.

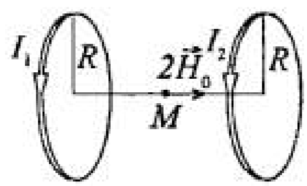
Решение

Переведем значение напряженности в единицы СИ. Поскольку $1Э = \frac{1}{4\pi}\cdot 10^3$ А/м $\approx 79{,}6$ А/м, то $H_0 = 0{,}8$ Э = = 63.7 А/м. Напряженность магнитного поля на оси кругового витка $H = \frac{R^2 I}{2\left(R^2 + a^2\right)^{\frac{3}{2}}}$. Нам неизвестен ток I. Но напряженность в центре витка $H_0 = \frac{I}{2R}$, откуда $I = 2H_0 R$.

Тогда $H = \frac{R^3 H_0}{\left(R^2 + a^2\right)^{\frac{3}{2}}} = 25{,}7$ А/м.

11.19 Два круговых витка радиусом R = 4 см каждый расположены в параллельных плоскостях на расстоянии d = 10 см друг от друга. По виткам текут токи $I_1 = I_2$ = 2 А. Найти напряженность H магнитного поля на оси витков в точке, находящейся на равном расстоянии от них. Задачу решить, когда: а) токи в витках текут в одном направлении; б) токи в витках текут в противоположных направлениях.

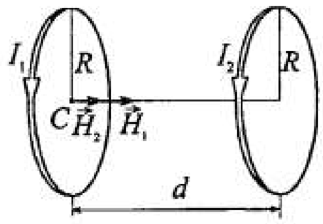
Решение



Напряженность магнитного поля, создаваемого каждым из круговых витков в точке M, равна $H_0 = \dfrac{IR^2}{2\left(R^2 + r^2\right)^{\frac{3}{2}}}$, где $r = \dfrac{d}{2} = 5$ см. Поскольку величины I, R и r для обоих витков одинаковы, то значение напряженности по абсолютной величине для обоих витков будет равным, т. е. $H_{01} = H_{02}$. Согласно принципу суперпозиции результирующая напряженность магнитного поля $\vec{H} = \vec{H}_{01} + \vec{H}_{02}$. Если токи в витках текут в одном направлении, то направления векторов напряженности $\vec{H}_{01}$ и $\vec{H}_{02}$ совпадают и $\vec{H} = 2\vec{H}_0$ или $H = \dfrac{IR^2}{\left(R^2 + r\right)^{\frac{3}{2}}} = 12{,}2$ А/м. Если токи текут в противоположных направлениях, то $\vec{H}_{01} = -\vec{H}_{02}$ и $H = 0$.

11.20 Два круговых витка радиусом R = 4 см каждый расположены в параллельных плоскостях на расстоянии d = 5 см друг от друга. По виткам текут токи $I_1 = I_2$ = 4 А. Найти напряженность H магнитного поля в центре одного из витков. Задачу решить, когда: а) токи в витках текут в одном направлении; б) токи в витках текут в противоположных направлениях.

Решение



Согласно принципу суперпозиции напряженность в точке C равна $\vec{H} = \vec{H}_1 + \vec{H}_2$, где $H_1 = \frac{I_1}{2R_1}$, $H_2 = \frac{I_2 R_2^2}{2\left(R_2^2 + d^2\right)^{\frac{3}{2}}}$. Если токи текут в одном направлении, то $H = H_1 + H_2$. По условию $R_1 = R_2 = R$ и $I_1 = I_2 = I$. Тогда $H = \frac{I}{2R} + \frac{IR^2}{2\left(R^2 + d^2\right)^{\frac{3}{2}}}$.

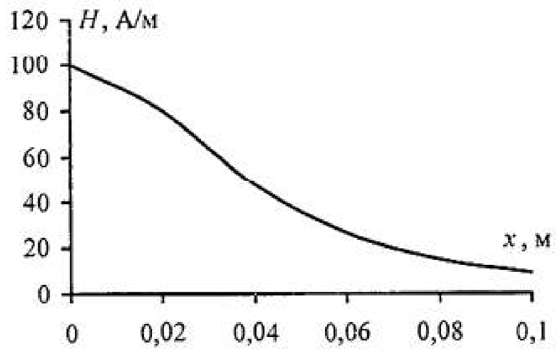
Подставляя числовые данные, получим H = 62,3 А/м. Если токи текут в противоположных направлениях, то $H = H_1 - H_2$; H = 37,7 А/м.

11.21 Найти распределение напряженности H магнитного поля вдоль оси кругового витка диаметром D = 10 см, по которому течет ток I = 10 А. Составить таблицу значений H и достроить график для значений x в интервале через каждые 2 см.

Решение

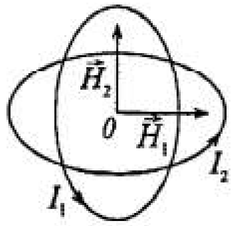
Зависимость напряженности магнитного поля H от расстояния x, откладываемого по оси кругового витка, дается следующим уравнением: $H = \frac{IR^2}{2\left(R^2 + x^2\right)^{\frac{3}{2}}}$, где $R = \frac{D}{2} =$ $= 5$ см. Подставляя числовые данные, получим $H = \frac{12{,}5 \cdot 10^{-3}}{\left(25 \cdot 10^{-4} + x^2\right)^{\frac{3}{2}}}$. По данной зависимости составим таблицу и построим график.

x, м	0	0,02	0,04	0,06	0,08	0,1
H, А/м	100,00	80,04	47,61	26,24	14,89	8,94



11.22 Два круговых витка расположены в двух взаимно перпендикулярных плоскостях так, что центры этих витков совпадают. Радиус каждого витка R = 2 см, токи в витках $I_1 = I_2 = 5$ А. Найти напряженность H магнитного поля в центре этих витков.

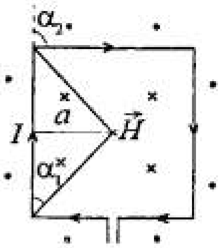
Решение



Напряженность магнитного поля в центре кругового витка с током $H = \dfrac{I}{2R}$. На рисунке видно, что векторы $\vec{H}_1$ и $\vec{H}_2$ взаимно перпендикулярны. Согласно принципу суперпозиции результирующая напряженность $\vec{H} = \vec{H}_1 + \vec{H}_2$ или $H = \sqrt{H_1^2 + H_2^2}$. Поскольку $I_1 = I_2 = I$ и $R_1 = R_2 = R$, то $H_1 = H_2 = \dfrac{I}{2R}$. Тогда $H = \dfrac{I}{2R}\sqrt{2} = 177$ А/м.

11.23 Из проволоки длиной l = 1 м сделана квадратная рамка. По рамке течет ток I = 10 А. Найти напряженность H магнитного поля в центре рамки.

Решение



Рамку можно условно разбить на четыре проводника длиной $\dfrac{l}{4}$, каждый из которых создает магнитное поле напряженностью $H_0 = \dfrac{I}{4\pi a}(\cos\alpha_1 - \cos\alpha_2)$ (см. задачу 11.11). Из рисунка видно, что $a = \dfrac{l}{8}$, угол $\alpha_1 = 45°$, угол $\alpha_2 = 135°$. Очевидно, что результирующая напряженность $\vec{H} = 4\vec{H}_0$. Вектор $\vec{H}$ направлен от нас, в плоскость чертежа. Таким образом, $H = \dfrac{8I}{\pi l} \times (\cos 45° - \cos 135°) = \dfrac{8\sqrt{2}I}{\pi l}$; $H = 36$ А/м.

11.24 В центре кругового проволочного витка создается магнитное поле напряженностью H при разности потенциалов U_1 на концах витка. Какую надо приложить разность потенциалов U_2, чтобы получить такую же напряженность магнитного поля в центре витка вдвое большего радиуса, сделанного из той же проволоки?

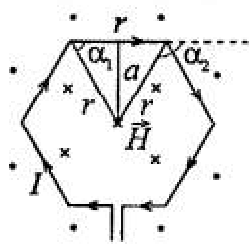
Решение

Напряженность в центре кругового витка с током $H = \frac{I}{2r}$, где r — радиус витка. По закону Ома $I = \frac{U}{R}$, где сопротивление проводника $R = \rho\frac{l}{S}$. Для кругового витка радиуса r длина проводника $l_1 = 2\pi r$, тогда $R_1 = \rho\frac{2\pi r}{S}$ и $I_1 = \frac{U_1 S}{2\rho\pi r}$. Для кругового витка радиуса $2r$ длина проводника $l_2 = 4\pi r$, тогда $R_2 = \rho\frac{4\pi r}{S}$ и $I_2 = \frac{U_1 S}{4\rho\pi r}$. По условию $H = \frac{I_1}{2r} = \frac{I_2}{4r}$ или $\frac{U_1 S}{4\rho\pi r^2} = \frac{U_2 S}{16\rho\pi r^2}$, откуда $U_2 = 4U_1$.

11.25 По проволочной рамке, имеющей форму правильного шестиугольника, идет ток $I = 2$ А. При этом в центре рамки образуется магнитное поле напряженностью $H = 33$ А/м. Найти длину l проволоки, из которой сделана рамка.

Решение

Разобьем шестиугольник на шесть прямолинейных проводников длиной $r = \frac{l}{6}$, каждый из которых создает в центре шестиугольника магнитное поле напряженностью $H_0 = \frac{I}{4\pi a}(\cos\alpha_1 - \cos\alpha_2)$ (см. задачу 11.11). Из рисунка найдем $\alpha_1 = 60°$; $\alpha_2 = 120°$;

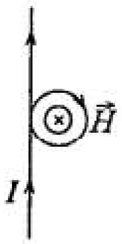


$a = r\sin 60° = \frac{\sqrt{3}l}{12}$. Результирующий вектор $\vec{H} = 6\vec{H}_0$ и направлен от нас в плоскость рисунка. Подставив найденные величины, получим $H_0 = \frac{\sqrt{3}I}{\pi l}$.

Тогда $H = \frac{6\sqrt{3}I}{\pi l}$, откуда $l = \frac{6\sqrt{3}I}{H\pi} = 0{,}2$ м.

11.26 Бесконечно длинный провод образует круговой виток, касательный к проводу. По проводу идет ток $I = 5$ А. Найти радиус R витка, если напряженность магнитного поля в центре витка $H = 41$ А/м.

Решение

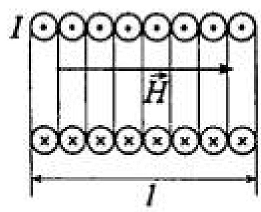


Напряженность магнитного поля $\vec{H}$ в центре витка складывается из направленных за чертеж векторов напряженности $\vec{H}_1$, создаваемой прямолинейным проводником, и напряженности $\vec{H}_2$, создаваемой круговым током. $\vec{H} = \vec{H}_1 + \vec{H}_2$, где $H_1 = \frac{I}{2\pi R}$; $H_2 = \frac{I}{2R}$. Тогда $H = \frac{I(1+\pi)}{2\pi R}$, откуда $R = \frac{I(1+\pi)}{2\pi H} = 8$ см.

11.27 Катушка длиной $l = 30$ см имеет $N = 1000$ витков. Найти напряженность H магнитного поля внутри катушки, если по катушке проходит ток $I = 2$ А. Диаметр катушки считать малым по сравнению с ее длиной.

Решение

По условию диаметр катушки намного меньше ее длины, тогда катушку можно считать бесконечно длинным соленоидом, для которого $H = In$, где $n = \frac{N}{l}$ — число витков на единицу длины. Таким образом, $H = I\frac{N}{l} = 6{,}67$ кА/м.



Направление магнитного поля в соленоиде (в разрезе)

11.28 Обмотка катушки сделана из проволоки диаметром $d = 0{,}8$ мм. Витки плотно прилегают друг к другу. Считая катушку достаточно длинной, найти напряженность H магнитного поля внутри катушки при токе $I = 1$ А.

Решение

Внутри катушки напряженность поля $H = In$, где n — число витков на единицу длины, равное $\frac{1}{d}$. Отсюда $H = \frac{I}{d} = 1{,}25$ кА/м.

11.29 Из проволоки диаметром d = 1 мм надо намотать соленоид, внутри которого должна быть напряженность магнитного поля H = 24 кА/м. По проволоке можно пропускать предельный ток I = 6 А. Из какого числа слоев будет состоять обмотка соленоида, если витки наматывать плотно друг к другу? Диаметр катушки считать малым по сравнению с ее длиной.

Решение

Если обмотка состоит из одного слоя, то напряженность внутри катушки $H_1 = \frac{I}{d} = 6$ кА/м (см. задачу 11.28). Необходимое число слоев $N = \frac{H}{H_1} = 4$.

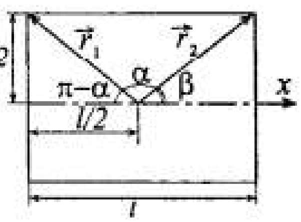
11.30 Требуется получить напряженность магнитного поля H = 1 кА/м в соленоиде длиной l = 20 см и диаметром D = 5 см. Найти число ампер-витков. IN, необходимое для этого соленоида, и разность потенциалов U , которую надо приложить к концам обмотки из медной проволоки диаметром d = 0,5 мм. Считать поле соленоида однородным.

Решение

Поскольку поле данного соленоида однородно, то можно рассчитать напряженность внутри него, используя формулу для бесконечного соленоида: $H = I\frac{N}{l}$. Отсюда число ампер-витков $IN = Hl = 200$ А·в. Согласно закону Ома разность потенциалов $U = IR$. Сопротивление обмотки найдем по формуле $R = \rho\frac{l}{S}$, где длина медной проволоки $l = \pi DN$, площадь поперечного сечения $S = \pi\frac{d^2}{4}$, удельное сопротивление меди $\rho = 0{,}017$ мкОм·м. Отсюда $R = \rho\frac{4DN}{d^2}$, тогда $U = \frac{\rho 4DIN}{d^2}$. Подставляя числовые данные, получим $U = 2{,}7$ В.

11.31 Каким должно быть отношение длины l катушки к ее диаметру D, чтобы напряженность магнитного поля в центре катушки можно было найти по формуле для напряженности поля бесконечно длинного соленоида? Ошибка при таком допущении не должна превышать δ = 5%.

Решение



Напряженность магнитного поля на оси соленоида конечной длины $H_1 = \frac{In}{2}(\cos\beta - \cos\alpha)$, где $n = \frac{N}{l}$ – число витков на единицу длины, α и β — углы между осью соленоида из рассматриваемой точки к концам соленоида. Напряженность соленоида конечной длины $H_2 = In$. По условию допускаемая ошибка $\delta = \frac{H_2 - H_1}{H_2}$. Подставляя значения H_1 и H_2, получим $\delta = 1 - \frac{1}{2}(\cos\beta - \cos\alpha)$ — (1). Из рисунка видно, что $\cos\alpha = \sin(\pi - \alpha) = \frac{D}{2r_1}$ или $\cos\alpha = \frac{D}{\sqrt{D^2 + l^2}}$. Соответственно $\cos\beta = \frac{l}{2r_2}$; $\cos\beta = \frac{l}{\sqrt{D^2 + l^2}}$. Поскольку $\alpha = \pi - \beta$, то $\cos\alpha = -\cos\beta$ и уравнение (1) можно записать в виде $\delta = 1 - \cos\beta$, отсюда $1 - \delta = \cos\beta = \frac{l}{\sqrt{D^2 + l^2}}$; $(1-\delta)^2 = \frac{l^2}{D^2 + l^2}$;

$\frac{1}{(1-\delta)^2} = 1 + \frac{D^2}{l^2}$;

$\frac{D}{l} = \frac{\sqrt{1-(1-\delta)^2}}{1-\delta}$ или $\frac{l}{D} = \frac{1-\delta}{\sqrt{1-(1-\delta)^2}} = 3$.

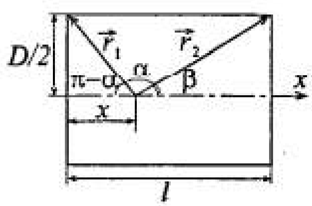
11.32 Какую ошибку δ мы допускаем при нахождении напряженности магнитного поля в центре соленоида, принимая соленоид задачи 11.30 за бесконечно длинный?

Решение

Имеем $\frac{L}{D} = \frac{1-\delta}{\sqrt{1-(1-\delta)^2}}$ — (1), где L — длина соленоида, D — его диаметр, δ — допустимая ошибка (см. задачу 11.31). Из (1) найдем $\delta = 1 - \frac{L}{\sqrt{D^2 + L^2}}$. Подставляя числовые данные из задачи 11.30, найдем $\delta = 0{,}03 = 3\%$.

11.33 Найти распределение напряженности H магнитного поля вдоль оси соленоида, длина которого l = 3 см и диаметр D = 2 см. По соленоиду течет ток I = 2 А. Катушка имеет N = 100 витков. Составить таблицу значений H и построить график для значений x в интервале $0 \le x \le 3$ см через каждые 0,5 см.

Решение



Напряженность магнитного поля на оси соленоида конечной длины $H = \frac{In}{2}(\cos\beta - \cos\alpha)$ — (1), где $n = \frac{N}{l}$ — число витков на единицу длины, α и β — углы между осью соленоида из рассматриваемой точки к концам соленоида. Рассмотрим произвольную точку A на оси соленоида и определим зависимость величин $\cos\alpha$ и $\cos\beta$ от диаметра D и смещения по оси x. Из рисунка видно, что $\cos\alpha = \sin(\pi - \alpha) = \frac{D}{2r_1}$ или $\cos\alpha = \frac{D}{2\sqrt{(D/2)^2 + x^2}}$.

Соответственно $\cos\beta = \frac{l-x}{r_2}$; $\cos\beta = \frac{l-x}{\sqrt{(D/2)^2 + (l-x)^2}}$.

Тогда уравнение (1) примет вид:

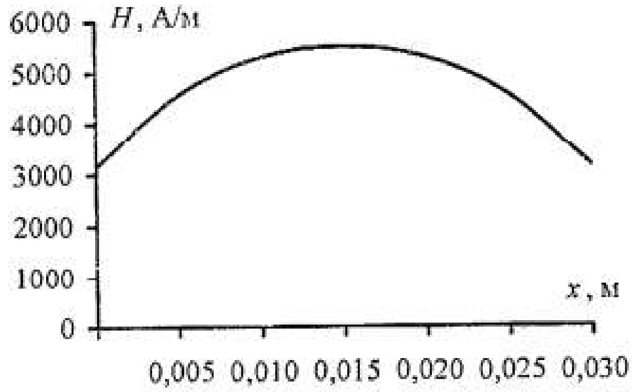
$$H = \frac{IN}{2l}\left(\frac{l-x}{\sqrt{(D/2)^2 + (l-x)^2}} + \frac{x}{\sqrt{(D/2)^2 + x^2}}\right).$$

Подставляя числовые данные, получим

$$H = 3{,}3\cdot 10^3\left(\frac{0{,}03-x}{\sqrt{10^{-4} + (0{,}03-x)^2}} + \frac{x}{\sqrt{10^{-4} + x^2}}\right).$$

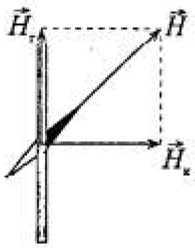
Для заданного интервала значений x составим таблицу и начертим график:

x, м	0	0,005	0,01	0,015	0,02	0,025	0,03
H, А/м	3130,7	4539,8	5285,1	5491,5	5285,1	4539,8	3130,7



11.34 Конденсатор емкостью C = 10 мкФ периодически заряжается от батареи с э.д.с. ε = 100 В и разряжается через катушку в форме кольца диаметром D = 20 см, причем плоскость кольца совпадает с плоскостью магнитного меридиана. Катушка имеет N = 32 витка. Помещенная в центре катушки горизонтальная магнитная стрелка отклоняется на угол α = 45°. Переключение конденсатора происходит с частотой n = 100 с$^{-1}$. Найти из данных этого опыта горизонтальную составляющую $H_г$ напряженности магнитного поля Земли.

Решение



(Вид сверху)

При каждом разряде конденсатора через катушку проходит количество электричества $q = CU$ — (1). Средняя сила тока, идущего через катушку, $I = q \cdot n$ — (2). Напряженность магнитного поля в центре катушки $H_к = \frac{NI}{2R} = \frac{NI}{D}$ или, с учетом (1) и (2), $H_к = \frac{NCUn}{D}$. Поскольку катушка находится в магнитном поле Земли, то магнитная стрелка, помещенная в центре катушки, поворачивается по направлению вектора $\vec{H}$, полученного сложением векторов $\vec{H}_к$ и $\vec{H}_г$. Векторы $\vec{H}_к$ и $\vec{H}_г$ взаимно перпендикулярны, и, как следует из рисунка, $H_г = H_к tg\alpha$. Поскольку $\alpha = 45°$ и $tg\alpha = 1$, то $H_г = H_к = \frac{NCUn}{D}$. Подставляя числовые данные, получим $H_г = 16$ А/м.

11.35 Конденсатор емкостью C = 10 мкФ периодически заряжается от батареи с э.д.с. ε = 120 В и разряжается через соленоид длиной l = 10 см. Соленоид имеет N = 200 витков. Среднее значение напряженности магнитного поля внутри соленоида H = 240 А/м. С какой частотой n происходит переключение конденсатора? Диаметр соленоида считать малым по сравнению с его длиной.

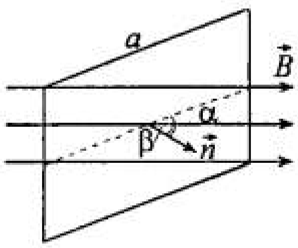
Решение

Напряженность магнитного поля соленоида $H = \frac{IN}{l}$, откуда ток, протекающий через соленоид, равен $I = \frac{lH}{N}$ — (1). Из определения силы тока следует, что $I = \frac{dq}{dt}$, откуда $Idt = dq$; $I\int dt = \int dq$; $It = q$ — (2), где заряд q можно найти из соотношения $C = \frac{q}{U}$ — (3). Поскольку $U = \varepsilon$, то из (3) $q = C\varepsilon$. Тогда из (2) $I = \frac{C\varepsilon}{t}$ или, с учетом (1), $\frac{C\varepsilon}{t} = \frac{lH}{N}$. Отсюда время, в течение которого разряжается конденсатор, $t = \frac{C\varepsilon N}{lH}$. Частота переключения конденсатора $n = \frac{1}{t} = \frac{lH}{C\varepsilon N}$. Подставляя числовые данные, получим $n = 100$ с$^{-1}$.

11.36 В однородном магнитном поле напряженностью H = 79,6 кА/м помешена квадратная рамка, плоскость которой составляет с направлением магнитного поля угол α = 45°. Сторона рамки a = 4 см. Найти магнитный поток Φ, пронизывающий рамку.

Решение

Магнитный поток $\Phi = \vec{B}\vec{S} = BS\cos\beta$, где β — угол между направлением магнитного поля и нормалью к плоскости рамки. Имеем $S = a^2$; $\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha$, $B = \mu\mu_0 H$. Отсюда $\Phi = \mu\mu_0 a^2 \cos 45° = 113 \cdot 10^{-6}$ Вб.



11.37 В магнитном поле, индукция которого B = 0,05 Тл, вращается стержень длиной l = 1 м. Ось вращения, проходящая через один из концов стержня, параллельна направлению магнитного поля. Найти магнитный поток Ф , пересекаемый стержнем при каждом обороте.

Решение

Магнитный поток, пересекаемый стержнем, равен $\Phi = \vec{B}\vec{S}$. По условию векторы $\vec{B}$ и $\vec{S}$ взаимно перпендикулярны, следовательно, $\Phi = BS$, где $S = \pi l^2$, $B = \mu\mu_0 H$. Отсюда $\Phi = \mu\mu_0 H \pi l^2 = 157 \cdot 10^{-3}$ Вб.

11.38 Рамка, площадь которой S = 16 см^2 , вращается в однородном магнитном поле с частотой n = 2 с$^{-1}$. Ось вращения находится в плоскости рамки и перпендикулярна к направлению магнитного поля. Напряженность магнитного поля H = 79,6 кА/м. Найти зависимость магнитного потока Ф , пронизывающего рамку, от времени t и наибольшее значение Φ_{max} магнитного потока.

Решение

Магнитный поток, пронизывающий рамку, равен $\Phi = \vec{B}\vec{S} = BS\cos\alpha$, где угол α между направлением магнитного поля и нормалью к плоскости рамки изменяется со временем по закону: $\alpha = \alpha_0 + \omega t = \alpha_0 + 2\pi nt$. Здесь α_0 — угол между направлением магнитного поля и нормалью в начальный момент времени. Отсюда, с учетом $B = \mu\mu_0 H$, имеем $\Phi = \mu\mu_0 HS\cos(2\pi nt + \alpha_0)$. Подставляя числовые данные, получим $\Phi = 1{,}6 \cdot 10^{-4}\cos(4\pi t + \alpha_0)$. Очевидно, что максимального значения магнитный поток достигает, когда плоскость рамки перпендикулярна линиям магнитного поля, т. е. $\alpha = 0°$, а $\cos\alpha = 1$. Следовательно, $\Phi_{max} = 1{,}6 \cdot 10^{-4}$ Вб.

11.39 Железный образец помещен в магнитное поле напряженностью H = 796 А/м. Найти магнитную проницаемость μ железа.

Решение

Напряженность магнитного поля и магнитная индукция связаны соотношением $B = \mu\mu_0 H$. По графику зависимости $B(H)$, данному в приложении, найдем для $H = 796$ А/м значение $B = 1{,}4$ Тл. Отсюда $\mu = \dfrac{B}{\mu_0 H} = 1400$.

11.40 Сколько ампер-витков потребуется для того, чтобы внутри соленоида малого диаметра и длиной l = 30 см объемная плотность энергии магнитного поля была равна W_0 = 1,75 Дж/м^3?

Решение

Объемная плотность энергии $W_0 = \dfrac{HB}{2}$ — (1). Напряженность магнитного поля соленоида, который в данных условиях можно считать бесконечно длинным, определяется соотношением $H = In = \dfrac{IN}{l}$ — (2), где IN — искомое число ампер-витков. Поскольку $B = \mu\mu_0 H$, то уравнение (1) можно записать в виде $W_0 = \dfrac{\mu\mu_0 H^2}{2}$ или, с учетом (2), $W_0 = \dfrac{\mu\mu_0 (IN)^2}{2l^2}$, откуда $IN = \sqrt{\dfrac{2W_0 l^2}{\mu\mu_0}} = 500$ А·в.

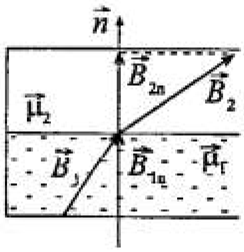
11.41 Сколько ампер-витков потребуется для создания магнитного потока Φ = 0,42 мВб в соленоиде с железным сердечником длиной l = 120 см и площадью поперечного сечения S = 3 см^2?

Решение

Имеем $B = \dfrac{\Phi}{S} = 1{,}4$ Тл. По графику зависимости $B(H)$, данному в приложении, найдем $H = 0{,}75 \cdot 10^3$ А/м. Но $H = \dfrac{IN}{l}$, откуда $IN = Hl = 900$ А·в.

11.42 Длина железного сердечника тороида $l_1 = 2{,}5$ м, длина воздушного зазора $l_2 = 1$ см. Число витков в обмотке тороида $N = 1000$. При токе $I = 20$ А индукция магнитного поля в воздушном зазоре B = 1,6 Тл. Найти магнитную проницаемость μ железного сердечника при этих условиях. (Зависимость B от H для железа неизвестна.)

Решение



Запишем условие преломления линий поля $\vec{B}$ на границе раздела воздух — железо в проекции на нормаль: $B_{1n} = B_{2n}$. Обозначим для простоты записи $B_{1n} = B_{2n} \equiv B$. Если тороид имеет воздушный зазор, то магнитный поток $\Phi = \dfrac{IN}{l_1/(S\mu_0\mu_1) + l_2/(S\mu_0\mu_2)}$. Имеем $B = \dfrac{\Phi}{S} = \dfrac{IN\mu_0}{l_1/\mu_1 + l_2/\mu_2}$ — (1), где $\mu_1 = 1$ — магнитная проницаемость воздуха, μ_2 — магнитная проницаемость железа. Из (1) имеем $\dfrac{1}{B} = \dfrac{l_1}{\mu_1 IM\mu_0} + \dfrac{l_2}{\mu_2 IN\mu_0}$; $\dfrac{l_2}{\mu_2 IN\mu_0} = \dfrac{\mu_1 IN\mu_0 - Bl_1}{B\mu_1 IN\mu_0}$, откуда $\mu_2 = \dfrac{B\mu_1 l_2}{\mu_1 IN\mu_0 - Bl_1} = 440$.

11.43 Длина железного сердечника тороида $l_1 = 1$ м, длина воздушного зазора $l_2 = 1$ см. Площадь поперечного сечения сердечника $S = 25$ см^2. Сколько ампер-витков потребуется для создания магнитного потока $\Phi = 1{,}4$ мВб, если магнитная проницаемость материала сердечника $\mu = 800$? (Зависимость B от H для железа неизвестна.)

Решение

Если тороид имеет воздушный зазор, то магнитный поток $\Phi = \dfrac{IN}{l_1/(S\mu_0\mu_1) + l_2/(S\mu_0\mu_2)}$ или $\Phi = \dfrac{INS\mu_0\mu_1\mu_2}{l_1\mu_2 + l_2\mu_1}$, откуда $IN = \dfrac{\Phi(l_1\mu_2 + l_2\mu_1)}{S\mu_0\mu_1\mu_2} = 5 \cdot 10^3$ А·в.

11.44 Найти магнитную индукцию B в замкнутом железном сердечиике тороида длиной $l = 20{,}9$ см, если число ампер-витков обмотки тороида $IN = 1500$ А·в. Какова магнитная проницаемость u материала сердечника прп этих условиях?

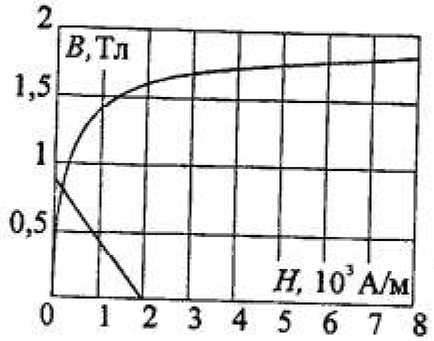
Решение

Напряженность магнитного поля внутри тороида равна $H = In = \dfrac{IN}{l}$; $H = 7177$ А/м. По графику зависимости $B(H)$ найдем $B = 1{,}8$ Тл. Поскольку $B = \mu\mu_0 H$, то $\mu = \dfrac{B}{\mu_0 H} - 200$.

11.45 Длина железного сердечника тороида $l_1 = 1$ м, длина воздушного зазора $l_2 = 3$ мм. Число витков в обмотке тороида $N = 2000$. Найти напряженность магнитного поля H_2 в воздушном зазоре при токе $I = 1$ А в обмотке тороида.

Решение

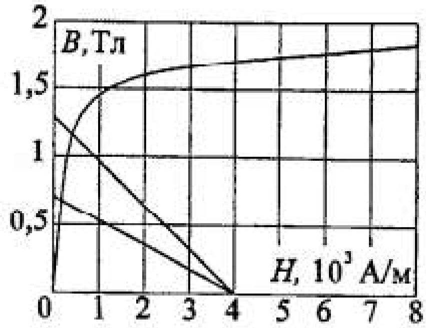
Имеем $B_1 = B_2 = \frac{\Phi}{S} = \frac{IN\mu_0}{l_1/\mu_1 + l_2/\mu_2}$ — (1) (см. задачу 11.42). Т. к. $B_1 = \mu_0\mu_1 H_1$, то из (1) имеем $B_2\frac{l_2}{\mu_2} + \mu_0 H_1 l_1 = IN\mu_0$ — (2). Это уравнение прямой линии в координатных осях H, B. Но величины H и B кроме уравнения (2) связаны еще графиком $B = f(H)$. Ордината точки пересечения прямой (2) и кривой, соответствующей зависимости $B = f(H)$, дает значение магнитной индукции $B_1 = B_2$. Для построения прямой по уравнению (2) находим $B = \frac{IN\mu_0\mu_2}{l_2} = 0{,}84$ Тл при $H = 0$; $H = \frac{IN}{l_1} = 2 \cdot 10^3$ А/м при $B = 0$. Искомая точка пересечения дает $B_1 = B_2 = 0.78$ Тл. Тогда для воздушного зазора $H_2 = \frac{B_2}{\mu_0\mu_2} = 620 \cdot 10^3$ А/м.



11.46 Длина железного сердечника $l_1 = 50$ см, длина воздушного зазора $l_2 = 2$ мм. Число ампер-витков в обмотке тороида $IN = 2000$ А·в. Во сколько раз уменьшится напряженность магнитного поля в воздушном зазоре, если при том же числе ампер-витков увеличить длину воздушного зазора вдвое?

Решение

Имеем $B_1 = B_2 = \frac{\Phi}{S} = \frac{IN\mu_0}{l_1/\mu_1 + l_2/\mu_2}$ — (1) (см. задачу 11.42). Т. к. $B_1 = \mu_0\mu_1 H_1$, то из (1) имеем $B_2\frac{l_2}{\mu_2} + \mu_0 H_1 l_1 = IN\mu_0$ — (2). Это уравнение прямой линии в координатных осях H, B. Но величины H и B кроме уравнения (2) связаны еще графиком $B = f(H)$. Ордината точки пересечения прямой (2) и кривой, соответствующей зависимости $B = f(H)$, даст значение магнитной индукции $B_1 = B_2$. Для построения прямой, соответствующей первоначальной длине воздушного зазора,



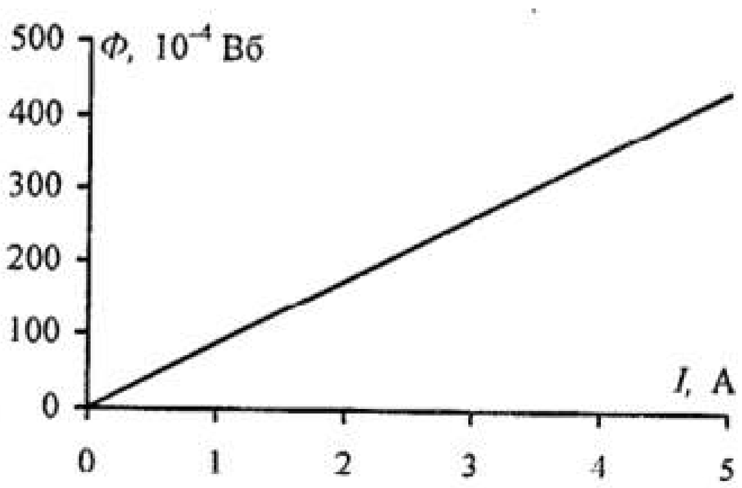
по уравнению (2) находим $B = \dfrac{IN\mu_0\mu_2}{l_2} = 1{,}257$ Тл при $H = 0$; $H = IN / l_1 = 4 \cdot 10^3$ А/м при $B = 0$. Искомая точка пересечения дает $H_2 = 0{,}45 \cdot 10^3$ А/м. Аналогично для построения прямой, соответствующей длине воздушного зазора равной $2 \cdot l_2$, по уравнению (2) находим $B = \dfrac{IN\mu_0\mu_2}{l_2} = 0{,}628$ Тл при $H = 0$; $H = IN / l_1 = 4 \cdot 10^3$ А/м при $B = 0$. Искомая точка пересечения дает $H_1 = 0{,}25 \cdot 10^3$ А/м. Отсюда отношение $H_2 / H_1 = 1{,}8$.

11.47 Внутри соленоида длиной l = 25,1 см и диаметром Φ = 2 см помещен железный сердечник. Соленоид имеет N = 200 витков. Построить для соленоида с сердечником график зависимости магнитного потока Ф от тока I в интервале $0 \le I \le 5$ А через каждый 1 А. По оси ординат откладывать Φ (в 10^{-4} Вб).

Решение

Полный магнитный поток сквозь соленоид выражается соотношением $\Phi = \dfrac{\mu\mu_0 N^2 IS}{l}$ — (1). Найдем магнитную проницаемость μ материала сердечника при $I = 1$ А. Напряженность магнитного поля $H = \dfrac{IN}{l} = 8 \cdot 10^2$ А/м. По графику зависимости $B(H)$ найдем $B = 1{,}4$ Тл. Тогда $\mu = \dfrac{B}{\mu_0 H} = 1392$. Площадь поперечного сечения соленоида $S = \pi \dfrac{D^2}{4} = 3{,}14 \cdot 10^{-4}$ м². Подставляя числовые данные в (1), получим $\Phi = 87{,}5 \cdot 10^{-4} \cdot I$. Для заданного интервала изменения I составим таблицу и построим график.

I, А	0	1	2	3	4	5
Φ, 10^{-4} Вб	0	87,5	175	262,5	350	437,5



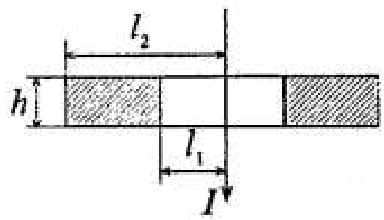
11.48 Магнитный поток сквозь соленоид (без сердечника) Φ = 5 мкВб. Найти магнитный момент p соленоида, если его длина l = 25 см.

Решение

Магнитный момент контура с током равен $p = IS$. Тогда магнитный момент соленоида $p = INS$. Имеем $\Phi = \frac{INS\mu\mu_0}{l} = \frac{p\mu\mu_0}{l}$, откуда $p = \frac{\Phi l}{\mu\mu_0} = 1\ \text{м}^2\cdot\text{А}$.

11.49 Через центр железного кольца перпендикулярно к его плоскости проходит длинный прямолинейный провод, по которому течет ток I = 25 А. Кольцо имеет четырехугольное сечение, размеры которого l_1 = 18 мм, l_2 = 22 мм и h = 5 мм. Считая приближённо, что в любой точке сечения кольца индукция одинакова и равна индукции на средней линии кольца, найти магнитный поток Φ, пронизывающий площадь сечения кольца.

Решение



Т.к. по условию задачи приближенно можно считать, что в любой точке сечения кольца индукция одинакова и равна индукции на средней линии кольца, то напряженность магнитного поля в сечении $H = \frac{I}{2\pi a}$, где $a = \frac{l_2 - l_1}{2} + l_1 = 20$ мм, тогда $H = 198$ А/м. По графику для данного значения напряженности магнитного поля находим значение магнитной индукции $B = 0{,}45$ Тл. Тогда магнитный поток $\Phi = 2B(l_2 - l_1)h = 18$ мкВб.

11.50 Найти магнитный поток Φ, пронизывающий площадь сечения кольца предыдущей задачи, учитывая, что магнитное поле в различных точках сечения кольца различно. Значение μ считать постоянным и найти его по графику кривой $B = F(H)$ для значения на средней линии кольца.

Решение

Напряженность магнитного поля в сечении $H = \frac{I}{2\pi x}$. Рассмотрим элемент площади поперечного сечения кольца $dS = hdx$. Магнитный поток сквозь этот элемент равен $d\Phi = BdS = \mu\mu_0 \frac{I}{2\pi x} hdx$. Тогда магнитный поток через левую половину поперечного сечения кольца равен $\Phi' = \frac{\mu\mu_0 Ih}{2\pi}\int_{l_1}^{l_2}\frac{dx}{x} = \frac{\mu\mu_0 Ih}{2\pi} ln\frac{l_2}{l_1}$, а для всего кольца $\Phi = 2\Phi' = \frac{\mu\mu_0 Ih}{\pi} ln\frac{l_2}{l_1}$ — (1). Из предыдущей задачи имеем $H = 198$ А/м и $B = 0{,}45$ Тл. Тогда $\mu = \frac{B}{\mu_0 H} = 1808$. Подставляя числовые данные в (1), получим $\Phi = 18$ мкВб.

11.51 Замкнутый железный сердечник длиной l = 50 см имеет обмотку из N = 1000 витков. По обмотке течет ток I_1 = 1 А. Какой ток I_2 надо пустить через обмотку, чтобы при удалении сердечника индукция осталась прежней?

Решение

Напряженность магнитного поля внутри сердечника $H_1 = \frac{I_1 N}{l} = 2000$ А/м. По графику зависимости B от H найдем $B = 1{,}56$ Тл. По условию после удаления сердечника индукция в обмотке не изменилась, т. е. $B = \frac{\mu_0 I_2 N}{l}$, откуда $I_2 = \frac{Bl}{\mu_0 N} = 620$ А.

11.52 Железный сердечник длиной l_1 = 50,2 см с воздушным зазором длиной l_2 = 0,1 см имеет обмотку из N = 20 витков. Какой ток I должен протекать по этой обмотке, чтобы в зазоре получить индукцию B_2 = 1,2 Тл?

Решение

Имеем $B = \frac{IN\mu_0\mu_1\mu_2}{l_1\mu_2 + l_2\mu_1}$ — (1) (см. задачу 11.42), где $\mu_1 = 1$ — магнитная проницаемость воздуха, μ_2 — магнитная проницаемость материала сердечника. Зная индукцию B, по графику найдем $H = 400$ А/м. Тогда $\mu_2 = \frac{B}{\mu_0 H} = 2387$. Из (1) найдем $I = \frac{B(l_1\mu_2 + l_2\mu_1)}{N\mu_0\mu_1\mu_2}$. Подставляя числовые данные, получим $I = 58$ А.

11.53 Железное кольцо диаметром D = 11,4 см имеет обмотку из N = 200 витков, по которой течет ток I_1 = 5 А. Какой ток I_2 должен проходить через обмотку, чтобы индукция в сердечнике осталась прежней, если в кольце сделать зазор шириной b = 1 мм? Найти магнитную проницаемость μ материала сердечника при этих условиях.

Решение

Напряженность магнитного поля в целом сердечнике равна $H_1 = \frac{I_1 N}{l} = 2794$ А/м. По графику зависимости B от H найдем $B_1 = 1{,}6$ Тл. Тогда магнитная проницаемость материала сердечника $\mu_2 = \frac{B_1}{\mu_0 H_1} = 456$. Индукция магнитного поля внутри сердечника с прорезью $B_2 = B_1 = \frac{I_2 N \mu_0 \mu_1 \mu_2}{b\mu_2 + (\pi D - b)\mu_1}$ (см. задачу 11.42). Учитывая, что магнитная проницаемость воздуха $\mu_1 = 1$, можно записать $B_1 = \frac{I_2 N \mu_0 \mu_2}{b(\mu_2 - 1) + \pi D}$, откуда $I_2 = \frac{B_1(b(\mu_2 - 1) + \pi D)}{N\mu_0\mu_2} = 11{,}35$ А.

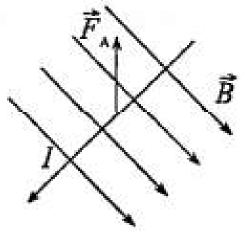
11.54 Между полюсами электромагнита требуется создать магнитное поле с индукцией B = 1,4 Тл. Длина железного сердечника l_1 = 40 см, длина межполюсного пространства l_2 = 1 см, диаметр сердечника D = 5 см. Какую э.д.с. ε надо взять для питания обмотки электромагнита, чтобы получить требуемое магнитное поле, используя медную проволоку площадью поперечного сечения S = 1 мм^2? Какая будет при этом наименьшая толщина b намотки, если считать, что предельно допускаемая плотность тока I = 3 МА/м^2?

Решение

Согласно закону Ома для замкнутой цепи $I = \frac{\varepsilon}{R}$. Поскольку сопротивление проводника $R = \rho\frac{l}{S}$, то $I = \frac{\varepsilon S}{\rho l} = \frac{\varepsilon S}{\rho \pi D N}$, откуда $\varepsilon = \frac{IN\rho\pi D}{S}$ — (1). Количество ампер-витков IN найдем из уравнения $B = \frac{IN\mu_0}{l_1/\mu_1 + l_2/\mu_2}$, откуда $IN = \frac{B}{\mu_0}\left(\frac{l_1}{\mu_1} + \frac{l_2}{\mu_2}\right) = \frac{Bl_1}{\mu_0\mu_1} + Hl_2$. По графику зависимости B от H найдем, что значению $B = 1{,}4$ Тл соответствует значение $H = 0{,}8\cdot10^3$ А/м. Следовательно, $IN = 1{,}14\cdot10^4$ А·в — (2). Тогда из (1) найдем $\varepsilon = 31$ В. Т. к. диаметр проволоки $d = \sqrt{\frac{4S}{\pi}}$, то на длине соленоида l_1 поместится $N_1 = l_1\sqrt{\frac{\pi}{4S}} = 354$ витка. Сила тока $I = jS = 3$ А. Тогда из (2) найдем $N = 3830$ витков. Необходимое число слоев равно $n = \frac{N}{N_1} \approx 11$. Толщина намотки $b = nd = n\sqrt{\frac{4S}{\pi}} = 0{,}012$ м.

11.55 Между полюсами электромагнита создается однородное магнитное поле с индукцией $B = 0{,}1$ Тл. По проводу длиной $l = 70$ см, помещенному перпендикулярно к направлению магнитного поля, течет ток $I = 70$ А. Найти силу F, действующую на провод.

Решение



На элемент длины $d\vec{l}$ проводника с током I в магнитном поле с индукцией $\vec{B}$ действует сила Ампера $d\vec{F} = I\left[d\vec{l}, \vec{B}\right]$. Направление этой силы определяется по правилу векторного произведения векторов. Модуль силы Ампера вычисляется по формуле $dF = IBdl\sin\alpha$, где α — угол между векторами $d\vec{l}$ и $\vec{B}$. Поскольку $\sin\alpha = 1$, то $dF = IBdl$ или $F = IB\int_0^l dl = IBl$. Подставляя числовые данные, получим $F = 4{,}9$ Н.

11.56 Два прямолинейных длинных параллельных проводника находятся на расстоянии $d_1 = 10$ см друг от друга. По проводникам в одном направлении текут токи $I_1 = 20$ А и $I_2 = 30$ А. Какую работу A, надо совершить (на единицу проводников), чтобы раздвинуть эти проводники до расстояния $d = 20$ см?

Решение

Согласно закону Ампера для параллельных токов сила, действующая на единицу длины каждого из проводников, $F = \frac{\mu\mu_0}{2\pi}\frac{I_1 I_2}{r}$. Работа, затрачиваемая на единицу длины проводника, при перемещении одного проводника с током в магнитном поле, создаваемом другим проводником с током, $A = \int_{d_1}^{d_2} F dr = \int_{d_1}^{d_2} \frac{\mu\mu_0 I_1 I_2}{2\pi r} dr = \frac{\mu\mu_0 I_1 I_2}{2\pi} \ln\frac{d_2}{d_1}$. Подставляя числовые данные, получим $A = 83 \cdot 10^{-6}$ Дж/м.

11.57 Два прямолинейных длинных параллельных проводника находятся на некотором расстоянии друг от друга. По проводникам текут одинаковые токи в одном направлении. Найти токи I_1 и I_2, текущие по каждому из проводников, если известно, что для того, чтобы раздвинуть эти проводники на вдвое большее расстояние, пришлось совершить работу (на единицу длины проводников) $A_1 = 55$ мкДж/м.

Решение

Имеем $A_l = \frac{\mu\mu_0 I_1 I_2}{2\pi} \ln\frac{d_2}{d_1}$ (см. задачу 11.56). По условию $I_1 = I_2 = I$ и $d_2 = 2d_1$, тогда $A_l = \frac{\mu\mu_0 I^2}{2\pi} \ln 2$. Отсюда $I = \sqrt{\frac{2\pi A_l}{\mu\mu_0 \ln 2}} = 20$ А, т. е. $I_1 = I_2 = 20$ А.

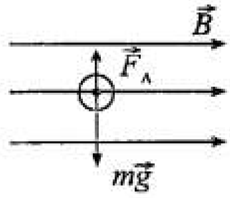
11.58 Из проволоки длиной l = 20 см сделаны квадратный и круговой контуры. Найти вращающие моменты сил M_1 и M_2, действующие на каждый контур, помещенный в однородное магнитное поле с индукцией B = 0,1 Тл. По контурам течет ток I = 2 А. Плоскость каждого контура составляет угол α = 45° с направлением поля.

Решение

На замкнутый контур с током в магнитном поле действует вращательный момент $M = BIS\sin\alpha$. Площадь квадратного контура $S_1 = \left(\frac{l}{4}\right)^2$. Площадь кругового контура $S_1 = \pi R^2$, где $R = \frac{l}{2\pi}$, следовательно, $S_2 = \frac{l^2}{4\pi}$. Тогда на квадратный контур действует вращательный момент $M_1 = \frac{BIl^2}{16}\sin\alpha$; $M_1 = 3{,}5\cdot10^{-4}$ Н·м. На круговой контур действует вращательный момент $M_2 = \frac{BIl^2}{4\pi}\sin\alpha$; $M_2 = 4{,}5\times$ $\times10^{-4}$ Н·м.

11.59 Алюминиевый провод площадью поперечного сечения S = 1 мм^2 подвешен в горизонтальной плоскости перпендикулярно к магнитному меридиану, и по нему течет ток (с запада на восток) I = 1,6 А. Какую долю от силы тяжести, действующей на провод, составляет сила, действующая на него со стороны земного магнитного поля? На сколько уменьшится сила тяжести, действующая на единицу длины провода, вследствие этой силы? Горизонтальная составляющая напряженности земного магнитного поля $H_г$ = 15 А/м.

Решение



Со стороны магнитного поля Земли на проводник действует сила Ампера F_A, направление которой определяется по правилу левой руки. Найдем отношение $\frac{F_A}{mg} = \frac{IBl}{V\rho g} = \frac{I\mu_0 H_г}{S\rho g}$. Подставляя числовые данные, получим $\frac{F_A}{mg} = 0{,}12\%$. Очевидно, что сила тяжести, действующая на единицу длины провода, уменьшится на величину $F_A = Il\mu_0 H_г = 3\cdot10^{-5}$ Н.

11.60 Катушка гальванометра, состоящая из N = 400 витков тонкой проволоки, намотанной на прямоугольный каркас длиной l = 3 см и шириной b = 2 см, подвешена на нити в магнитном поле с индукцией B = 0,1 Тл. По катушке течет ток I = 0,1 мкА. Найти вращающий момент M, действующий на катушку гальванометра, если плоскость катушки: а) параллельна направлению магнитного поля; б) составляет угол α = 60° с направлением магнитного поля.

Решение

На каждый виток катушки действует вращающий момент $M_0 = BIS\sin\alpha$. Тогда на всю катушку действует вращающий момент $M = NBIS\sin\alpha$. Площадь одного витка $S = lb$.

а) $M = BIlbN\sin\frac{\pi}{2} = 2{,}4\cdot10^{-9}$ Н·м; б) $M = BIlbN\sin 60° = 1{,}2\cdot10^{-9}$ Н·м.

11.61 На расстоянии a = 20 см от длинного прямолинейного вертикального провода на нити длиной l = 0,1 м и диаметром d = 0,1 мм висит короткая магнитная стрелка, магнитный момент которой p = 0,01 Ам^2. Стрелка находится в плоскости, проходящей через провод и нить. На какой угол φ повернется стрелка, если по проводу пустить ток I = 30 А? Модуль сдвига материала нити G = 5,9 ГПа. Система экранирована от магнитного поля Земли.

Решение

Проводник с током создает вокруг себя магнитное поле с индукцией $B = \frac{\mu\mu_0 I}{2\pi a}$. Со стороны поля на магнитную стрелку действует вращающий момент $\vec{M} = [\vec{p}, \vec{B}]$ или $M = pB\sin\alpha$. Вращающий момент вызывает поворот нити на угол $\varphi = \frac{2lM}{\pi G r^4}$, где $r = \frac{d}{2} = 5\cdot10^{-5}$ м. Т. к. $\sin\alpha = 1$, то $M = pB = \frac{\mu\mu_0 pI}{2\pi a}$, отсюда $\varphi = \frac{\mu\mu_0 Ilp}{\pi^2 aGr^4} = 0{,}52$ рад или $\varphi = 30°$.

11.62 Катушка гальванометра, состоящая из N = 600 витков проволоки, подвешена на пита длиной l = 10 см и диаметром d = 0,1 мм в магнитном поле напряженностью H = 160 кА/м так. что ее плоскость параллельна направлению магнитного поля. Длина рамки катушки a = 2,2 см и ширина b = 1,9 см. Какой ток I течет по обмотке катушки, если катушка повернулась на угол φ = 0,5°? Модуль сдвига материала нити G = 5,9 ГПа.

Решение

На каждый виток катушки в магнитном поле действует вращающий момент $\vec{M}=[\vec{p},\vec{B}]$ — (1), где $\vec{p}$ — магнитный момент контура с током. $\vec{p}=IS\vec{n}$ — (2), где $\vec{n}$ — единичный вектор нормали к поверхности контура. Для катушки уравнение (1) в скалярном виде, с учетом (2), можно записать так: $M = NISB = N\mu_0 ISH$ — (3). Вращающий момент вызывает поворот нити на угол $\varphi=\frac{2lM}{\pi G r^4}$ или, с учетом (3), $\varphi=\frac{32lN\mu_0 ISH}{\pi G d^4}$, откуда $I=\frac{\pi\varphi G d^4}{32lN\mu_0 abH}=10^{-7}$ А.

11.63 Квадратная рамка подвешена на проволоке так, что направление магнитного поля составляет угол α = 90° с нормалью к плоскости рамки. Сторона рамки a = 1 см. Магнитная индукция поля B = 13,7 мТл. Если по рамке пропустить ток I = 1 А, то она поворачивается на угол φ = 1°. Найти модуль сдвига G материала проволоки. Длина проволоки l = 10 см, радиус нити r = 0,1 мм.

Решение

Имеем $I=\frac{\pi\varphi G r^4}{2la^2 B}$ (см. задачу 11.62), откуда $G=\frac{2Ila^2 B}{\varphi\pi r^4}=50$ ГПа.

11.64 Круговой контур помещен в однородное магнитное поле так, что плоскость контура перпендикулярна к направлению магнитного поля. Напряженность магнитного поля H = 150 кА/м. По контуру течет ток I = 2 А. Радиус контура R = 2 см. Какую работу А надо совершить, чтобы повернуть контур на угол α = 90° вокруг оси, совпадающей с диаметром контура?

Решение

Работа по перемещению проводника в магнитном поле равна $dA = Id\Phi$, откуда $A = I\int_{\Phi_1}^{\Phi_2} d\Phi = I(\Phi_2-\Phi_1)$, где $\Phi_2 = BS\cos\alpha_2 = 0$, т. к. $\alpha_2=\frac{\pi}{2}$; $\Phi_1 = BS\cos\alpha_1 = BS$, т. к. $\alpha_1 = 0$. Площадь контура $S=\pi R^2$. Окончательно $A = IB\times$ $\times\pi\cdot r^2 = I\mu_0 H\pi r^2$; $A = 0{,}5$ мДж.

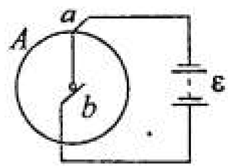
11.65 В однородном магнитном поле с индукцией B = 0,5 Тл движется равномерно проводник длиной l = 10 см. По проводнику течет ток I = 2 А. Скорость движения проводника v = 20 см/с и направлена перпендикулярно к направлению магнитного поля. Найти работу А перемещения проводника за время t = 10 с и мощность P, затраченную на это перемещение.

Решение

Работа по перемещению проводника с током в электрическом поле $dA = Id\Phi$. Магнитный поток, пересеченный проводником при его движении, $d\Phi = BS\cos\alpha$, где площадь S, покрытая проводником за время t: $s = lvt$. Тогда $A = IBlvt\cos 0° = 0{,}2$ Дж. Затраченная мощность $P = \frac{A}{t} = 20$ мВт.

11.66 Однородный медный диск A - радиусом R = 5 см помешен в магнитное поле с индукцией B = 0,2 Тл так, что плоскость диска перпендикулярна к направлению магнитного поля. Ток I = 5 А проходит по радиусу диска ab (a и b — скользящие контакты). Диск вращается с частотой n = 3 c^{-1}. Найти: а) мощность P такого двигателя; б) направление вращения диска при условии, что магнитное поле направлено от чертежа к нам; в) вращающии момент M, действующий на диск.

Решение



а) На радиус ab действует сила $F = BIR$. Работа при одном обороте диска $A = BIS$, где S — площадь, описываемая радиусом за один оборот, т. е. площадь диска. Мощность такого двигателя $P = A/t = nBI\pi R^2 = 23{,}6 \cdot 10^{-3}$ Вт. б) Диск вращается против часовой стрелки. в) На элемент радиуса dx действует сила $dF = BIdx$ и вращающий момент $dM = xdF = BIxdx$, где x — расстояние элемента dx от сил вращения. На весь диск действует вращающий момент

$$M = \int_0^R BIxdx = \frac{BIR^2}{2} = 12{,}5 \cdot 10^{-4} \text{ Н·м}.$$

11.67 Однородный медный диск A массой m = 0,35 кг помещен в магнитное поле с индукцией B = 24 мТл так, что плоскость диска перпендикулярна к направлению магнитного поля (см. рисунок к задаче 11.66). При замыкании цепи диск начинает вращаться и через время t = 30 с после начала вращения достигает частоты вращения $n = 5\ с^{-1}$. Найти ток I в цепи.

Решение

Сила, действующая на элемент радиуса dx, определяется формулой $dF = BIdx$. Вращающий момент, действующий на этот элемент, $dM = xdF = BIxdx$, где x — расстояние элемента dx от оси вращения. Вращающий момент, действующий на весь диск, $M = \int_0^R BIxdx = \frac{BIR^2}{2}$ — (1). Согласно основному закону динамики вращательного движения $M = J\varepsilon$, где $J = \frac{mR^2}{2}$ — момент инерции одного диска, $\varepsilon = \frac{\omega}{t} = \frac{2\pi n}{t}$ — угловое ускорение, тогда $M = \frac{\pi n m R^2}{t}$ — (2). Приравнивая правые части уравнений (1) и (2), получаем $\frac{BIR^2}{2} = \frac{\pi n m R^2}{t}$, откуда $I = \frac{2\pi n m}{Bt} = 15{,}3$ А.

11.68 Найти магнитный поток Φ, пересекаемый радиусом аb диска A (см. рисунок к задаче 11.66) за время t = 1 мин вращения. Радиус диска R = 10 см. Индукция магнитного поля B = 0,1 Тл. Диск вращается с частотой $n = 5{,}3\ с^{-1}$.

Решение

Угол, на который повернется диск за время t при равномерном вращении с частотой n, равен $\varphi = \omega t = 2\pi n t$. Из геометрии площадь кругового сектора $S = \frac{1}{2}R^2\varphi$, тогда площадь, пронизываемая магнитным потоком за время t, равна $S = R^2\pi n t$. Следовательно, магнитный поток через площадь S за время t равен $\Phi = BS = BR^2\pi n t = 1$ Вб.

11.69 Электрон, ускоренный разностью потенциалов U = 1 кВ, влетает в однородное магнитное поле, направление которого перпендикулярно к направлению его движения. Индукция магнитного поля B = 1,19 мТл. Найти радиус R окружности, по которой движется электрон, период обращения T и момент импульса M электрона.

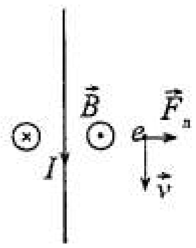
Решение

Со стороны магнитного поля на электрон действует сила Лоренца $\vec{F}_Л = -e[\vec{v}, \vec{B}]$. Направление силы Лоренца определяется по правилу векторного произведения векторов. В скалярном виде $F_Л = evB\sin\alpha = evB$, т. к. $\alpha = \frac{\pi}{2}$. Поскольку начальная скорость электрона перпендикулярна $\vec{B}$, то его траектория лежит в одной плоскости. Работа силы Лоренца равна нулю, поэтому $v = const$. Электрон движется с постоянным по модулю ускорением $a = \frac{F_o}{m} = \frac{eBv}{m}$ — (1), которое перпендикулярно скорости. Радиус кривизны траектории электрона можно найти из соотношения $a = \frac{v^2}{R}$ — (2). Приравняв (1) и (2), получим $\frac{eBv}{m} = \frac{v^2}{R}$, откуда $R = \frac{mv}{eB}$. Период обращения электрона по окружности не зависит от скорости: $T = \frac{2\pi R}{v} = \frac{2\pi m}{eB}$. Момент импульса электрона $\vec{M} = m[\vec{v}, \vec{R}]$ или, поскольку векторы $\vec{v}$ и $\vec{R}$ перпендикулярны, $M = mvR$. Скорость электрона найдем из соотношения $\frac{mv^2}{2} = eU$, откуда $v = \sqrt{\frac{2eU}{m}}$. Отсюда $M = R\sqrt{2eUm}$. Подставляя числовые данные, получим $R = 0.09$ м; $T = 30 \cdot 10^{-9}$ с; $M = 1{,}5 \cdot 10^{-24}$ кг·м^2/с.

11.70 Электрон, ускоренный разностью потенциалов U = 300 В, движется параллельно прямолинейному длинному проводу на расстоянии a = 4 мм от него. Какая сила F действует на электрон, если по проводнику пустить ток I = 5 А?

Решение

Со стороны магнитного поля, создаваемого проводником с током, на электрон действует сила Лоренца $\vec{F} = -e[\vec{v}, \vec{B}]$. Направление силы Лоренца определяется по правилу векторного произведения векторов. В скалярном виде $F = evB \sin\alpha$ — (1). Индукция магнитного



поля проводника с током равна $B = \dfrac{\mu\mu_0 I}{2\pi a}$ — (2). Кинетическая энергия электрона, прошедшего разность потенциалов U, равна $\dfrac{mv^2}{2} = eU$, откуда $v = \sqrt{\dfrac{2eU}{m}}$ — (3). Подставляя (2) и (3) в (1), получим $F = e\sqrt{\dfrac{2eU}{m}} \dfrac{\mu\mu_0 I}{2\pi a}$. Подставляя числовые данные, получим $F = 4{,}12 \cdot 10^{-16}$ Н.

11.71 Поток a - частиц (ядер атома гелия), ускоренных разностью потенциалов U = 1 МВ, влетает в однородное магнитное поле напряженностью H = 1,2 кА/м. Скорость каждой частицы направлена перпендикулярно к направлению магнитного поля. Найти силу F, действующую на каждую частицу.

Решение

Имеем $F = q\sqrt{\dfrac{2qU}{m}} \mu\mu_0 H$ (см. задачу 11.70). Здесь $q = 2e = 2 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл — заряд α-частицы, $m = 6{,}6 \times \times 10^{-27}$ кг — масса α-частицы. Подставляя числовые данные, получим $F = 4{,}7 \cdot 10^{-15}$ Н.

11.72 Электрон влетает в однородное магнитное поле, направление которого перпендикулярно к направлению егодвижения. Скорость электрона $v = 4 \cdot 10^7 м/с$. Индукция магнитного поля B = 1 мТл. Найти тангенциальное a_τ и нормальное a_n ускорения электрона в магнитном поле.

Решение

На электрон в магнитном поле действует сила Лоренца $\vec{F} = -e[\vec{B} \times \vec{v}]$, где $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл — элементарный заряд. В скалярном виде $F = eBv \sin\alpha$. Эта сила сообщает электрону ускорение $\vec{a}$. Тогда по второму закону Ньютона

$F = ma$. Тангенциальное ускорение $a_\tau = 0$, т. к. вектор $\vec{v}$ перпендикулярен вектору $\vec{B}$. Нормальное ускорение $a_n = \dfrac{F}{m} = \dfrac{eBv}{m} = 7 \cdot 10^{15}$ м/с^2.

11.73 Найти кинетическую энергию W (в электронвольтах) протона, движущегося по дуге окружности радиусом R = 60 см в магнитном поле с индукцией B = 1 Тл.

Решение

На протон, движущийся в магнитном поле, действует сила Лоренца $\vec{F} = q[\vec{v}, \vec{B}]$ — (1). Поскольку протон движется по окружности без поступательного движения, следовательно, вектор $\vec{F}$ перпендикулярен вектору $\vec{v}$, а следовательно, и вектору $\vec{B}$. Тогда уравнение (1) можно записать в скалярном виде: $F = qvB$ — (2). Чтобы протон удержался на круговой орбите, требуется выполнение равенства $F = ma_n = m\frac{v^2}{R}$ — (3). Приравнивая (2) и (3), получим $qvB = \frac{mv^2}{R}$, откуда скорость протона $v = \frac{qBR}{m}$ — (4). Кинетическая энергия протона равна $W = \frac{mv^2}{2}$ или, с учетом (4), $W = \frac{q^2B^2R^2}{2m}$. Подставляя числовые данные, получим $W = 0{,}28 \cdot 10^{-4}$ Дж или $W = \frac{0{,}28 \cdot 10^{-4}}{1{,}6 \cdot 10^{-19}} = 17{,}5 \cdot 10^6$ эВ.

11.74 Протон и электрон, двигаясь с одинаковой скоростью, влетают в однородное магнитное поле. Во сколько раз радиус Кривизны R_1, траектории протона больше радиуса кривизны R_2 траектории электрона?

Решение

Со стороны магнитного поля на электрон действует сила Лоренца $\vec{F_1} = -e[\vec{v} \times \vec{B}]$, на протон действует сила Лоренца $\vec{F_2} = e[\vec{v} \times \vec{B}]$. Эти силы равны по модулю и противоположны по направлению. В скалярном виде $F_1 = F_2 = eBv$. Работа силы Лоренца равна нулю, поэтому $v = const$ и тангенциальное ускорение $a_\tau = 0$. Частицы движутся с постоянным по модулю нормальным ускорением $a_n = \frac{F}{m} = \frac{eBv}{m}$ — (1), которое перпендикулярно скорости. Радиус кривизны траектории частиц можно найти из соотношения $a_n = \frac{v^2}{R}$ — (2). Приравняв (1) и (2), получим $\frac{eBv}{m} = \frac{v^2}{R}$, откуда $R = \frac{mv}{eB}$. Для протона $R_1 = \frac{m_p v}{eB}$. Для электрона $R_2 = \frac{m_e v}{eB}$. Отсюда $\frac{R_1}{R_2} = \frac{m_p}{m_e} = 1840$.

11.75 Протон и электрон, ускоренные одинаковой разностью потенциалов, влетают в однородное магнитное поле. Во сколько раз радиус кривизны R_1 траектории протона больше радиуса кривизны R_2 траектории электрона?

Решение

Имеем $R = \frac{mv}{eB}$ (см. задачу 11.74). За счет работы сил электрического поля частицы приобрели кинетическую энергию $\frac{mv^2}{2} = eU$. Откуда $v = \sqrt{\frac{2eU}{m}}$. Тогда $R = \frac{m\sqrt{2eU}}{eB\sqrt{m}} = \sqrt{\frac{eUm}{e}}\frac{1}{B}$. Т. е. для протона $R_1 = \sqrt{\frac{2Um_p}{e}}\frac{1}{B}$. Отсюда $R_1 / R_2 = \sqrt{m_p / m_e} = 42{,}9$.

11.76 На фотографии, полученной в камере Вильсона, траектория электрона в однородном магнитном поле представляет робой дугу окружности радиусом R = 10 см. Индукция магнитного поля B = 10 мТл. Найти энергию электрона W (в электронвольтах).

Решение

Имеем $W = \frac{e^2B^2R^2}{2m}$ (см. задачу 11.73). Подставляя числовые данные, получим $W = 1{,}4 \cdot 10^{-14}$ Дж или $W = \frac{1{,}4 \cdot 10^{-14}}{1{,}6 \cdot 10^{-19}} = 88 \cdot 10^3$ эВ.

11.77 Заряженная частица движется в магнитном поле по окружности со скоростью v = 10^6 м/с. Индукция магнитного поля B = 0,3 Тл. Радиус окружности R = 4 см. Найти заряд q частицы, если известно, что ее энергия W = 12 кэВ.

Решение

В магнитном поле на частицу действует сила Лоренца $\vec{F} = q[\vec{v}, \vec{B}]$ — (1). Поскольку частица движется по окружности, следовательно, векторы $\vec{F}$, $\vec{v}$ и $\vec{B}$ взаимно перпендикулярны. Тогда уравнение (1) можно записать в скалярном виде: $F = qvB$. Сила Лоренца сообщает частице постоянное ускорение $a_n = \frac{v^2}{R}$. Следовательно, $qvB = \frac{mv^2}{2}$ — (2). Энергия частицы $W = \frac{mv^2}{2}$, откуда $mv^2 = 2W$ — (3). Подставляя (3) в (2) и выражая из полученного уравнения заряд частицы q, получим $q = \frac{2W}{vBR} = 3{,}2 \cdot 10^{-19}$ Кл.

11.78 Протон и α - частица влетают в однородное магнитное поле, направление которого перпендикулярно к направлению их движения. Во сколько раз период обращения T_1 протона в магнитном поле больше периода обращения T_2 α - частицы?

Решение

Период обращения протона равен $T_1 = \dfrac{2\pi R_1}{v_1}$, где v_1 — скорость его движения и $R_1 = \dfrac{m_p v_1}{eB}$ (см. задачу 11.74). Отсюда $T_1 = \dfrac{2\pi m_p}{eB}$, т. е. период не зависит от скорости. Поскольку заряд α -частицы равен $2e$, то период ее обращения равен $T_2 = \dfrac{\pi m_\alpha}{eB}$. Отсюда отношение $\dfrac{T_1}{T_2} = \dfrac{2m_p}{m_\alpha} = 0{,}5$.

11.79 α - частица, кинетическая энергия которой W = 500 эВ, влетает в однородное магнитное поле, перпендикулярное ее движению. Индукция магнитного поля B = 0,1 Тл. Найти силу F, действующую на α - частицу, радиус R окружности, по которой движется α - частица, и период обращения T α - частицы.

Решение

В магнитном поле на α -частицу действует сила Лоренца $\vec{F} = q[\vec{v}, \vec{B}]$. Поскольку векторы $\vec{F}$, $\vec{v}$ и $\vec{B}$ взаимно перпендикулярны, то в скалярном виде $F = qvB\sin\alpha = qvB$ — (1). Кинетическая энергия частицы $W = \dfrac{mv^2}{2}$ — (2), откуда $v = \sqrt{\dfrac{2W}{m}}$ — (3). Подставляя (3) в (1), получим $F = qB\sqrt{\dfrac{2W}{m}} = 5 \cdot 10^{-15}$ Н. Сила Лоренца сообщает α -частице нормальное ускорение $a_n = \dfrac{v^2}{R}$, следовательно, $F = m\dfrac{v^2}{R}$. Из (2) имеем $mv^2 = 2W$, тогда $F = \dfrac{2W}{R}$, откуда радиус окружности $R = \dfrac{2W}{F} = 0{,}032$ м. Период обращения α -частицы равен $T = \dfrac{\pi m_\alpha}{eB}$ (см. задачу 11.78). Подставляя числовые данные, получим $T = 1{,}3 \cdot 10^{-6}$ с.

11.80 α - частица, момент импульса которой $M = 1{,}33\cdot10^{-22}$ кг·м²/с, влетает в однородное магнитное поле, перпендикулярное к направлению ее движения. Индукция магнитного поля $B = 25$ мТл. Найти кинетическую энергию W α - частицы.

Решение

Момент импульса α-частицы $\vec{M} = m[\vec{v}, \vec{R}]$ или $M = mvR\sin\alpha = mvR$ — (1) (поскольку $\alpha = 90°$). На частицу действует сила Лоренца $F = m\frac{v^2}{R}$ или $qvB = m\frac{v^2}{R}$ — (2). Из (1) имеем $R = \frac{M}{mv}$. Подставляя это выражение в (2), найдем $mv^2 = qB\frac{M}{m}$ — (3). Поскольку кинетическая энергия частицы равна $W = \frac{mv^2}{2}$, то, с учетом (3), получим $W = \frac{qBM}{2m} = 500$ эВ.

11.81 Однозарядные ионы изотопов калия с относительными атомными массами 39 и 41 ускоряются разностью потенциалов $U = 300$ В; затем они попадают в однородное магнитное поле, перпендикулярное направлению их движения. Индукция магнитного поля $B = 0{,}08$ Тл. Найти радиусы кривизны R_1 и радиус траекторий этих ионов.

Решение

Потенциальная энергия ускоренных ионов $W_п = qU$ и т по условию ионы однозарядные, то $q = |e| = 1{,}6\cdot10^{-19}$ Эта энергия переходит в кинетическую $W_к = \frac{mv^2}{2}$ и закону сохранения энергии $eU = \frac{mv^2}{2}$, откуда скоро движения ионов $v = \sqrt{\frac{2eU}{m}}$ — (1). В магнитном поле ионы действует сила Лоренца $F = evB\sin\alpha$, но т. к. условию поле перпендикулярно направлению движения $\sin\alpha = 1$, поэтому $F = evB$ — (2). С другой стороны, второму закону Ньютона $F = ma_n$, где $a_n = \frac{v^2}{R}$ — н мальное ускорение, тогда $F = \frac{mv^2}{R}$ — (3). Приравнива правые части уравнений (2) и (3): $evB = \frac{mv^2}{R}$, отк скорость движения ионов $v = \frac{eBR}{m}$ — (4). Приравни правые части уравнений (1) и (4), получаем $\sqrt{\frac{2eU}{m}} = \frac{eB}{m}$ откуда радиусы кривизны траекторий ионов $R = \frac{1}{B}\sqrt{\frac{2m}{e}}$ Подставляя числовые данные, получим $R_1 = 0{,}195$ м $R_2 = 0{,}2$ м.

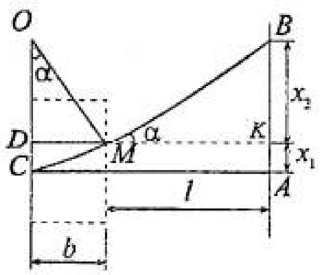
11.82 Найти отношение q/m для заряженной частицы, если она, влетая со скоростью $v = 10^6$ м/с в однородное магнитное поле напряженностью H = 200 кА/м, движется по дуге окружности радиусом R = 8,3 см. Направление скорости движения частицы перпендикулярно к направлению магнитного поля. Сравнить наиденное значение со значением q/m для электрона, протона и α-частицы.

Решение

Скорость движения заряженной частицы в магнитном поле под действием силы Лоренца (см. задачу 11.81) $v = \frac{qBR}{m}$ — (1). Магнитная индукция и напряженность магнитного поля связаны соотношением $B = \mu\mu_0 H$, но т. к. для воздуха магнитная проницаемость $\mu = 1$, поэтому $B = \mu_0 H$ — (2). Подставляя (2) в (1), находим $\frac{q}{m} = \frac{v}{\mu_0 HR} = 4{,}8 \times 10^7$ Кл/кг. Для электрона $\frac{q}{m} = 1{,}76 \cdot 10^{11}$ Кл/кг; для протона $\frac{q}{m} = 9{,}6 \cdot 10^7$ Кл/кг; для α-частицы $\frac{q}{m} = 4{,}8 \cdot 10^7$ Кл/кг.

11.83 Пучок электронов, ускоренных разностью потенциалов U = 300 В, влетает в однородное магнитное поле, направленное от чертежа к нам. Ширина поля b = 2,5 см. В отсутствие магнитного поля пучок электронов дает пятно в точке A флуоресцирующего экрана, расположенного на расстоянии l = 5 см от края полюсов магнита. При включении магнитного поля пятно смешается в точку В. Найти смешение $x = AB$ пучка электронов, если известно, что индукция магнитного поля B = 14,6 мкТл.

Решение

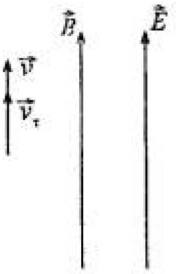


Общее смещение электрона $x = x_1 + x_2$, где x_1 — смещение электрона в магнитном поле. Электрон в магнитном поле движется по окружности радиусом $R = \frac{mv}{eB}$. Смещение x_1 можно найти из соотношения $x_1 = DC = OC - OD$. Но $OC = R$ и $OD = \sqrt{OM^2 - DM^2} = \sqrt{R^2 - b^2}$. Таким образом, $x_1 = R - \sqrt{R^2 - b^2}$. Смещение x_2 может быть найдено из пропорции $\frac{x_2}{l} = \frac{DM}{DO}$, откуда $x_2 = \frac{bl}{\sqrt{R^2 - b^2}}$. Тогда смещение $x = R - \sqrt{R^2 - b^2} + \frac{bl}{\sqrt{R^2 - b^2}}$. Имеем $R = \frac{mv}{eB} = \frac{1}{B}\sqrt{\frac{2Um}{e}}$. Подставляя числовые данные, получим $R = 4$ см и $x = 4{,}9$ см.

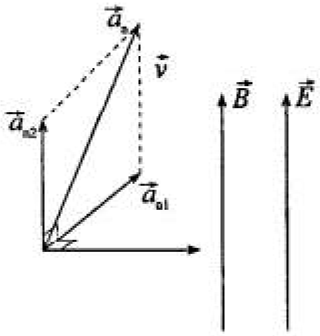
11.84 Магнитное поле напряженностью $H = 8$ кА/м и электрическое поле напряженностью $E = 1$ кВ/м направлены одинаково. Электрон влетает в электромагнитное поле со скоростью $v = 10^5$ м/с. Найти нормальное a_n, тангенциальное a_τ и полное a ускорения электрона. Задачу решить, если скорость электрона направлена: а) параллельно направлению электрического поля; б) перпендикулярно к направлению электрического поля.

Решение

а) Со стороны магнитного поля на электрон действует сила Лоренца $F = |e|vB\sin\alpha$. Поскольку $\vec{v}$ параллельна $\vec{H}$, то



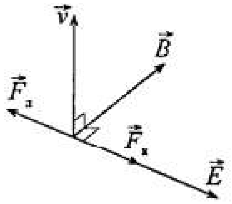
$\alpha = 0$, $F = 0$ и, следовательно, направление скорости не меняется, т. е. $a_n = 0$. Под действием сил электрического поля электрон получает тангенциальное ускорение, т. е. $F_{эл} = Ee = m|a_\tau|$, откуда $|a_\tau| = \frac{Ee}{m} = 1{,}76 \cdot 10^{14}$ м/с^2. Полное ускорение $a = |a_\tau| = 1{,}76 \cdot 10^{14}$ м/с^2.



б) Если $\vec{v}$ перпендикулярна $\vec{H}$, то $a_\tau = 0$ и электрон движется по окружности. На него со стороны магнитного поля действует сила Лоренца $F = |e|vB\sin 90° = |e|vB$, которая сообщает ему ускорение a_n. Следовательно, $evB = m - a_{n1}$, откуда $a_{n1} = \frac{evB}{m}$. Электрическое поле действует перпендикулярно движению электрона, т. е. тангенциально не ускоряет его, поэтому $a_\tau = 0$, а нормальное ускорение $a_{n2} = \frac{Ee}{m}$. Векторы $\vec{a}_{n1}$ и $\vec{a}_{n2}$ направлены перпендикулярно друг другу, поэтому результирующее нормальное ускорение $a_n = \sqrt{\left(\frac{eE}{m}\right)^2 + \left(\frac{evB}{m}\right)^2} = \frac{e}{m}\sqrt{E^2 + v^2B^2}$ или $a_n - \frac{e}{m} \times$ $\times \sqrt{E^2 + v^2\mu_0^2H^2} = 2{,}5 \cdot 10^{14}$ м/с^2.

11.85 Магннтное иоле, индукция которого B = 0.5 мТл, направлено перпендикулярно к электрическому полю, напряженность которого E = 1 кВ/м. Пучок электронов влетает вэлектромагнитное поле, причем скорость v электронов перпендикулярна к плоскости, в которой лежат векторы E и B. Найти скорость электронов v, если при одновременном действии обеих полей пучок электронов не испытывает отклонения. Каким будет радиус R траектории движения электронов при условии включения одного магнитного поля?

Решение

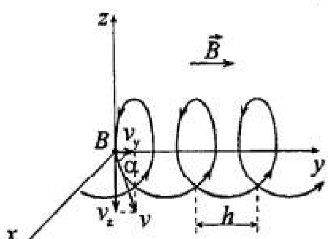


Поскольку векторы $\vec{v}$, $\vec{B}$ и $\vec{E}$ взаимно перпендикулярны, то пучок электронов не будет испытывать отклонения, если силы, действующие на него со стороны магнитного и электрического полей, будут равны по модулю, т. е. сила Лоренца будет уравновешиваться силой Кулона. Имеем $F_Л = F_К$, где $F_Л = evB$, $F_К = eE$. Тогда $Ee = evB$, откуда $v = \frac{E}{B} = 2 \cdot 10^6$ м/с. При включении одного магнитного поля сила Лоренца сообщает электронам центростремительное ускорение $a_n = \frac{v^2}{R}$, т. е. $evB = \frac{mv^2}{R}$, откуда $R = \frac{mv}{eB} = 2{,}25$ см.

11.86 Электрон, ускоренный разностью потенциалов U = 6 кВ, влетает в однородное магнитное поле под углом α = 30° к направлению поля и движется по винтовой траектории. Индукция магнитного поля B = 13 мТл. Найти радиус R и шаг h винтовой траектории.

Решение

Разложим скорость электрона, влетающего в магнитное поле, по двум направлениям: вдоль линий поля — v_y и



параллельно им — v_z. Составим два уравнения. Сила Лоренца создает центростремительное ускорение, т. е. $Bev_z = \frac{mv_z^2}{R}$, откуда $Be = \frac{mv_z}{R}$ — (1). Поскольку $\frac{mv^2}{2} = eU$, а из рисунка $v = \frac{v_z}{\sin\alpha}$, то $eU = \frac{1}{2}\frac{mv_z^2}{\sin^2\alpha}$. Разделим обе части уравнения (2) на квадраты обеих частей уравнения (1). Получим $\frac{eU}{B^2e^2} = \frac{mv_z^2R^2}{2\sin^2\alpha m^2v_z^2}$; $\frac{U}{B^2e} = \frac{R^2}{2m\sin^2\alpha}$, откуда $R = \frac{\sin\alpha}{B} \times \sqrt{\frac{2mU}{e}} = 1$ см. Шаг спирали найдем из соотношений $2\pi R = v_z t$ и $h = v_y t$, откуда $h = 2\pi R\frac{v_y}{v_z}$. Т. к. $\frac{v_y}{v_z} = ctg\alpha = 1{,}73$, то $h = 11$ см.

11.87 Протон влетает в однородное магнитное поле под углом $\alpha = 30°$ к направлению поля и движется по винтовой линии радиусом $R = 1{,}5$ см. Индукция магнитного поля $B = 0{,}1$ Тл. Найти кинетическую энергию W протона.

Решение

Разложим скорость протона $\vec{v}$ на две составляющие: $\vec{v}_\tau$, направленную вдоль поля, и $\vec{v}_n$, направленную перпендикулярно к полю. Проекция траектории электрона на плоскость, перпендикулярную к индукции $\vec{B}$, представляет собой окружность, радиус которой определяется формулой $R = \frac{mv_n}{eB} = \frac{m(v\sin\alpha)}{eB}$ (см. задачу 11.69). Отсюда $v = \frac{eBR}{m\sin\alpha}$. Кинетическая энергия протона $W = \frac{mv^2}{2}$. Подставляя выражение для v, получим $W = \frac{e^2B^2R^2}{2m\sin^2\alpha}$. Подставляя числовые данные, получим $W = 6{,}9\cdot10^{-17}$ Дж или $W = 431$ эВ.

11.88 Электрон влетает в плоский горизонтальный конденсатор параллельно его пластинам со скоростью $v = 10^7 м/с$. Длина конденсатора $l = 5$ см. Напряженность электрического поля конденсатора $E = 10$ кВ/м. При вылете из конденсатора электрон попадает в магнитное поле, перпендикулярное к электрическому полю. Индукция магнитного поля $B = 10$ мТл. Найти радиус R и шаг h винтовой траектории электрона в магнитном поле.

Решение

При вылете из конденсатора электрон имеет скорость $v' = \sqrt{v^2 + \left(\frac{eEl}{mv}\right)^2}$ — (1), направление которой определяется углом α, причем $\cos\alpha = \frac{v}{v'}$ — (2) (см. задачу 9.72). Из (1) найдем $v' = 1{,}3\cdot10^7$ м/с. Из (2) найдем $\cos\alpha = 0{,}77$, $\sin\alpha = 0{,}64$, $\alpha \approx 40°$. Разложим скорость $\vec{v}'$ на две составляющие: $\vec{v}'_\tau$, направленную вдоль поля, и $\vec{v}'_n$, направленную перпендикулярно к полю. Проекция траектории электрона на плоскость, перпендикулярную к индукции $\vec{B}$, представляет собой окружность, радиус которой равен искомому радиусу винтовой траектории и определяется формулой $R=\frac{mv'_n}{eB}=\frac{m(v'\sin\alpha)}{eB}$ (см. задачу 11.69). Т. к. период обращения электрона $T=\frac{2\pi R}{v'\sin\alpha}=\frac{2\pi m}{eB}$, то шаг винтовой траектории электрона $h=v'_\tau T=\frac{2\pi m(v'\cos\alpha)}{eB}$. Подставляя числовые данные, получим $R=4{,}7\cdot10^{-3}$ м и $h=36\cdot10^{-3}$ м.

11.89 Электрон, ускоренный разностью потенциалов U = 3 кВ, влетает в магнитное поле соленоида под углом α = 30° к его оси. Число ампер-витков соленоида IN = 5000 А·в. Длина соленоида l = 25 см. Найти шаг h винтовой траектории электрона в магнитном поле.

Решение

Имеем $h=\frac{2\pi mv\cos\alpha}{eB}$ — (1), где $v=\sqrt{\frac{2eU}{m}}$ — (2) (см. задачу 11.88). Магнитная индукция соленоида $B=\mu\mu_0\frac{IN}{l}$ — (3). Подставляя (2) в (1), получим $h=\frac{2\pi\sqrt{2eUm}l\cos\alpha}{e\mu\mu_0 IN}$. Подставляя числовые данные, получим $h=0{,}04$ м.

11.90 Через сечение $S = ab$ медной пластинки толщиной a = 0,5 мм и высотой b = 10 мм пропускается ток I = 20 А. При Помещении пластинки в магнитное поле, перпендикулярное к ребру b и направлению тока, возникает поперечная разность потенциалов U = 3,1 мкВ. Индукция магнитного поля B = 1 Тл. Найти концентрацию n электронов проводимости в меди и их скорость v при этих условиях.

Решение

При протекании тока I вдоль проводящей пластины, помещенной перпендикулярно магнитному полю, возникает поперечная разность потенциалов $U=\frac{IB}{nea}$, где a — толщина пластины, B — индукция магнитного поля. Отсюда концентрация электронов проводимости $n=\frac{IB}{Uea}=$ $=8{,}1\cdot10^{28}$ м$^{-3}$. По определению плотности тока $j=vne$ — (1), с другой стороны, $j=\frac{I}{S}$, где I — сила тока, $S=ab$ — площадь сечения медной пластинки, тогда $j=\frac{I}{ab}$ — (2). Приравнивая правые части уравнений (1) и (2), получаем $vne=\frac{I}{ab}$, откуда скорость $v=\frac{I}{abne}=0{,}31$ мм/с.

11.91 Через сечение $S = ab$ алюминиевой пластинки (a — толщина и b — высота) пропускается ток $I = 5$ А. Пластинка помещена в магнитное поле, перпендикулярное к ребру b и направлению тока. Найти возникающую при этом поперечную разность потенциалов U . Индукция магнитного поля $B = 0{,}5$ Тл. Толщина пластинки $a = 0{,}1$ мм. Концентрацию электронов проводимости считать равной концентрации атомов.

Решение

Поперечная разность потенциалов $U = \dfrac{IB}{nea}$ — (1). По условию задачи концентрация электронов проводимости равна концентрации атомов, поэтому $n = \dfrac{\rho N_A}{\mu}$ — (2), где ρ — плотность алюминия, μ — молярная масса, N_A — число Авогадро. Подставляя (2) в (1), окончательно получаем $U = \dfrac{IB\mu}{\rho N_A ea} = 2{,}72$ мкВ.

11.92 Пластинка полупроводника толщиной $a = 0{,}2$ мм помещена в магнитное поле, перпендикулярное к пластинке. Удельное сопротивление полупроводника $\rho = 10$ мкОм·м. Индукция магнитного поля $B = 1$ Тл. Перпендикулярно к направлению доля вдоль пластинки пропускается ток $I = 0{,}1$ А. При этом возникает поперечная разность потенциалов $U = 3{,}25$ мВ. Найти подвижность и носителей тока в полупроводнике.

Решение

Поперечная разность потенциалов $U = \dfrac{IB}{nea}$ — (1). Удельная проводимость материала $\sigma = \dfrac{1}{\rho} = neu$, где ρ — удельное сопротивление материала, u — подвижность носителей тока. Тогда концентрация носителей тока $n = \dfrac{1}{\rho eu}$ — (2). Подставляя (2) в (1), получаем $U = \dfrac{IB\rho u}{a}$, откуда подвижность носителей тока в проводнике $u = \dfrac{Ua}{IB\rho} = 0{,}65$ м^2/(В·с).

11.93 В однородном магнитном поле с индукцией B = 0,1 Тл Движется проводник длиной l = 10 см. Скорость движения проводника v = 15 м/с и направлена перпендикулярно к магнитному полю. Найти индуцированную в проводнике э.д.с. ε.

Решение

Э.д.с. индукции определяется по закону Фарадея: $\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt}$. В этом уравнении знак «минус» соответствует правилу Ленца. Поскольку $d\Phi = BdS = Bldx$, то $\varepsilon = Bl\frac{dx}{dt} = Blv = 0{,}15$ В.

11.94 Катушка диаметром D = 10 см, состоящая из N = 500 витков проволоки, находится в магнитном поле. Найти среднюю э.д.с. индукции ε_{cp}, возникающую в этой катушке, если индукция магнитного поля увеличивается в течение времени t = 0,1 с от 0 до 2 Тл.

Решение

Согласно закону Фарадея $\varepsilon_{ср} = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}$, где изменение потока магнитной индукции через катушку $\Delta\Phi = NS\Delta B$. Следовательно, $\varepsilon_{ср} = NS\frac{\Delta B}{\Delta t}$, где $\Delta B = B_2 - B_1$. По условию $B_1 = 0$, $B_2 = 2$ Тл. Подставляя числовые данные, получим $\varepsilon_{ср} = 78{,}5$ В.

11.95 Скорость самолета с реактивным двигателем v = 950 км/ч. Найти э.д.с. индукции ε, возникающую на концах крыльев такого самолета, если вертикальная составляющая напряженности земного магнитного поля $H_в$ = 39,8 А/м и размах крыльев самолета l = 12,5 м.

Решение

Согласно закону Фарадея $\varepsilon = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}$ — (1), где изменение магнитного потока $\Delta\Phi = B\Delta S\sin\alpha$ или, поскольку $\alpha = 90°$, $\Delta\Phi = B\Delta S$ — (2). Т. к. магнитная индукция $B = \mu\mu_0 H$, а площадь, перекрываемая крыльями самолета за время Δt, равна $\Delta S = vl\Delta t$, то из (2) получим $\Delta\Phi = \mu\mu_0 Hvl\Delta t$. Тогда из (1) $\varepsilon = \frac{\mu\mu_0 Hvl\Delta t}{\Delta t} = \mu\mu_0 Hvl$. Подставляя числовые данные, получим $\varepsilon = 0{,}165$ В.

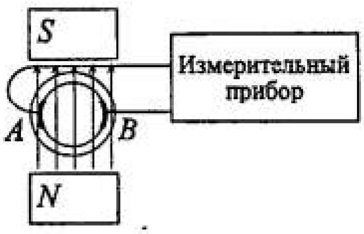
11.96 В магнитном поле, индукция которого B = 0,05 Тл, вращается стержень длиной l = 1 м с угловой скоростью ω = 20 рад/с. Ось вращения проходит через конец стержня и параллельна магнитному полю. Найти э.д.с. индукции ε, возникающую на концах стержня.

Решение

Согласно закону Фарадея $\varepsilon = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}$ — (1), где изменение магнитного потока $\Delta\Phi = B\Delta S \sin\alpha$ или, поскольку $\alpha = 90°$, $\Delta\Phi = B\Delta S$. За один оборот стержень пересекает площадь $\Delta S = \pi l^2$ за время $\Delta t = t$. Тогда магнитный поток, пересекаемый стержнем за один оборот, $\Phi = B\pi l^2$, а возникающая на концах стержня э.д.с. $\varepsilon = \frac{B\pi \cdot l^2}{t} = B\pi l^2 n = \frac{Bl^2\omega}{2}$. Подставляя числовые данные, получим $\varepsilon = 0{,}5$ В.

11.97 Схема, поясняющая принцип действия электромагнитного расходомера жидкости, изображена на рисунке. Трубопровод с протекающей в нем проводящей жидкостью помещен в магнитное поле. На электродах A и B возникает э.д.с. индукции. Найти скорость v течения жидкости в трубопроводе, если индукция магнитного поля B = 0,01 Тл, расстояние между электродами (внутренний диаметр трубопровода) a = 50 мм и возникающая при этом э.д.с. ε = 0,25 мВ.

Решение



По закону Фарадея э.д.с. электромагнитной индукции $\varepsilon_i = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}$. Считая начальный магнитный поток $\Phi_1 = 0$, получаем $\Delta\Phi = \Phi_2 = BS$, где $S = ld$ — площадь, пронизываемая магнитным потоком, $l = v\Delta t$ — расстояние, которое проходит струя за время Δt. Тогда э.д.с. индукции $\varepsilon_i = Blv$, откуда скорость течения жидкости в трубопроводе $v = \frac{\varepsilon_i}{Bl} = 0{,}5$ м/с.

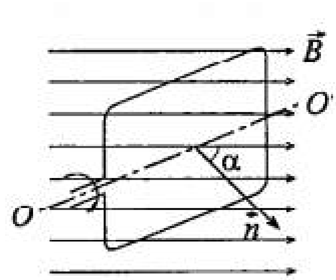
11.98 Круговой проволочный виток площадью S = 0,01 м^2 находится в однородном магнитном поле, индукция которого B = 1 Тл. Плоскость витка перпендикулярна к направлению магнитного поля. Найти среднюю э.д.с. индукции $\varepsilon_{ср}$, возникающую в витке при включении поля в течение времени t = 10 мс.

Решение

Имеем $\varepsilon_{ср} = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = -\frac{S\Delta B}{\Delta t}$. Поскольку индукция B уменьшается от 1Тл до 0, $\Delta B = (0-1) = -1$ Тл. Подставляя числовые данные, получим $\varepsilon_{ср} = 1$В.

11.99 В однородном магнитном поле, индукция которого B = 0,1 Тл, равномерно вращается катушка, состоящая из N = 100 витков проволоки. Частота вращения катушки n = 5 с$^{-1}$; площадь поперечного сечения катушки S = 0,01 м^2. Ось вращения перпендикулярна к оси катушки и направлению магнитного поля. Найти максимальную э.д.с. индукции ε_{max} во вращающейся катушке.

Решение



Рассмотрим один виток рамки. При равномерном вращении вокруг оси OO' с угловой скоростью ω магнитный поток через его площадь будет меняться по закону $\Phi = BS\cos\alpha$ — (1), где S — площадь рамки; α — угол между нормалью к плоскости и вектором $\vec{B}$. Считая, что при $t = 0$ $\alpha = 0$, имеем $\alpha = \omega \cdot t$. Индуцируемая в витке э.д.с. индукции $\varepsilon_i = \lim\limits_{\Delta t \to 0}\left(-\dfrac{\Delta\Phi}{\Delta t}\right) = -\dfrac{d\Phi}{dt}$ — (2). Поскольку $\Phi(t) = BS\cos\alpha = BS\cos\omega \cdot t$ (согласно (1)), то, дифференцируя эту функцию и помня, что $\dfrac{d(\cos\omega \cdot t)}{dt} = -\omega\sin t$, получим $\varepsilon_i = BS\omega\sin\omega \cdot t$ — (3). Индуцируемая в N витках э.д.с. будет в N раз больше: $\varepsilon = N\varepsilon_i = NBS\omega\sin\omega \cdot t = \varepsilon_m \sin\omega \cdot t$, где ε_m — максимальное значение (амплитуда) э.д.с. индукции: $\varepsilon_m = NBS\omega$ — (4). Следовательно, при равномерном вращении рамки в однородном магнитном поле в ней возникает переменная синусоидальная э.д.с. самоиндукции. Подставляя в (4) значение угловой скорости $\omega = 2\pi n$, где n — частота вращения рамки, получим $\varepsilon_m = 2\pi nNBS \approx 3{,}14$ В.

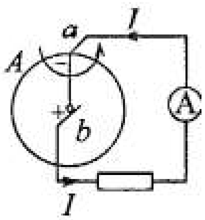
11.100 В однородном магнитном поле, индукция которого B = 0,8 Тл, равномерно вращается рамка с угловой скоростью ω = 15 рад/с. Площадь рамки S = 150 см^2. Ось вращения находятся в плоскости рамки и составляет угол α = 30° с направлением магнитного поля. Найти максимальную э.д.с. индукции ε_{max} во вращающейся рамке.

Решение

Мгновенное значение э.д.с. индукции ε определяется уравнением $\varepsilon = -\dfrac{d\Phi}{dt}$ — (1). При вращении рамки магнитный поток Φ, пронизывающий рамку, изменяется по закону $\Phi = BS\sin\alpha\cos\omega \cdot t$ — (2). Подставив (2) в (1) и продифференцировав по времени, найдем мгновенное значение э.д.с. индукции $\varepsilon = BS\omega\sin\alpha\sin\omega \cdot t$. Максимального значения э.д.с. достигнет при $\sin\omega \cdot t = 1$. Отсюда $\varepsilon_{max} = BS\omega\sin\alpha$; $\varepsilon_{max} = 0{,}09$ В.

11.101 Однородный медный диск A радиусом R = 5 см помещен в магнитное поле с индукцией B = 0,2 Тл так, что плоскость диска перпендикулярна к направлению магнитного поля. По цепи aba может идти ток (а и b — скользящие контакты). Диск вращается с частотой n = 3 с$^{-1}$. Найти э.д.с. ε такого генератора. Указать направление электрического тока, если магнитное поле направлено от нас к чертежу, а диск вращается против часовой стрелки.

Решение



По закону Фарадея э.д.с. электромагнитной индукции $\varepsilon_i = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}$. Считая начальный магнитный поток $\Phi_1 = 0$, получаем $\Delta\Phi = -\Phi_2 = -BS$, где $S = \pi R^2$ — площадь диска. В состоянии покоя $\varepsilon_i = 0$, а при вращении диска э.д.с. генератора $\varepsilon_i = \frac{B\pi R^2}{\Delta t}$, где $\Delta t = T$ — период обращения диска, т. е. время одного оборота. Поскольку частота вращения диска $n = \frac{1}{T}$, то окончательно э.д.с. генератора $\varepsilon_i = B\pi R^2 n = 4{,}71$ мВ. На свободные электроны, находящиеся в верхней части диска, со стороны магнитного поля действует сила Лоренца, направленная вверх. В результате этого воздействия в центре диска накапливается положительный заряд, а на верхнем крае — отрицательный. Поскольку за положительное принято направление тока от «плюса» к «минусу», то ток будет направлен так, как показано на рисунке.

11.102 Горизонтальный стержень длиной l = 1 м вращается вокруг вертикальной оси, проходящей через один из его концов. Ось вращения параллельна магнитному полю, индукция которого B = 50 мкТл. При какой частоте вращения n стержня разность потенциалов на концах этого стержня U = 1 мВ?

Решение

Согласно закону Фарадея $\varepsilon = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}$ — (1), где изменение магнитного потока $\Delta\Phi = B\Delta S$ — (2), где площадь, покрываемая сечением стержня за один оборот, равна $\Delta S = \pi l^2$ — (3). Подставив (3) в (2), а затем (2) в (1), получим $\varepsilon = \frac{B\pi l^2}{\Delta t}$. Здесь Δt — время одного оборота. Отсюда $n = \frac{1}{\Delta t} = \frac{\varepsilon}{B\pi l^2}$. Подставляя числовые данные, получим $n = 6{,}4$ с$^{-1}$.

11.103 На соленоид длиной l = 20 см и площадью поперечного сечения 5 = 30 см^2 надет проволочный виток. Обмотка соленоида имеет N = 320 витков, и по нему идет ток I = 3 А. Какая средняя э.д.с. ε_{cp} индуцируется в надетом на соленоид витке, когда ток в соленоиде выключается в течение времени t = 1 мс?

Решение

Имеем $\varepsilon_{\text{ср}} = -\dfrac{\Delta\Phi}{\Delta t} = -\dfrac{\Delta BS}{\Delta t}$. Поскольку $\Delta B = B_2 - B_1$, где $B_2 = 0$, а $B_1 = \dfrac{\mu\mu_0 NI}{l}$, а $\Delta t = t = 1$ мс, то $\varepsilon_{\text{ср}} = \dfrac{\mu\mu_0 NS^2}{lt} =$ $= 18$ мВ.

11.104 Какая средняя э.д.с. ε_{cp} индуцируется в витке, если соленоид, рассмотренный в предыдущей задаче, имеет железный сердечник?

Решение

Напряженность магнитного поля внутри соленоида не зависит от наличия сердечника и равна $H = \dfrac{NI}{l} = 4800$ А/м. По графику определим $B = 1{,}7$ Тл. Тогда $\mu = \dfrac{B}{\mu_0 H} = 265$. Подставляя в выражение для ε из предыдущей задачи значение μ, найдем $\varepsilon = 4{,}8$ В.

11.105 На соленоид длиной l = 144 см и диаметром D = 5 см надет проволочный виток. Обмотка соленоида имеет N = 2000 витков, и по ней течет ток I = 2 А. Соленоид имеет железный сердечник. Какая средняя э.д.с. ε_{op} индуцируется в надетом на соленоид витке, когда ток в соленоиде выключается в течение времени t = 2 мс?

Решение

Изменение магнитного потока в витке достигается изменением тока в соленоиде. При этом индуцируемая э.д.с. $\varepsilon = -L_{12}\dfrac{\Delta I}{\Delta t}$ — (1), где $L_{12} = \mu_0\mu n_1 n_2 Sl$ — взаимная индуктивность витка и соленоида. Для соленоида $n_1 = \dfrac{N}{l}$ —

число витков на единицу длины, $S = \frac{\pi D^2}{4}$ — площадь поперечного сечения, тогда $L_{12} = \mu_0 \mu N \frac{\pi D^2}{4}$ — (2), т. к. для витка $n_2 = 1$. Считая начальное время и конечный ток равными нулю, получаем $\Delta t = -t$ и $\Delta I = I$, тогда, с учетом (2), уравнение (1) можно переписать в виде $\varepsilon_{ср} = \mu_0 \mu N \frac{\pi D^2 I}{4t}$ — (3). Напряженность магнитного поля соленоида $H = In_1 = \frac{IN}{l} = 2{,}77 \cdot 10^3$ А/м, по графику находим значение магнитной индукции $B = 1{,}6$ Тл. Поскольку $B = \mu_0 \mu H$, то $\mu_0 \mu = \frac{B}{H} = 0{,}575$ мГн/м. Подставляя найденное значение в уравнение (3), получим $\varepsilon_{ср} = 1{,}61$ В.

11.106 В однородном магнитном поле, индукция которого $B = 0{,}1$ Тл, вращается катушка, состоящая из $N = 200$ витков. Ось вращения катушки перпендикулярна к ее оси и к направлению магнитного поля. Период обращения катушки $T = 0{,}2$ с; Площадь поперечного сечения $S = 4$ см^2. Найти максимальную э.д.с. индукции ε_{max} во вращающейся катушке.

Решение

Мгновенное значение э.д.с. индукции ε определяется уравнением $\varepsilon = -\frac{d\Psi}{dt}$ — (1). Потокосцепление $\Psi = N\Phi$, где N — число витков катушки, пронизываемых магнитным потоком Φ. Подставив выражение Ψ в (1), получим $\varepsilon = -N\frac{d\Phi}{dt}$ — (2). При вращении катушки магнитный поток Φ, пронизывающий катушку в момент времени t, изменяется по закону $\Phi = BS\cos\omega t$ — (3), где $\omega = \frac{2\pi}{T}$ — (4) — угловая скорость вращения катушки. Подставив (3) в (2) и продифференцировав по времени, найдем мгновенное значение э.д.с. индукции $\varepsilon = NB\omega \sin\omega t$. Максимального значения э.д.с. достигнет при $\sin\omega t = 1$. Отсюда, подставляя (4), получим $\varepsilon_{max} = NBS\frac{2\pi}{T} = 250$ мВ.

11.107 Катушка длиной l = 20 см имеет N = 400 витков. Площадь поперечного сечения катушки S = 9см^2. Найти индуктивность катушки, Какова будет индуктивность L_2 катушки, если внутрь катушки введен железный сердечник? Магнитная проницаемость материала сердечника μ = 400.

Решение

Индуктивность катушки определяется выражением $L = \mu\mu_0 \dfrac{N^2 S}{l}$. Учитывая, что магнитная проницаемость воздуха $\mu = 1$, получим $L_1 = 0{,}9 \cdot 10^{-3}$ Гн; $L_2 = 0{,}36$ Гн.

11.108 Обмотка соленоида состоит из N витков медной проволоки, поперечное сечение которой S = 1 мм^2. Длина соленоида l = 25 см; его сопротивление R = 0,2 Ом. Найти индуктивность L соленоида.

Решение

Имеем $L = \mu\mu_0 \dfrac{N^2 S'}{l}$ — (1), где $S' = \pi r^2$ — (2) — площадь поперечного сечения соленоида. Число витков N найдем из соотношения $N = \dfrac{l}{d}$. Диаметр проволоки d можно найти, зная, что площадь поперечного сечения проволоки $S = \pi \dfrac{d^2}{4}$, откуда $d = \sqrt{\dfrac{4S}{\pi}}$. Тогда $N = \dfrac{l}{2}\sqrt{\dfrac{\pi}{S}} = 222$. Сопротивление R проволоки определяется по формуле: $R = \rho \dfrac{l'}{S}$, откуда длина проволоки $l' = \dfrac{SR}{\rho} = 11{,}8$ м. Разделив длину всей проволоки на количество витков, мы получим длину окружности одного витка, т. е. $\dfrac{l'}{N} = 2\pi r$, откуда $r = \dfrac{l'}{2\pi N}$. Подставляя это выражение в (2), получим $S' = \dfrac{(l')^2}{4\pi N^2} = 2{,}2 \cdot 10^{-4}$ м^2. Подставляя числовые данные в (1), получим $L = 54{,}5 \cdot 10^{-6}$ Гн.

11.109 Катушка длиной l = 20 см и диаметром D = 3 см имеет N = 400 витков. По катушке идет ток I = 2 А. Найти индуктивность L катушки и магнитный поток Φ, пронизывающий площадь ее поперечного сечения.

Решение

Имеем $L = \mu\mu_0 \dfrac{N^2 S}{l}$, где площадь поперечного сечения катушки $S = \pi \dfrac{D^2}{4}$. Откуда $L = \mu\mu_0 \dfrac{\pi N^2 D^2}{4l} = 0{,}71 \cdot 10^{-3}$ Гн. Магнитный поток, пронизывающий всю катушку, равен $N\Phi = LI$, тогда магнитный поток, пронизывающий плоскость поперечного сечения, равен $\Phi = \dfrac{LI}{N} = 3{,}55 \cdot 10^{-6}$ Вб.

11.110 Сколько витков проволоки диаметром d = 0,6 см имеет однослойная обмотка катушки, индуктивность которой L = 1 мГн и диаметр D = 4 см? Витки плотно прилегают друг к другу.

Решение

Имеем $L = \mu\mu_0 \dfrac{\pi N^2 D^2}{4l}$ (см. задачу 11.109). Здесь длина катушки $l = dN$. Следовательно, $L = \mu\mu_0 \dfrac{\pi N D^2}{4d}$, откуда $N = \dfrac{4dL}{\mu\mu_0 \pi D^2} = 380$.

11.111 Катушка с железным сердечником имеет площадь поперечного сечения S = 20 см^2 и число витков N = 500. Индуктивность катушки с сердечником L = 0,28 Гн при токе через обмотку I = 5 А. Найти магнитную проницаемость μ железного сердечника.

Решение

Мгновенное значение потокосцепления для катушки определяется выражением $\Psi = LI$ — (1). Кроме того, $\Psi = N\Phi = NBS$ — (2) (см. задачу 11.106). Приравняв правые части уравнений (1) и (2), получим $NBS = LI$, откуда $B = \dfrac{LI}{NS}$; $B = 1{,}4$ Тл. Магнитная индукция и напряженность магнитного поля связаны соотношением $\vec{B} = \mu\mu_0 \vec{H}$. Отсюда $\mu = \dfrac{B}{\mu_0 H}$. По графику зависимости индукции $\vec{B}$ от напряженности $\vec{H}$ магнитного поля определим значение H, соответствующее $B = 1{,}4$ Тл: $H = 0{,}8 \cdot 10^3$ А/м. Тогда $\mu = 1400$.

11.112 Соленоид длиной l = 50 см и площадью поперечного сечения S = 2 см^2 имеет индуктивность L = 0,2 мкГн. При каком токе I объемная плотность энергии магнитного поля внутри соленоида W_0 = 1 мДж/м^3?

Решение

Объемная плотность энергии магнитного поля внутри соленоида определяется по формуле $W_0 = \dfrac{B^2}{2\mu\mu_0}$ — (1). Индукция магнитного поля внутри соленоида равна $B = \dfrac{\mu\mu_0 NI}{l}$ — (2). Число витков N можно найти из выражения для индуктивности соленоида: $L = \mu\mu_0 \dfrac{N^2 S}{l}$, откуда $N = \sqrt{\dfrac{lL}{\mu\mu_0 S}}$ — (3). Подставляя (3) в (2), получим $B = I\sqrt{\dfrac{\mu\mu_0 L}{lS}}$. Тогда из (1) $W_0 = \dfrac{I^2 L}{2lS}$, откуда $I = \sqrt{\dfrac{2lSW_0}{L}} = 1$ А.

11.113 Сколько витков имеет катушка, индуктивность которой $L = 1$ мГн, если при токе $I = 1$ А магнитный поток сквозь катушку $\Phi = 2$ мкВб?

Решение

Магнитный поток сквозь катушку равен $N\Phi = LI$, откуда $N = \frac{LI}{\Phi} = 500$.

11.114 Площадь поперечного сечения соленоида с железным сердечником $S = 10$ см^2; длина соленоида $l = 1$ м. Найти магнитную проницаемость μ материала сердечника, если магнитный поток, пронизывающий поперечное сечение соленоида, $\Phi = 1{,}4$ мВб. Какому току I, текущему через соленоид, соответствует этот магнитный поток, если известно, что индуктивность соленоида при этих условиях $L = 0{,}44$ Гн?

Решение

Магнитный поток, пронизывающий поперечное сечение соленоида, $\Phi = BS\cos\alpha$, но т. к. $\alpha = 0$, то $\cos\alpha = 1$ и $\Phi = BS$, откуда магнитная индукция $B = \frac{\Phi}{S} = 1{,}4$ Тл. По графику находим напряженность магнитного поля $H = 800$ А/м. Поскольку $B = \mu\mu_0 H$, то $\mu = \frac{B}{\mu_0 H} = 1392{,}6$ – магнитная проницаемость материала сердечника. Магнитный поток через поперечное сечение катушки связан с ее индуктивностью соотношением $N\Phi = LI$, где число витков N может быть получено из выражения дя индуктивности соленоида: $L = \mu\mu_0 \frac{N^2 S}{l}$, откуда $N = \sqrt{\frac{lL}{\mu\mu_0 S}} = 500$. Тогда данный магнитный поток соответствует току $I = \frac{N\Phi}{L} = 1{,}6$ А.

11.115 В соленоид длиной $l = 50$ см вставлен сердечник из такого сорта железа, для которого зависимость $B = F(H)$ неизвестна. Число витков на единицу длины соленоида $N_1 = 400$ см$^{-1}$; площадь поперечного сечения соленоида $S = 10$ см^2. Найти магнитную проницаемость μ материала сердечника при токе через обмотку соленоида $I = 5$ А, если известно, что магнитный поток, пронизывающий поперечное сечение соленоида с сердечником, $\Phi = 1{,}6$ мВб. Какова индуктивность L соленоида при этих условиях?

Решение

По закону Фарадея э.д.с. электромагнитной индукции $\varepsilon_i = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}$ — (1). Считая начальный магнитный поток $\Phi_0 = 0$, получаем $\Delta\Phi = \Phi_1$. Э.д.с. самоиндукции определяется формулой $\varepsilon_c = -L\dfrac{\Delta I}{\Delta t}$ — (2). Считая начальный ток $I_0 = 0$, получаем $\Delta I = I$, тогда уравнения (1) и (2) можно переписать в следующем виде: $\varepsilon_i = -\dfrac{\Phi_1}{\Delta t}$ — (3) и $\varepsilon_c = -\dfrac{LI}{\Delta t}$ — (4). Поскольку в нашем случае $\varepsilon_i = \varepsilon_c$, то, приравнивая правые части уравнений (3) и (4), получаем $\Phi_1 = LI$ — (5). С другой стороны, полный поток, пронизывающий весь соленоид, $\Phi_1 = \Phi nl$ — (6), где n — число витков на единицу длины соленоида, l — длина соленоида. Приравнивая правые части уравнений (5) и (6), получаем $LI = \Phi nl$, откуда индуктивность соленоида $L = \dfrac{\Phi nl}{I} = 64$ мГн. С другой стороны, $L = \mu\mu_0 n^2 lS$, где μ — магнитная проницаемость сердечника, S — площадь поперечного сечения соленоида. Отсюда магнитная проницаемость сердечника $\mu = \dfrac{L}{\mu_0 n^2 lS} = 636{,}6$.

11.116 Имеется соленоид с железным сердечником длиной $l = 50$ см, площадью поперечного сечения $S = 10$ см^2 и числом витков $N = 1000$. Найти индуктивность L этого соленоида, если по обмотке соленоида течет ток: а) $I = 0{,}1$ А; б) $I = 0{,}2$ А; в) $I = 2$ А.

Решение

Имеем $L = \mu\mu_0 \dfrac{N^2 S}{l}$ — (1). Для того чтобы определить индуктивность L соленоида, нужно найти магнитную проницаемость μ сердечника. Вычислив по формуле $H = \dfrac{IN}{l}$ напряженность магнитного поля внутри соленоида и воспользовавшись далее способом, описанным в задаче 11.39, найдем значения μ, соответствующие различным значениям тока I. Затем из (1) найдем значение L. Данные запишем в таблицу:

п.	H, А/м	B, Тл	μ	L, Гн
а	200	0,8	3182	8
б	400	1,2	2387	6
в	4000	1,7	338	0.85

11.117 Две катушки намотаны на один общий сердечник. Индуктивность первой катушки $L_1 = 0{,}2$ Гн, второй — $L_2 = 0.8$ Гн; сопротивление второй катушки $R_2 = 600$ Ом. Какой ток I_2 потечет во второй катушке, если ток $I_1 = 0{,}3$ А, текущий в первой катушке, выключить в течение времени $t = 1$ мс?

Решение

Взаимная индуктивность катушек $L_{12} = \mu\mu_0 n_1 n_2 Sl$ — (1). Индуктивность первой катушки $L_1 = \mu\mu_0 n_1^2 lS$ — (2), индуктивность второй катушки $L_2 = \mu\mu_0 n_2^2 lS$ — (3). Умножая (2) на (3), получим $L_1 L_2 = (\mu\mu_0 Sl)^2 n_1^2 n_2^2$, откуда $n_1 n_2 = \frac{\sqrt{L_1 L_2}}{\mu\mu_0 lS}$ — (4). Подставляя (4) в (1), найдем $L_{12} = \sqrt{L_1 L_2}$. При выключении тока I_1 во второй катушке возникнет э.д.с. равная $\varepsilon_2 = -L_{12}\frac{dI_1}{dt}$ — (5). Согласно закону Ома для замкнутой цепи $I_2 = \frac{\varepsilon_2}{R_2}$ или, с учетом (5), средний ток во второй катушке $I_2 = \frac{L_{12}}{R_2}\frac{\Delta I_1}{\Delta t} = \frac{\sqrt{L_1 L_2}}{R}\frac{I_1}{t} = 0{,}2$ А.

11.118 В магнитном поле, индукция которого $B = 0{,}1$ Тл, помещена квадратная рамка из медной проволоки. Площадь поперечного сечения проволоки $s = 1$ мм^2, площадь рамки $S = 25$ см^2. Нормаль к плоскости рамки параллельна магнитному полю. Какое количество электричества q пройдет по контуру рамки при исчезновении магнитного поля?

Решение

Количество электричества, прошедшего через поперечное сечение проводника при возникновении в нем индукционного тока, $dq = -\frac{1}{R}d\Phi$. Отсюда $q = -\frac{1}{R}\int_{\Phi_1}^{\Phi_2} d\Phi = -\frac{1}{R}(\Phi_2 - \Phi_1)$ — (1). По условию $\Phi_2 = 0$, а $\Phi_1 = BS$. Сопротивление рамки $R = \rho\frac{l}{s} = \rho\frac{4a}{s} = \rho\frac{4\sqrt{S}}{s}$, где a — сторона рамки. Тогда из (1) получим $q = \frac{Bs\sqrt{S}}{4\rho} = 74 \cdot 10^{-3}$ Кл.

11.119 В магнитном поле, индукция которого B = 0,05 Тл, помещена катушка, состоящая из N = 200 витков проволоки. Сопротивление катушки R = 40 Ом; площадь поперечного сечения S = 12 см^2. Катушка помешена так, что ее ось составляет угол α = 60° с направлением магнитного поля. Какое количество электричества q пройдет по катушке при исчезновении магнитного поля?

Решение

Количество электричества, прошедшего через поперечное сечение проводника при возникновении в нем индукционного тока, $dq = -\frac{1}{R}d\Phi$. Элементарный магнитный поток $d\Phi = NS\cos\alpha dB$, где N — число витков катушки, S — площадь поперечного сечения. Тогда количество электричества, которое пройдет по катушке при исчезновении магнитного поля, $q = -\frac{1}{R}\int_B^0 d\Phi = -\frac{NS\cos\alpha}{R}\int_B^0 dB =$

$= \frac{BN\cos\alpha}{R} = 0{,}15$ мКл.

11.120 Круговой контур радиусом r = 2 см помещен в однородное магнитное поле, индукция которого B = 0,2 Тл. Плоскость контура перпендикулярна к направлению магнитного поля. Сопротивление контура R = 10 м. Какое количество электричества q пройдет через катушку при повороте ее на угол α = 90°?

Решение

Количество электричества, прошедшего через поперечное сечение проводника при возникновении в нем индукционного тока, $dq = -\frac{1}{R}d\Phi$. Элементарный магнитный поток $d\Phi = BS\sin\alpha d\alpha$, т. к. α — угол между плоскостью контура и направлением вектора магнитной индукции. Тогда количество электричества, которое пройдет через катушку при повороте ее на угол $\alpha = 90°$, $q = -\frac{1}{R}\int_0^\alpha d\Phi =$

$= -\frac{BS}{R}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\alpha d\alpha = -\frac{BS}{R}\cos\alpha\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$; $\quad q = -\frac{BS}{R}\left(\cos\frac{\pi}{2} - \cos 0\right) =$

$= \frac{BS}{R}$. Т. к. $S = \pi r^2$, то окончательно $q = \frac{B\pi r^2}{R} = 0{,}25$ мКл.

11.121 На соленоид длиной l = 21 см и площадью поперечного сечения S = 10 см^2 надета катушка, состоящая из N_1 = 50 витков. Катушка соединена с баллистическим гальванометром, сопротивление которого R = 1 кОм. По обмотке соленоида, состоящей из N_2 = 200 витков, идет ток I = 5 А. Найти баллистическую постоянную С гальванометра, если известно, что при включении тока в соленоиде гальванометр дает отброс, равный 30 делениям шкалы. Сопротивлением катушки по сравнению с сопротивлением баллистического гальванометра пренебречь.

Решение

Взаимная индуктивность катушки и соленоида $L_{12}=\mu_0 n_1 n_2 Sl$, где $n_1=\dfrac{N_1}{l}$ и $n_2=\dfrac{N_2}{l}$ — число витков на единицу длины соответственно катушки и соленоида. При этом э.д.с., индуцируемая в катушке, $\varepsilon_i=-L_{12}\dfrac{dI}{dt}$ — (1) или по закону Фарадея $\varepsilon_i=-\dfrac{d\Phi}{dt}$ — (2). Приравнивая правые части уравнений (1) и (2), получаем $\dfrac{d\Phi}{dt}=L_{12}\dfrac{dI}{dt}$ или $d\Phi=L_{12}dI=\dfrac{\mu_0 N_1 N_2 S dI}{l}$. Количество электричества, прошедшего через гальванометр, $q=-\dfrac{1}{R}\int\limits_I^0 d\Phi=$

$$=-\frac{1}{R}\frac{\mu_0 N_1 N_2 S}{l}\int\limits_I^0 dI=-\frac{1}{R}\frac{\mu_0 N_1 N_2 S}{l}(-I)=\frac{\mu_0 N_1 N_2 SI}{Rl};$$

$q=\dfrac{\mu_0 N_1 N_2 SI}{Rl}$. Тогда баллистическая постоянная гальванометра $C=\dfrac{q}{k}=\dfrac{\mu_0 N_1 N_2 SI}{kRl}=10^{-8}$ Кл/дел, где k — число делений шкалы, на которое произошел отброс.

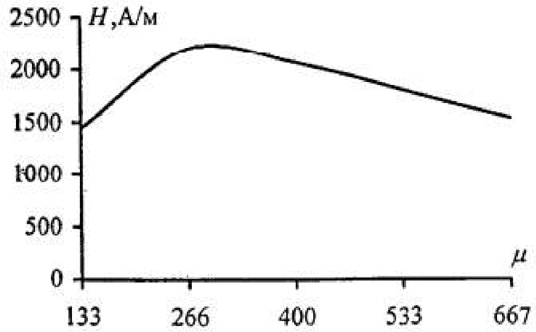
11.122 Для измерения индукции магнитного поля между полюсами электромагнита помещена катушка, состоящая из N = 50 витков проволоки и соединенная с баллистическим гальванометром. Ось катушки параллельна направлению магнитного поля. Площадь поперечного сечения катушки S = 2 см^2.Сопротивление гальванометра R = 2 кОм; его баллистическая постоянная $C = 2\cdot10^{-8}$ Кл/дел. При быстром выдергивании катушки из магнитного поля гальванометр дает отброс, равный 50 делениям шкалы. Найти индукцию B магнитного поля. Сопротивлением катушки по сравнению с сопротивлением баллистического гальванометра пренебречь.

Решение

Количество электричества, прошедшего через поперечное сечение проводника при возникновении в нем индукционного тока, $dq = -\frac{1}{R}d\Phi$. Элементарный магнитный поток $d\Phi = NSdB$, где N — число витков проволоки, S — площадь поперечного сечения катушки. Количество электричества, которое протечет через гальванометр при быстром выдергивании катушки из магнитного поля, $q = -\frac{1}{R}\int_B^0 NSdB = \frac{NBS}{R}$ — (1). С другой стороны, $q = Ck$ — (2), где C — баллистическая постоянная гальванометра, k — число делений отброса гальванометра. Приравнивая правые части уравнений (1) и (2), получаем $\frac{NBS}{R} = Ck$, откуда индукция магнитного поля электромагнита $B = \frac{RCk}{SN} = 0{,}2$ Тл.

11.123 Зависимость магнитной проницаемости μ от напряженности магнитного поля H была впервые исследована А. Г. Столетовым в его работе «Исследование функции намагничения мягкого железа». При исследовании Столетов придал испытуемому образцу железа форму тороида. Железо намагничивалось пропусканием тока I по первичной обмотке тороида. Изменение направления тока в этой первичной катушке вызывало в баллистическом гальванометре отброс на угол α. Гальванометр был включен в цепь вторичной обмотки тороида. Тороид, с которым работал Столетов, имел следующие параметры: площадь поперечного сечения $S = 1{,}45$ см^2, длина $l = 60$ см, число витков первичной катушки $N_1 = 800$, число витков вторичной катушки $N_2 = 100$. Баллистическая постоянная гальванометра $C = 1{,}2 \cdot 10^{-5}$ Кл/дел и сопротивление вторичной цепи $R = 12$ 0м. Результаты одного из опытов Столетова сведены в таблицу:По этим данным составить таблицу и построить график зависимости магнитной проницаемости μ от напряженности магнитного поля H для железа, с которым работал Столетов.

Решение



Напряженность магнитного поля в тороиде $H = \frac{IN_1}{l}$ — (1). Если изменить направление тока в первичной катушке на противоположное, то через гальванометр пройдет количество электричества $q = \frac{2\Phi N_2}{R}$, где Ф — магнитный поток, пронизывающий площадь поперечного сечения тороида. Но $\Phi = BS = \frac{\mu\mu_0 SIN_1}{l}$; следовательно, $q = \frac{2N_2\mu\mu_0 SIN_1}{Rl}$, откуда $\mu = \frac{qRl}{2\mu_0 N_1 N_2 SI}$. Т. к. $q = C\alpha$, то $\mu = \frac{C\alpha Rl}{2\mu_0 N_1 N_2 SI}$ — (2). Подставляя в (1) и (2) различные значения I и соответствующие значения α, данные в условии задачи, получим таблицу:

I, А	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
H, А/м	133	266	400	533	667
μ	1440	2190	2050	1790	1520

11.124 Для измерения магнитной проницаемости железа из него был изготовлен тороид длиной l = 50 см и площадью поперечного сечения S = 4 см^2. Одна из обмоток тороида имела N_1 = 500 витков и была присоединена к источнику тока, другая имела N_2 = 1000 витков и была присоединена к гальванометру. Переключая направление тока в первичной обмотке на обратное, мы вызываем во вторичной обмотке индукционный ток. Найти магнитную проницаемость железа μ, если известно, что при переключении в первичной обмотке направления тока I = 1 А через гальванометр прошло количество электричества q = 0,06 Кл. Сопротивление вторичной обмотки R = 20 Ом.

Решение

Магнитный поток через катушку изменяется за время t от $\Phi = NBS$ до нуля. В катушке индуцируется э.д.с. Значения э.д.с. в различные моменты времени различны. По закону электромагнитной индукции э.д.с. в некоторый момент времени определяется по формуле $\varepsilon_и = \frac{d\Phi}{dt}$. Изменение магнитного потока за время t можно определить как: $\Phi = \int_0^t \varepsilon\, dt = \varepsilon t$. Э.д.с. в свою очередь связана с силой тока: $\varepsilon = IR$, откуда изменение магнитного потока за время t равно $\Phi = R(I \cdot t)$. Выражение в скобках определяет полный заряд, протекший по цепи за время t, т. е. $\Phi = qR$ — (1), но $\Phi = N_2BS$ — (2), где $B = \frac{\mu\mu_0 IN_1}{l/2}$ — (3). Из (2) и (3) получим $\Phi = \frac{2N_1N_2\mu\mu_0 IS}{l}$ — (4). Приравнивая (1) и (4), найдем $\mu = \frac{qRl}{2N_1N_2\mu_0 IS} = 1200$.

11.125 Электрическая лампочка, сопротивление которой в горячем состоянии R = 10 Ом, подключается через дроссель к 12-вольтовому аккумулятору. Индуктивность дросселя L = 2 Гн, сопротивление r = 1 Ом. Через какое время t после включения лаампочка загорится, если она начинает заметно светиться при напряжении на ней U = 6 В?

Решение

Вследствие явления самоиндукции при включении э.д.с. сила тока в лампочке нарастает по закону $I = I_0\left(1 - exp\left(-\frac{R+r}{L}t\right)\right)$ — (1). По закону Ома для участка цепи начальный и конечный токи соответственно равны $I_0 = \frac{\varepsilon}{R+r}$ и $I = \frac{U}{R+r}$, тогда уравнение (1) можно переписать в виде $U = \varepsilon\left(1 - exp\left(-\frac{R+r}{L}t\right)\right)$ или $1 - \frac{U}{\varepsilon} = exp\left(-\frac{R+r}{L}t\right)$ — (2). Прологарифмируем уравнение (2), тогда $ln\left(1 - \frac{U}{\varepsilon}\right) = -\frac{R+r}{L}t$, откуда время, через которое загорится лампочка после включения, $t = -\frac{L}{R+r}ln\left(1 - \frac{U}{\varepsilon}\right) = 126$ мс.

11.126 Имеется катушка длиной $l = 20$ см и диаметром $D = 2$ см. Обмотка катушки состоит из $N = 200$ витков медной проволоки, площадь поперечного сечения которой $S = 1$ мм^2. Катушка включена в цепь с некоторой э.д.с. При помоши переключателя э.д.с. выключается, и катушка замыкается накоротко. Через какое время t после выключения э.д.с. ток в цепи уменьшится в 2 раза?

Решение

Магнитный поток, создаваемый током I в катушке, связан с ее индуктивностью соотношением: $\Phi = LI$. При изменении тока на величину ΔI магнитный поток изменяется на $\Delta\Phi = L\Delta I$. По условию задачи $\Delta I = I - \frac{I}{2} = \frac{I}{2}$, т. е. $\Delta\Phi = \frac{LI}{2}$. С другой стороны, $\Delta\Phi = RI\Delta t$ (см. задачу 11.124), тогда $\frac{LI}{2} = RI\Delta t$, откуда $\Delta t = \frac{L}{2R}$ — (1). Найдем индуктивность катушки и ее сопротивление. Имеем $L = \frac{\mu\mu_0 SN^2}{l}$, где площадь поперечного сечения катушки $S = \pi\frac{D^2}{4}$. Откуда $L = \frac{\mu\mu_0\pi D^2 N^2}{4l}$ — (2). Сопротивление катушки $R = \rho\frac{l'}{s}$, где длина проволоки $l' = \pi DN$. Отсюда $R = \rho\frac{\pi DN}{s}$ — (3). Подставляя (2) и (3) в (1), получим $\Delta t = \frac{\mu\mu_0 DNS}{8l\rho}$. Подставляя числовые данные, получим $\Delta t = 0{,}2\cdot10^{-3}$ с.

11.127 Катушка имеет индуктивность $L = 0{,}2$ Гн и сопротивление $R = 1{,}64$ Ом. Во сколько раз уменьшится ток в катушке через время $t = 0{,}05$ с после того, как э.д.с. выключена и катушка замкнута накоротко?

Решение

Магнитный поток, создаваемый током I в катушке, связан с ее индуктивностью соотношением: $\Phi = LI$. При изменении тока на величиму ΔI магнитный поток изменяется на $\Delta\Phi = L\Delta I$. По условию задачи $\Delta I = I - \frac{I}{n} = I\left(1 - \frac{1}{n}\right)$, т. е. $\Delta\Phi = LI\left(1 - \frac{1}{n}\right)$. С другой стороны, $\Delta\Phi = RI\Delta t$ (см. задачу 11.124), тогда $LI\left(1 - \frac{1}{n}\right) = RI\Delta t$ или, учитывая, что $\Delta t = t$, и преобразуя последнее выражение, $L - Rt = \frac{L}{n}$, откуда $n = \frac{L}{L - Rt} = 1{,}6$. Т. е. ток в катушке уменьшится в 1,6 раза.

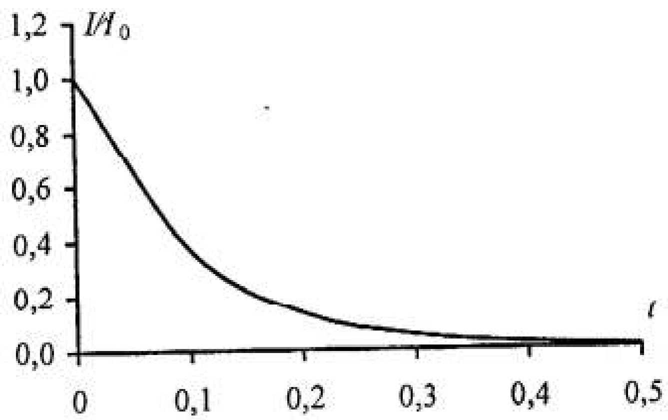
11.128 Катушка имеет индуктивность $L = 0{,}144$ Гн и сопротивление $R = 10$ Ом. Через какое время t после включения в катушке потечет ток, равный половине установившегося?

Решение

Имеем $t = \frac{L}{2R}$ (см. задачу 11.126). Подставляя числовые данные, получим $t = 7{,}2 \cdot 10^{-3}$ с.

11.129 Контур имеет сопротивление $R = 2$ Ом и индуктивность $L = 0{,}2$ Гн. Построить график зависимости тока I в контуре от времени t, прошедшего с момента включения в цепь э.д.с., для интервала $0 \le t \le 0{,}5$ с через каждую 0,1 с. По оси ординат откладывать отношение нарастающего тока I к конечному току I_0.

Решение



Изменение потока магнитной индукции $d\Phi$ связано с изменением тока dI в цепи соотношением $d\Phi = LdI$. С другой стороны, $d\Phi = RIdt$ (см. задачу 11.124). Отсюда $LdI = RIdt$ или $\frac{dI}{I} = \frac{R}{L}dt$. Интегрируя полученное выражение, получим $\int_I^{I_0} \frac{dI}{I} = \int_0^t \frac{R}{L}dt$; $ln\frac{I_0}{I} = \frac{R}{L}t$. Отсюда $\frac{I_0}{I} = exp\left(\frac{R}{L}t\right)$ или $\frac{I}{I_0} = exp\left(-\frac{R}{L}t\right)$. Подставляя числовые данные, получим $\frac{I}{I_0} = exp(-10t)$. Для заданного интервала t составим таблицу и построим график зависимости $\frac{I}{I_0}(t)$:

t, с	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
I/I_0	1,000	0,368	0,135	0,050	0,018	0,007

11.130 Квадратная рамка из медной проволоки сечением $s = 1$ мм^2 помещена в магнитное поле, индукция которого меняется по закону $B = B_0 \sin wt$, где $B_0 = 0{,}01$ Тл, $\omega = 2\pi/T$ и $T = 0{,}02$ с. Площадь рамки $S = 25$ см. Плоскость рамки перпендикулярна к направлению магнитного поля. Найти зависимость времени t и наибольшее значение: а) магнитного потока Φ, пронизывающего рамку; б) э.д.с. индукции ε, возникающей в в) тока I, текущего по рамке.

Решение

Найдем угловую скорость вращения рамки. Имеем $\omega = \frac{2\pi}{T}$, подставляя числовое значение периода T, получим $\omega = 100\pi$. Магнитный поток, пронизывающий рамку, равен $\Phi = BS = B_0 S \sin \omega t$. Подставляя числовые данные, получим $\Phi = 25 \cdot 10^{-6} \sin 100\pi t$. Максимальное значение магнитного потока равно амплитуде и равно $\Phi_{max} = 25 \cdot 10^{-6}$ Вб. Э.д.с. индукции, возникающей в рамке равна $\varepsilon = \frac{d\Phi}{dt}$. Дифференцируя магнитный поток Φ по времени t, получим $\varepsilon = 7{,}85 \cdot 10^{-3} \cos 100\pi t$. Максимального значения э.д.с. достигнет при $\cos 100\pi t = 1$, т. е. $\varepsilon_{max} = 7{,}85 \cdot 10^{-3}$ В. Силу тока, текущего в рамке, можно найти по закону Ома $I = \frac{\varepsilon}{R}$. Найдем сопротивление R рамки. Имеем $R = \rho \frac{l}{s}$, где длина проволоки $l = 2\pi r = 2\pi \sqrt{\frac{S}{\pi}} = 2\sqrt{\pi S}$. Отсюда $R = \rho \frac{2\sqrt{\pi S}}{s} = 3{,}1 \cdot 10^{-3}$ Ом. Тогда $I = 2{,}5 \cos 100\pi t$, а $I_{max} = 2{,}5$ А.

11.131 Через катушку, индуктивность которой $L = 21$ мГн течет ток, изменяющийся со временем по закону $I = I_0 \sin wt$, где $I_0 = 5$ А, $\omega = 2\pi/T$ и Т = 0,02 с. Найти зависимость от времени t: а) э.д.с. ε самоиндукции, возникающей в катушке; б) энергии W магнитного поля катушки.

Решение

а) Э.д.с. самоиндукции определяется формулой $\varepsilon_c = -L\frac{dI}{dt}$ – (1). По условию ток изменяется со временем по закону $I = I_0 \sin \omega t$ — (2). Подставляя (2) в (1), получаем $\varepsilon_c = -L\frac{d}{dt}(I_0 \sin \omega t) = -LI_0 \omega \cos \omega t$, где $\omega = \frac{2\pi}{T}$, тогда $\varepsilon_c = -33 \cos 100\pi t$.

б) Магнитная энергия контура с током $W = \frac{LI^2}{2}$ или, с учетом (2), $W = \frac{LI_0^2 \sin^2 \omega t}{2} = 0{,}263 \sin^2 100\pi t$.

11.132 Две катушки имеют взаимную индуктивность L_{12} = 5 мГн. В первой катушке ток изменяется по закону $I = I_0 \sin wt$, где I_0 = 10 А, $\omega = 2\pi/T$ и Т = 0,02 с. Найти зависимость от времени t э.д.с. ε_2, индуцируемой во второй катушке, и наибольшее значение ε_{2max} этой э.д.с.

Решение

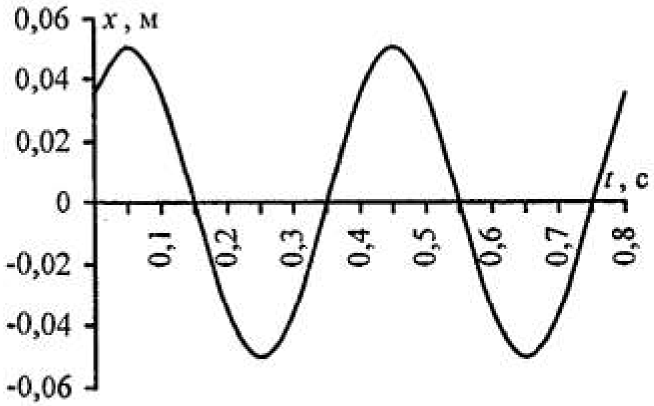
Зависимость э.д.с., индуцируемой во второй катушке, от времени (см. задачу 11.131): $\varepsilon_2 = -L_{12}\dfrac{dI}{dt} = -L_{12} I_0 \omega \cos \omega t = -15{,}7 \cos 100\pi t$. Э.д.с. индукции будет максимальной в том случае, когда $\cos \omega t = -1$, тогда $\varepsilon_{2\,max} = 15{,}7$ В.

Глава IV. Колебания и волны

§ 12. Гармоническое колебательное движение и волны

12.1 Написать уравнение гармонического колебательного движения с амплитудой A = 5 см, если за время t = 1 мин совершается 150 колебаний и начальная фаза колебаний $\varphi = \pi/4$. Начертить график этого движения.

Решение



Уравнение гармонического колебания имеет вид: $x = A\sin(\omega t + \varphi)$. Круговая частота $\omega = 2\pi n = 2\pi \dfrac{N}{t}$. По условию $N = 150$, отсюда $\omega = 5\pi$. Подставляя числовые данные, получим уравнение данного колебания $x = 0{,}05\sin\left(5\pi t + \dfrac{\pi}{4}\right)$.

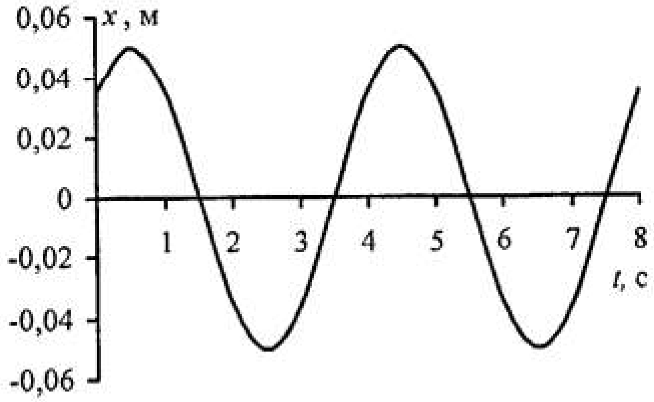
12.2 Написать уравнение гармонического колебательного движения с амплитудой A = 0,1 м, периодом T = 4 с и начальной фазой φ = 0.

Решение

Уравнение гармонического колебания имеет вид: $x = A\sin(\omega t + \varphi)$. Круговая частота $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$. Подставляя числовые данные, получим $x = 0{,}1\sin\dfrac{\pi}{2}t$.

12.3 Написать уравнение гармонического колебательного движения с амплитудой $A = 50$ мм, периодом $T = 4$ с и начальной фазой $\varphi = \pi/4$. Найти смещение x колеблющейся точки от положения равновесия при $t = 0$ и $t = 1{,}5$ с. Начертить график этого движения.

Решение



Уравнение гармонического колебательного движения имеет вид: $x = A\sin\left(\frac{2\pi}{T}t + \varphi\right)$. В данных условиях

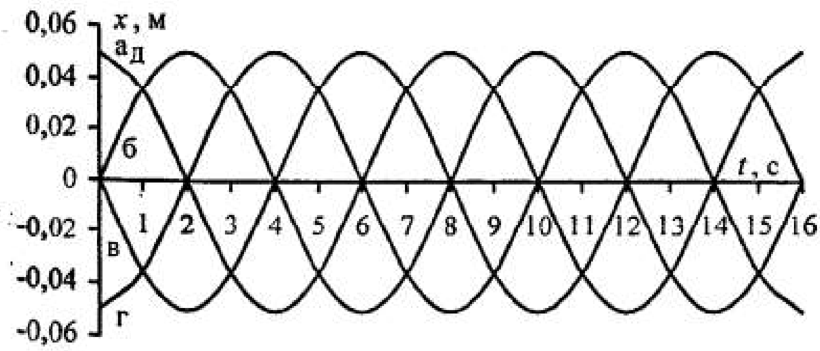
$x = 0{,}05\sin\left(\frac{\pi}{2}t + \frac{\pi}{2}\right)$. Отсюда $x_1 = 0{,}05\sin\frac{\pi}{4} = 0{,}035$;

$x_2 = 0{,}05\sin\left(\frac{\pi}{2}\cdot 1{,}5 + \frac{\pi}{4}\right) = 0$.

t, с	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4
x, м	0,035	0,050	0,035	0	–0,035	–0,050	–0,035	0,000	0,035

12.4 Написать уравнение гармонического колебательного движения с амплитудой $A = 5$ см и периодом $T = 8$ с, если начальная фаза φ колебаний равна: а) 0; б) $\pi/2$; в) π; г) $3\pi/2$ д) 2π. Начертить график этого движения во всех случаях.

Решение



Уравнение гармонического колебания имеет вид: $x = A\sin(\omega t + \varphi)$. Круговая частота $\omega = \frac{2\pi}{T}$. Подставим числовые данные. Уравнение гармонического колебательного движения будет иметь вид:

а) $x = 0{,}05\,sin\frac{\pi}{4}t$;

б) $x = 0{,}05\,sin\left(\frac{\pi}{4}t + \frac{\pi}{2}\right) = 0{,}05\,cos\frac{\pi}{4}t$;

в) $x = 0{,}05\,sin\left(\frac{\pi}{4}t + \pi\right) = -0{,}05\,sin\frac{\pi}{4}t$;

г) $x = 0{,}05\,sin\left(\frac{\pi}{4}t + \frac{3\pi}{2}\right) = -0{,}05\,cos\frac{\pi}{4}t$;

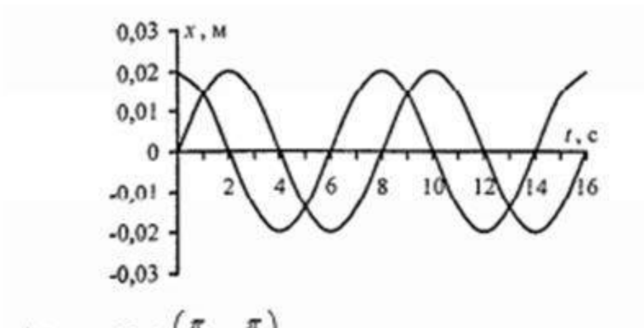
д) $x = 0{,}05\,sin\frac{\pi}{4}t$.

12.5 Начертить на одном графике два гармонических колебания с одинаковыми амплитудами $A_1 = A_2 =$ 2 см и одинаковыми периодами $T_1 = T_2 = 8$ с, но имеющие разность фаз $\varphi_2 - \varphi_1$, равную: а) $\pi/4$; б) $\pi/2$; в) π; г) 2π.

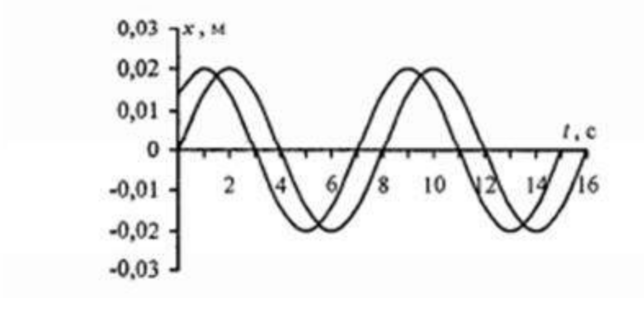
Решение

Уравнение гармонического колебания имеет вид $x = A\,sin(\omega t + \varphi)$. Круговая частота $\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{\pi}{4}$. Пусть на чальная фаза первого колебания $\varphi_1 = 0$, тогда его урав нение будет иметь вид: $x = 0{,}02\,sin\left(\frac{\pi}{4}t\right)$. Подставляя чи словые данные, для второго колебания получим:

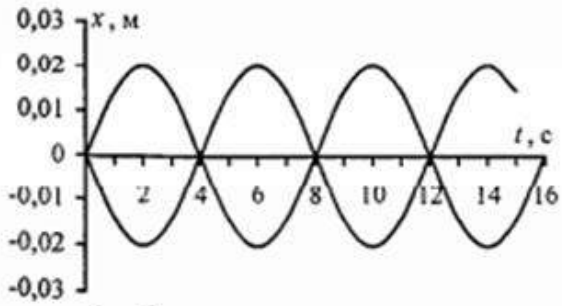
а) $x = 0{,}02\,sin\left(\frac{\pi}{4}t + \frac{\pi}{4}\right)$;



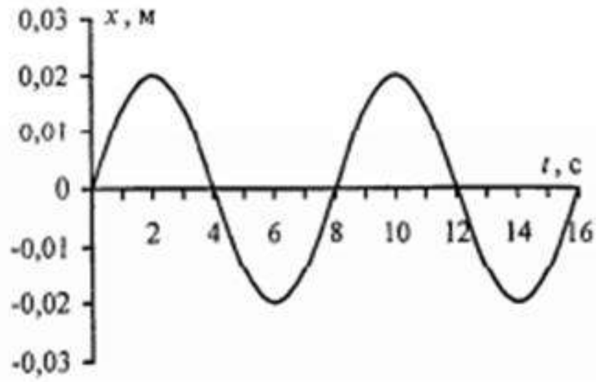
б) $x = 0{,}02\,sin\left(\frac{\pi}{4}t + \frac{\pi}{2}\right)$;



в) $x = 0{,}02\sin\left(\frac{\pi}{4}t + \pi\right)$;



г) $x = 0{,}02\sin\left(\frac{\pi}{4}t\right)$.



12.6 Через какое время от начала движения точка, совершающая гармоническое колебание, сместится от положения равновесия на половину амплитуды? Период колебаний T = 24 с, начальная фаза φ = 0.

Решение

Уравнение гармонического колебательного движения имеет вид: $x = A\sin\left(\frac{2\pi}{T}t + \varphi\right)$. Подставляя числовое значение периода T и начальной фазы φ, получим $x = A\sin\left(\frac{\pi}{12}t\right)$.

По условию $x = \frac{A}{2}$, отсюда $0{,}5 = \sin\left(\frac{\pi}{12}t\right)$, $\frac{\pi}{12}t = \frac{\pi}{6}$ или $t = 2$ с.

12.7 Начальная фаза гармонического колебания $\varphi = 0$. Через какую долю периода скорость точки будет равна половине ее максимальной скорости?

Решение

Уравнение гармонического колебательного движения имеет вид: $x = A\sin\left(\frac{2\pi}{T}t + \varphi\right)$. Скорость точки, совершающей колебания, $v = \frac{dx}{dt}$; $v = \frac{2\pi}{T}A\cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right)$. Максимальной скорости точка достигнет при $\cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right) = 1$. Т. е. $v_{max} = \frac{2\pi}{T}A$.

По условию $v = \frac{v_{max}}{2}$, тогда $\frac{2\pi}{T}A\cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right) = \frac{\pi}{T}A$;

$\cos\frac{2\pi}{T} = \frac{1}{2}$; $\frac{2\pi}{T}t = \frac{\pi}{3}$; $t = \frac{T}{6}$.

12.8 Через какое время от начала движения точка, совершающая колебательное движение по уравнению $x = 7\sin\pi/2\cdot t$, проходит путь от положения равновесия до максимального смещения?

Решение

По условию точка совершает гармоническое колебательное движение по закону $x = 7\sin\frac{\pi}{2}t$. Сопоставляя это уравнение с общим уравнением гармонических колебаний $x = A\sin\frac{2\pi}{T}t$, находим, что период колебаний $T = 4$ с. За время равное периоду колебаний точка совершает одно полное колебание, а прохождение пути от положения равновесия до максимального смещения составляет время $t = \frac{T}{4} = 1$ с.

12.9 Амплитуда гармонического колебания $A = 5$ см, период $T = 4$ с. Найти максимальную скорость v_{max} колеблющейся точки и ее максимальное ускорение a_{max}.

Решение

Скорость и ускорение точки, совершающей колебания, определяется соотношениями $v = \frac{dx}{dt} = \frac{2\pi}{T}A\cos\left(\frac{2\pi}{T}t + \varphi\right)$ и $a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{4\pi^2}{T^2}A\sin\left(\frac{2\pi}{T}t + \varphi\right)$. Они имеют максимальные значения соответственно при равенстве синуса и косинуса ± 1, т. е. $v_{max} = \frac{2\pi}{T}A = 7{,}85\cdot 10^{-2}$ м/с и

$a_{max} = \left|-\frac{4\pi^2}{T^2}A\right| = 0{,}12$ м/с^2.

12.10 Уравнение движения точки дано в виде x = 2sin(π/2·t+π/4).Найти период колебаний T, максимальную скорость v_{max} и максимальное ускорение a_{max} точки.

Решение

Сопоставим уравнение движения точки $x-2\sin\left(\frac{\pi}{2}t+\frac{\pi}{4}\right)$ с общим уравнением гармонических колебаний $x=A\sin\left(\frac{2\pi}{T}t+\varphi\right)$. Тогда амплитуда колебаний $A=2$ см, а период колебаний $T=4$ с. Максимальная скорость и максимальное ускорение (см. задачу 12.9) $v_{max}=\frac{2\pi}{T}A=3{,}14\cdot10^{-2}$ м/с и $a_{max}=\frac{4\pi^2}{T^2}A=4{,}93\cdot10^{-2}$ м/с.

12.11 Уравнение движения точки дано в виде x = sinπ/6·t. Найти моменты времени t, в которые достигаются максимальная скорость и максимальное ускорение.

Решение

Скорость точки $v=\frac{dx}{dt}=\frac{\pi}{6}\cos\frac{\pi}{6}t$. Максимального значения она достигает при $\cos\frac{\pi}{6}t=\pm1$ или $\frac{\pi}{6}t=n\pi$, где $n=0$, 1, 2, 3... Соответствующие моменты времени $t=0$, 6, 12, 18с ... Ускорение точки $a=\frac{dv}{dt}=-\frac{\pi^2}{36}\sin\frac{\pi}{6}t$ будет максимальным при $\sin\frac{\pi}{6}t=1$ или $\frac{\pi}{6}t=\frac{(2n+1)\pi}{2}$. Отсюда найдем моменты времени t, соответствующие максимальному ускорению: $t=3$, 9, 15 с ...

12.12 Точка совершает гармоническое колебание. Период колебаний T = 2 с, амплитуда A = 50 мм, начальная фаза φ = 0.Найти скорость v точки в момент времени, когда смешение точки от положения равновесия x = 25 мм.

Решение

Уравнение колебания точки имеет вид: $x=A\sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right)$, откуда $t=\frac{\arcsin(x/A)}{2\pi/T}=\frac{1}{6}$ с. Скорость точки $v=\frac{dx}{dt}$; $v=\frac{2\pi}{T}A\cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right)$. Подставив полученное значение t, получим $v=13{,}6$ см/с.

12.13 Написать уравнение гармонического колебательного движения, если максимальное ускорение точки a_{max} = 49,3 см/с^2, период колебаний T = 2 с и смещение точки от положения равновесия в начальный момент времени x_0 = 25 мм.

Решение

Из уравнения для максимального ускорения (см. задачу 12.9) $a_{max} = \frac{4\pi^2 A}{T^2}$ найдем амплитуду колебаний $A = \frac{a_{max}T^2}{4\pi^2} = 5$ см. Подставив значения амплитуды и периода в уравнение гармонических колебаний, получим $x = 5\sin(\pi t + \varphi_0)$ — (1). Начальную фазу колебаний найдем из условия, что при $t = 0$ $x = x_0$. Тогда уравнение (1) примет вид: $x_0 = 5\sin\varphi_0$, откуда $\sin\varphi_0 = \frac{x_0}{5}$ и $\varphi_0 = \arcsin\frac{x_0}{5} = \frac{\pi}{6}$. Подставляя начальную фазу в уравнение (1), окончательно получаем $x = 5\sin\left(\pi t + \frac{\pi}{6}\right)$.

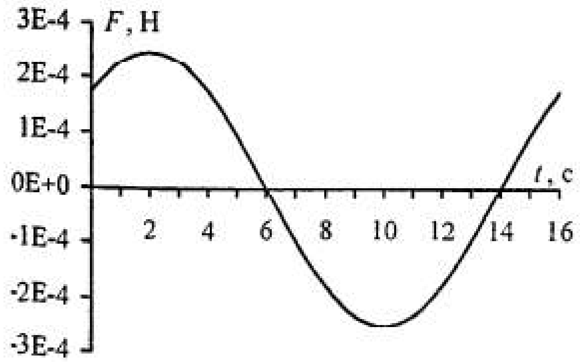
12.14 Начальная фаза гармонического колебания $\varphi = 0$. При смещении точки от положения равновесия x_1 = 2,4 см скорость точки v_1 = 3 см/с, а при смещении x_2 = 2,8 см ее скорость v_2 = 2 см/с. Найти амплитуду A и период T этого колебания.

Решение

Т. к. по условию начальная фаза $\varphi = 0$, то уравнения для смещения и скорости будут иметь следующий вид: $x = A\sin\frac{2\pi}{T}t$ — (1) и $v = \frac{2\pi}{T}A\cos\frac{2\pi}{T}t$ — (2). Из уравнения (1) находим $\sin\frac{2\pi}{T}t = \frac{x}{A}$ или $\cos\frac{2\pi}{T}t = \sqrt{1 - \frac{x^2}{A^2}}$ — (3). Подставляя (3) в (2), получаем $v = \frac{2\pi}{T}A\sqrt{1 - \frac{x^2}{A^2}}$ или $v^2 = \frac{4\pi^2 A^2}{T^2}\left(1 - \frac{x^2}{A^2}\right) = \frac{4\pi^2}{T^2}\left(A^2 - x^2\right)$. Для заданных значений смещения и скорости получаем $v_1^2 = \frac{4\pi^2}{T^2}\left(A^2 - x_1^2\right)$ — (4) и $v_2^2 = \frac{4\pi^2}{T^2}\left(A^2 - x_2^2\right)$ — (5). Разделим (4) на (5), тогда $\frac{v_1^2}{v_2^2} = \frac{A^2 - x_1^2}{A^2 - x_2^2}$ или $v_1^2 x_2^2 - v_2^2 x_1^2 = \left(v_1^2 - v_2^2\right)A^2$. Отсюда $A = \sqrt{\frac{v_1^2 x_2^2 - v_2^2 x_1^2}{v_1^2 - v_2^2}} = 3{,}1$ см. Из уравнения (4) период колебаний $T = \frac{2\pi}{v_1}\sqrt{A^2 - x_1^2} = 4{,}1$ с.

12.15 Уравнение колебания материальной точки массой m = 16 г имеет вид $x = 0{,}1\sin(\pi/8 \cdot t+\pi/4)$. Построить график зависимости от времени t (в пределах одного периода) силы F, действующей на точку. Найти максимальную силу F_{max}.

Решение



Т. к. уравнение колебания имеет вид $x = 0{,}1\,sin\left(\frac{\pi}{8}t + \frac{\pi}{4}\right)$, то ускорение при колебательном движении $a = \frac{d^2x}{dt^2} = 0{,}1\frac{\pi^2}{64}sin\left(\frac{\pi}{8}t + \frac{\pi}{4}\right)$. Сила, под действием которой точка массой m совершает гармоническое колебание, $F = ma = 0{,}1m\frac{\pi^2}{64}sin\left(\frac{\pi}{8}t + \frac{\pi}{4}\right)$. Эта сила будет максимальной, когда $sin\left(\frac{\pi}{8}t + \frac{\pi}{4}\right) = 1$, откуда $t_{max} = 2$ с. Тогда $F_{max} = 0{,}1m\frac{\pi^2}{64} = 246$ мкН. Для построения графика необходимо также найти пересечение с осью абсцисс $sin\left(\frac{\pi}{8}t + \frac{\pi}{4}\right) = 0$, откуда $t_0 = 6$ с. Подставляя числовые данные, построим график зависимости в пределах одного периода.

12.16 Уравнение колебаний материальной точки массой m = 10 г имеет вид $x = 5\sin(\pi/5 \cdot t + \pi/4)$ см. Найти максимальную силу F_{max}, действующую на точку, и полную энергию W колеблющейся точки.

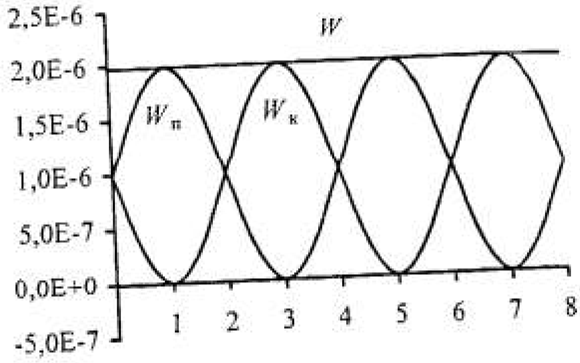
Решение

Т. к. уравнение колебаний имеет вид $x = 5\sin\left(\frac{\pi}{5}t + \frac{\pi}{4}\right)$ — (1), то ускорение при колебательном движении $a = \frac{d^2x}{dt^2} = 5\frac{\pi^2}{25}\sin\left(\frac{\pi}{5}t + \frac{\pi}{4}\right)$. Тогда максимальная сила, действующая на точку (см. задачу 12.15), $F_{max} = m\frac{\pi^2}{5} = 197$ мкН. Кинетическая энергия материальной точки равна $W_к = \frac{mv_x^2}{2} = \frac{kA^2\omega^2\cos^2(\omega t + \varphi_0)}{2}$. Потенциальная энергия материальной точки равна $W_п = \frac{kx^2}{2} = \frac{kA^2\sin^2(\omega t + \varphi_0)}{2}$, а т. к. $k = m\omega^2$, то $W_п = \frac{m\omega^2A^2\sin^2(\omega t + \varphi_0)}{2}$. При этом за нулевой уровень отсчета потенциальной энергии выбирается положение равновесия ($x = 0$). Полная энергия колеблющейся точки $W_0 = W_k + W_п = \frac{m\omega^2A^2}{2}$ или, с учетом $\omega = \frac{2\pi}{T}$, имеем $W = \frac{2\pi^2m}{T^2}A^2$ — (2). Из уравнения (1) амплитуда $A = 5$ см и период $T = 10$ с, подставляя их в уравнение (2), получаем $W = 4{,}93$ мкДж.

12.17 Уравнение колебания материальной точки массой m = 16 г имеет вид $x = 2\sin(\pi/4 \cdot t + \pi/4)$ см. Построить график зависимости от времени t (в пределах одного периода) кинетической W_K, потенциальной W_n и полной W энергии точки.

Решение

Уравнения для кинетической и потенциальной энергии колеблющейся точки имеют следующий вид: $W_к = \frac{\omega^2m}{2} \times A^2\cos^2(\omega t + \varphi)$ и $W_п = \frac{\omega^2m}{2}A^2\sin^2(\omega t + \varphi)$. Полная энергия колеблющейся точки $W = \frac{\omega^2m}{2}A^2$ (см. задачу 12.16).



По условию $A = 2$ см, $\omega = \dfrac{\pi}{4}$, $\varphi = \dfrac{\pi}{4}$. Подставляя числовые данные, получим $W_к = 2\pi^2 \cdot 10^{-7} cos^2\left(\dfrac{\pi}{4}t + \dfrac{\pi}{4}\right)$ Дж; $W_п = 2\pi^2 \cdot 10^{-7} sin^2\left(\dfrac{\pi}{4}t + \dfrac{\pi}{4}\right)$ Дж; $W = 2\pi^2 \cdot 10^{-7}$ Дж.

12.18 Найти отношение кинетической W_K энергии точки, совершающей гармоническое колебание, к ее потенциальной энергии W_n для моментов времени: *a*) $t = T/12$; б) $t = T/8$ в) $t = T/6$. Начальная фаза колебаний $\varphi = 0$.

Решение

Т. к. по условию начальная фаза колебаний $\varphi = 0$, то уравнения для кинетической и потенциальной энергии колеблющейся точки имеют следующий вид: $W_к = \dfrac{2\pi^2 m}{T^2} A^2 cos^2 \dfrac{2\pi}{T} t$ и $W_п = \dfrac{2\pi^2 m}{T^2} A^2 sin^2 \dfrac{2\pi}{T} t$. Тогда отношение энергии $\dfrac{W_к}{W_п} = \dfrac{cos^2(2\pi t / T)}{sin^2(2\pi t / T)} = ctg^2(2\pi t / T)$.

а) Если $t = \dfrac{T}{12}$, то $\dfrac{W_к}{W_п} = ctg^2 \dfrac{\pi}{6} = 3$. б) Если $t = \dfrac{T}{8}$, то $\dfrac{W_к}{W_п} = ctg^2 \dfrac{\pi}{4} = 1$. в) Если $t = \dfrac{T}{6}$, то $\dfrac{W_к}{W_п} = ctg^2 \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{1}{3}$.

12.19 Найти отношение кинетической энергии W_K точки, совершающей гармоническое колебание, к ее потенциальной энергии W_a для моментов, когда смещение точки от положения равновесия составляет: а) $x = A/4$; б) $x = A/2$; в) $x = A$, где A — амплитуда колебаний.

Решение

Уравнение гармонического колебательного движения имеет вид $x = A\sin\left(\frac{2\pi}{T}t+\varphi\right)$. Отсюда $\sin\left(\frac{2\pi}{T}t+\varphi\right) = \frac{x}{A}$, или из основного тригонометрического тождества $\cos\left(\frac{2\pi}{T}t+\varphi\right) = \sqrt{1-\frac{x^2}{A^2}}$. Тогда отношение кинетической энергии к потенциальной (см. задачу 12.18) $\frac{W_к}{W_п} = \frac{\cos^2((2\pi t/T)+\varphi)}{\sin^2((2\pi t/T)+\varphi)} = \frac{A^2-x^2}{x^2}$. а) Если $x = \frac{A}{4}$, то $\frac{W_к}{W_п} = 15$. б) Если $x = \frac{A}{2}$, то $\frac{W_к}{W_п} = 3$. в) Если $x = A$, то $\frac{W_к}{W_п} = 0$.

12.20 Полная энергия тела, совершающего гармоническое колебательное движение, W = 30 мкДж; максимальная сила, действующая на тело, F_{max} = 1,5 мН. Написать уравнение движения этого тела, если период колебаний T = 2 с и начальная фаза $\varphi = \pi/3$

Решение

Полная энергия тела, совершающего гармоническое колебательное движение, $W = \frac{2\pi^2 m}{T^2}A^2$ — (1), а максимальная сила, действующая на тело, $F_{max} = \frac{4\pi^2 m}{T^2}A$ — (2). Разделив (1) на (2), получим $\frac{W}{F_{max}} = \frac{A}{2}$, отсюда амплитуда колебаний $A = \frac{2W}{F_{max}} = 0{,}04$ м. Подставляя амплитуду колебаний, период колебаний и начальную фазу в общее уравнение гармонических колебаний $x = A\sin\left(\frac{2\pi}{T}t+\varphi\right)$, окончательно получаем $x = 0{,}04\sin\left(\pi t+\frac{\pi}{3}\right)$.

12.21 Амплитуда гармонических колебаний материальной точки A = 2 см, полная энергия колебаний W = 0,3 мкДж. При каком смещении x от положения равновесия на колеблющуюся точку действует сила F = 22,5 мкН?

Решение

Полная энергия тела, совершающего гармоническое колебательное движение, $W = \frac{2\pi^2 m}{T^2}A^2$ — (1), а сила, действующая на тело, $F = \frac{4\pi^2 m}{T^2}x$ — (2). Разделив (1) на (2), получим $\frac{W}{F} = \frac{A^2}{2x}$, отсюда смещение точки от положения равновесия $x = \frac{A^2 F}{2W} = 1{,}5$ см.

12.22 Шарик, подвешенный на нити длиной l = 2 м, отклоняют на угол α = 4° и наблюдают его колебания. Полагая колебания не затухающими гармоническими, найти скорость шарика при прохождении им положения равновесия. Проверить полученное решение, найдя скорость шарика при прохождении им положения равновесия из уравнений механики.

Решение

Уравнение колебательного движения шарика имеет вид: $x = A\sin\frac{2\pi}{T}t$ — (1). При малых отклонениях шарика от положения равновесия его амплитуда $A = l\sin\alpha \approx 0{,}14$ м. Период колебаний $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} = 2{,}8$ с. Тогда уравнение (1) примет вид: $x = 0{,}14\sin\frac{2\pi}{2{,}8}t$ м. Момент времени $t = 0$ соответствует положению равновесия. Скорость шарика $v = \frac{dx}{dt} = \frac{0{,}14\cdot 2\pi}{2{,}8}\cos\frac{2\pi}{2{,}8}t$ м/с. Максимального значения скорость достигает при прохождении шариком положения равновесия, т. е. $v_{max} = \frac{0{,}14\cdot 2\pi}{2{,}8} = 0{,}31$ м/с. Решая данную задачу по законам механики, имеем $v = \sqrt{2gl(1-\cos\alpha)}$ (см. задачу 2.108). Подставляя числовые данные, получим $v = 0{,}31$ м/с.

12.23 К пружине подвешен груз массой m = 10 кг. Зная, что пружина под влиянием силы F = 9,8 Н растягивается на l = 1.5 см, найти период T вертикальных колебаний груза.

Решение

По закону Гука сила упругости $F = -kx$ (знак «минус» говорит о том, что F — возвращающая сила), откуда $k = \frac{|F|}{x}$ — (1) — коэффициент жесткости пружины.

Уравнение второго закона Ньютона для груза имеет вид $m\ddot{x} = -kx$ — (2). Введя обозначение $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$, преобразуем уравнение (2) следующим образом: $\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$. Величина $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$ — циклическая частота колебаний, отсюда период колебаний вертикального пружинного маятника $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$ — (3). Подставляя (1) в (3), окончательно получим $T = 2\pi\sqrt{\frac{ml}{F}} = 0{,}78$ с.

12.24 К пружине подвешен груз. Максимальная кинетическая энергия колебаний груза $W_{Kmax} = 1$ Дж. Амплитуда колебаний $A = 5$ см. Найти жесткость k пружины.

Решение

Кинетическая энергия колебаний груза $W_к = \frac{2\pi^2 m}{T^2} \times A^2 \cos^2\left(\frac{2\pi}{T}t + \varphi\right)$ имеет максимальное значение, когда $\cos^2\left(\frac{2\pi}{T}t + \varphi\right) = 1$, т. е. $W_{кmax} = \frac{2\pi^2 m}{T^2}A^2$ — (1). Период колебаний груза на пружине $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$ — (2). Возведя (2) в квадрат и подставив в (1), получим $W_{кmax} = \frac{2\pi^2 m}{4\pi^2 m} \times A^2 k = \frac{1}{2}A^2 k$. Откуда найдем жесткость пружины $k = \frac{2W_{кmax}}{A^2} = 800$ Н/м.

12.25 Как изменится период вертикальных колебаний груза, висящего на двух пружинах, если от последовательного соединения пружин перейти к параллельному их соединению?

Решение

Сила упругости пружины по закону Гука $F = kx$. Если к пружине подвесить груз массой m, то в положении равновесия $mg = kx$, отсюда удлинение пружины $x = \frac{mg}{k}$. Если две пружины соединить последовательно, то их удлинения будут равны, а общее удлинение составит $x_2 = 2x = \frac{2mg}{k}$ — (1). С другой стороны, $x_2 = \frac{mg}{k_1}$ — (2), отсюда, приравнивая правые части уравнений (1) и (2), получаем $\frac{2mg}{k} = \frac{mg}{k_1}$ или $k_1 = \frac{k}{2}$. При параллельном соединении пружин общая жесткость системы $k_2 = 2k$. Таким образом, периоды колебаний при последовательном и параллельном соединении пружин соответственно равны $T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k_1}}$ и $T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k_2}}$, а их отношение $\frac{T_1}{T_2} = \sqrt{\frac{k_2}{k_1}} = \sqrt{4} = 2$.

12.26 Медный шарик, подвешенный к пружине, совершает вертикальные колебания. Как изменится период колебаний, если к пружине подвесить вместо медного шарика алюминиевый такого же радиуса?

Решение

Периоды колебаний медного и алюминиевого шариков соответственно равны $T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{m_1}{k}}$ и $T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{m_2}{k}}$, а их отношение $\frac{T_1}{T_2} = \sqrt{\frac{m_1}{m_2}}$. Т. к. по условию радиусы шариков равны, то равны и их объемы, а значит, $\frac{T_1}{T_2} = \sqrt{\frac{\rho_1}{\rho_2}}$, где $\rho_1 = 8{,}6 \cdot 10^3$ кг/м^3 и $\rho_2 = 2{,}6 \cdot 10^3$ кг/м^3 — плотности меди и алюминия, тогда $\frac{T_1}{T_2} = 1{,}82$.

12.27 К пружине подвешена чашка весов с гирями. При этом период вертикальных колебаний $T_1 = 0{,}5$ с. После того как на чашку весов положили еще добавочные гири, период вертикальных колебаний стал равным $T_2 = 0{,}6$ с. На сколько удлинилась пружина от прибавления этого добавочного груза?

Решение

Имеем $T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$ — (1); $T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{(m+\Delta m)}{k}}$ — (2). Возведя (1) и (2) в квадрат, а затем вычтя (1) из (2), получим $T_2^2 - T_1^2 = 4\pi^2\frac{\Delta m}{k}$. Жесткость пружины $k = \frac{F}{\Delta l} = \frac{\Delta mg}{\Delta l}$. Тогда $T_2^2 - T_1^2 = 4\pi^2\frac{\Delta l}{g}$, откуда $\Delta l = \frac{g}{4\pi^2}\left(T_2^2 - T_1^2\right) = 0{,}027$ м.

12.28 К резиновому шнуру длиной $l = 40$ см и радиусом $r = 1$ мм подвешена гиря массой $m = 0{,}5$ кг. Зная, что модуль Юнга резины $E = 3$ МН/м^2, найти период T вертикальных колебаний гири. Указание: учесть, что жесткость k резины связана с модулем Юнга E соотношением $k = SE/l$, где S - площадь поперечного сечения резины, l — ее длина.

Решение

Жесткость пружины связана с модулем Юнга соотношением $k = \frac{SE}{l}$ (1). Период колебаний гири $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$ — (2). Подставляя (1) в (2), получаем $T = 2\pi\sqrt{\frac{ml}{SE}}$ — (3). Площадь поперечного сечения шнура $S = \pi r^2$ — (4), тогда, подставляя (4) в (3), окончательно находим $T = 2\pi\sqrt{\frac{ml}{\pi r^2 E}} = 0{,}93$ с.

12.29 Ареометр массой m = 0,2 кг плавает в жидкости. Если погрузить его немного в жидкость и отпустить, то он начнет совершать колебания с периодом T = 3,4 с. Считая колебания незатухающими, найти плотность жидкости ρ, в которой плавает ареометр. Диаметр вертикальной цилиндрической трубки ареометра d = 1 см.

Решение

На плавающий ареометр действуют сила Архимеда $\vec{F}_A$, направленная вверх, и сила тяжести $\vec{P}$, направленная вниз. Условие равновесия имеет вид: $\vec{P}+\vec{F}_A=0$ или в скалярном виде $P=F_A$ — (1). Имеем $P=mg$; $F_A=\rho g(V+Sh)$, где V — объем ареометра (без трубки), S — площадь поперечного сечения трубки ареометра, h — длина трубки. Тогда $mg=\rho g(V+Sh)$. При погружении ареометра на глубину x результирующая выталкивающая сила $F=\rho g(V+S(h+x))-mg$; $F=\rho g(V+S(h+x))-\rho g(V+Sh)$; $F=\rho gSx$. Эта сила и вызывает колебания ареометра, т. е. можно записать $F=-kx$, где $k=\rho gS=\rho g\dfrac{\pi d^2}{4}$ — (2).

Уравнение второго закона Ньютона для ареометра имеет вид $m\ddot{x}=-kx$ — (3). Введя обозначение $\omega_0^2=\dfrac{k}{m}$, преобразуем уравнение (3) следующим образом: $\ddot{x}+\omega_0^2x=0$. Величина $\omega_0=\dfrac{2\pi}{T}$ — циклическая частота колебаний, отсюда период данных колебаний $T=2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}}$ — (4). Подставляя (2) в (4), получим $T=\dfrac{4}{d}\sqrt{\dfrac{\pi m}{\rho g}}$, откуда

$$\rho=\frac{16\pi m}{T^2d^2g}=0{,}89\cdot10^3\ \text{кг/м}^3.$$

12.30 Написать уравнение движения, получающегося в результате сложения двух одинаково направленных гармонических колебательных движений с одинаковым периодом T = 8 с и одинаковой амплитудой A = 0,02 м. Разность фаз между этими колебаниями $\varphi_2 - \varphi_1 = \pi/4$. Начальная фаза одного из этих колебаний равна нулю.

Решение

При сложении двух одинаково направленных гармонических колебаний одинакового периода получается гармоническое колебание того же периода с амплитудой $A=\sqrt{A_1^2+A_2^2+2A_1A_2\cos(\varphi_2-\varphi_1)}$ и с начальной фазой, определяемой уравнением $tg\varphi=\dfrac{A_1\sin\varphi_1+A_2\sin\varphi_2}{A_1\cos\varphi_1+A_2\cos\varphi_2}$, где A_1 и A_2 — амплитуды слагаемых колебаний, φ_1 и φ_2 — их начальные фазы. Подставляя числовые данные, получим $A=\sqrt{2\cdot(0{,}02)^2+2(0{,}02)^2\cos\dfrac{\pi}{4}}=0{,}037$ м;

$\varphi = arctg\frac{sin(\pi/4)}{1+cos(\pi/4)} = \frac{\pi}{8}$; $\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{\pi}{4}$. Отсюда уравнение результирующего движения $x = 0{,}037\,cos\left(\frac{\pi}{4}t + \frac{\pi}{8}\right)$.

12.31 Найти амплитуду A и начальную фазу φ гармонического колебания, полученного от сложения одинаково направленных колебаний, данных уравнениями $x_1 = 0{,}02sin(5\pi\cdot t+\pi/4)$ м и $x_2 = 0.03sin(5\pi\cdot t+\pi/4)$ м.

Решение

Из уравнений колебаний $x_1 = 0{,}02\,sin\left(5\pi t + \frac{\pi}{2}\right)$ и $x_2 = 0{,}03\,sin\left(5\pi t + \frac{\pi}{4}\right)$ находим амплитуды колебаний $A_1 = 0{,}02$ м и $A_2 = 0{,}03$ м и их начальные фазы $\varphi_1 = \frac{\pi}{2}$ и $\varphi_2 = \frac{\pi}{4}$. При сложении двух одинаково направленных гармонических колебаний одинакового периода получается гармоническое колебание того же периода с амплитудой $A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 1A_1A_2\,cos(\varphi_2 - \varphi_1)} = 0{,}045$ м. Начальная фаза колебания определяется из уравнения $tg\varphi = \frac{A_1\,sin\,\varphi_1 + A_2\,sin\,\varphi_2}{A_1\,cos\,\varphi_1 + A_2\,cos\,\varphi_2} = 1{,}94$. Тогда $\varphi = arctg1{,}94 = 62{,}75°$.

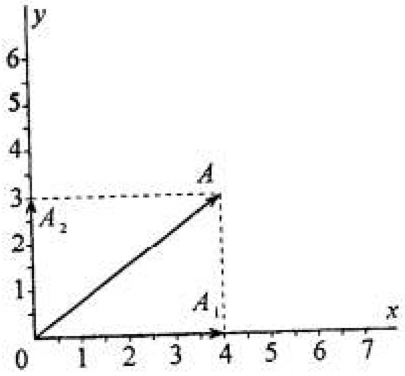
12.32 В результате сложения двух одинаково направленных гармонических колебаний с одинаковыми амплитудами и одинаковыми периодами получается результирующее колебание с тем же периодом и той же амплитудой. Найти разность фаз φ_2 - φ_1 складываемых колебаний.

Решение

При сложении двух одинаково направленных гармонических колебаний одинакового периода получается гармоническое колебание того же периода с амплитудой $A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 1A_1A_2\,cos(\varphi_2 - \varphi_1)}$ — (1). Т. к. по условию $A_1 = A_2 = A$, то уравнение (1), возведенное в квадрат, примет вид $A^2 = A^2 + A^2 + 2A^2\,cos(\varphi_2 - \varphi_1)$, откуда $cos(\varphi_2 - \varphi_1) = -\frac{1}{2}$. Тогда разность фаз складываемых колебаний $\varphi_2 - \varphi_1 = arccos\left(-\frac{1}{2}\right) = 120° = \frac{2\pi}{3}$.

12.33 Найти амплитуду A и начальную фазу φ гармонического колебания, полученного от сложения одинаково направленных колебаний, данных уравнениями $x_1 = 4\sin(\pi \cdot t)$ см и $x_2 = \sin(\pi t + \pi/2)$ см. Написать уравнение результирующего колебания. Дать векторную диаграмму сложения амплитуд.

Решение



Из уравнения колебаний $x_1 = 4\sin\pi t$ и $x_2 = 3\times\sin\left(\pi t + \dfrac{\pi}{2}\right)$ находим амплитуды колебаний $A_1 = 4$ см и $A_2 = 3$ см и их начальные фазы $\varphi_1 = 0$ и $\varphi_2 = \dfrac{\pi}{2}$. Амплитуда и фаза результирующего колебания (см. задачу 12.31)

$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\varphi_2 - \varphi_1)} = 5$ см,

$tg\varphi = \dfrac{A_1\sin\varphi_1 + A_2\sin\varphi_2}{A_1\cos\varphi_1 + A_2\cos\varphi_2} = 0{,}73$, следовательно,

$\varphi = arctg0{,}73 = \dfrac{\pi}{5}$. Тогда уравнение результирующего колебания будет иметь вид $x = 5\sin\left(\pi t + \dfrac{\pi}{5}\right)$. Для построения векторной диаграммы отложим от начала отсчета векторы, длины которых равны амплитудам A_1 и A_2. Т. к. $\varphi_1 = 0$ и $\varphi_2 = \dfrac{\pi}{2}$, то оба вектора лежат на осях координат. Сложив векторы по правилу параллелограмма, получим вектор амплитуды результирующего колебания.

12.34 На рисунке дан спектр результирующего колебания. Пользуясь данными этого рисунка, написать уравнения колебаний, из которых составлено результирующее колебание. Начертить график этих колебаний. Принять, что в момент $t = 0$ разность фаз между этими колебаниями $\varphi_2 - \varphi_1 = 0$. Начертить график результирующего колебания.

Решение

По спектру сложного колебания найдем амплитуду и частоту каждого из составляющих колебаний. Имеем:
$A_1 = 0{,}03$ м;
$\nu_1 = 0{,}2$ Гц;
$A_2 = 0{,}02$ м;
$\nu_2 = 0{,}5$ Гц;
$A_3 = 0{,}01$ м;
$\nu_3 = 1$ Гц.

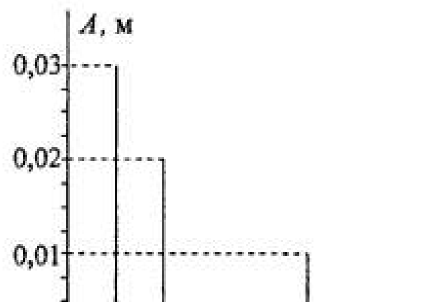


Рис. 1

Тогда уравнения этих колебаний будут иметь вид $x = 0{,}03\sin\frac{2\pi}{5}t$ м ; $x = 0.02\sin\pi t$ м ; $x = 0{,}01\sin 2\pi t$ м. Составим таблицу значений $x = f(t)$ для данных колебаний и построим их графики (рис.2). Затем, сложив значения x, соответствующие одним и тем же значениям t, получим график результирующего колебания (рис.3).

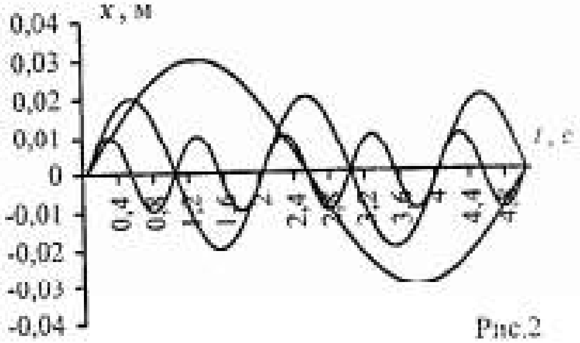


Рис.2

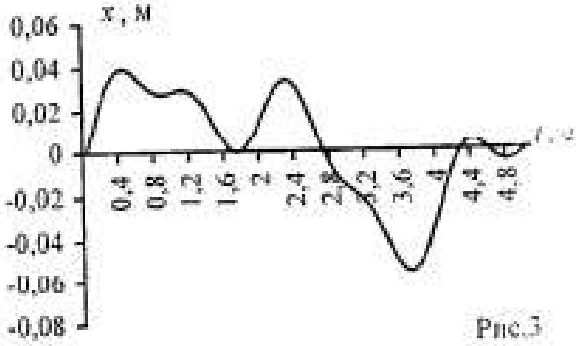


Рис.3

t, c	0	0.5	1	1,5	2	2,5
x_1, см	0,000	1,763	2.853	2,854	1,766	0,005
x_2, см	0.000	2.000	0,003	–2,000	–0,006	2,000
x_3, см	0,000	0,002	–0,003	0,005	–0,006	0,008
x, см	0,000	3,764	2.853	0,859	1,754	2,013

t, c	3	3,5	4	4,5	5
x_1, см	–1,759	–2,851	–2,856	–1,770	–0.010
x_2, см	0,010	–2.000	–0,013	2.000	0,016
x_3, см	–0,010	0.011	–0,013	0,014	–0.016
x, см	–1,759	–4,840	–2,881	0,244	–0,010

12.35 Уравнения двух гармонических колебаний имеют вид $x_1 = 3\sin(\pi \cdot t)$ см и $x_2 = 6\sin(10\pi \cdot t)$ см. Построить график этих колебаний. Сложив графически эти колебания, построить график результирующего колебания. Начертить спектр результирующего колебания.

Решение

Составим таблицу значений $x = f(t)$ для данных колебаний и построим их графики (рис.1). Затем, сложив значения x, соответствующие одним и тем же значениям t, получим график результирующего колебания (рис.2). Из уравнений колебаний найдем амплитуду и частоту каждого из них. Имеем: $A_1 = 0{,}03$ м ; $\nu_1 = 2$ Гц ; $A_2 = 0{,}06$ м ;

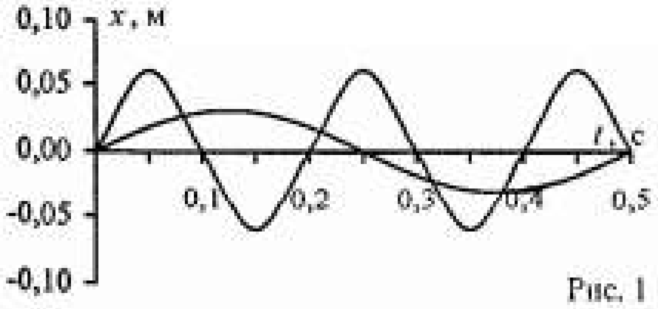


Рис. 1

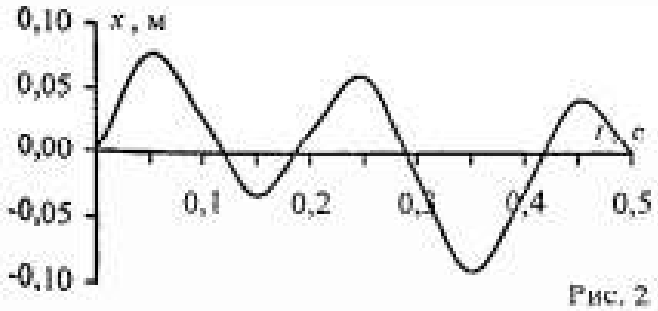


Рис. 2

$\nu_2 = 5$ Гц. По этим данным начертим спектр результирующего колебания (рис.3).

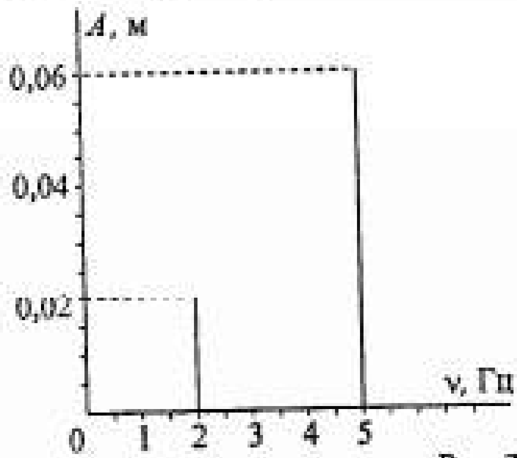


Рис. 3

12.36 Уравнение колебаний имеет вид $x = A\sin(2\pi\nu_1\cdot t)$, причем амплитуда A изменяется со временем по закону $A = A_0\cdot(1+cos(2\pi\nu_2\cdot t))$. Из каких гармонических колебаний состоит колебание? Построить график слагаемых и результирующего колебаний для $A_0 = 4$ см, $\nu_1 = 2$ Гц, $\nu_2 = 1$ Гц. Начертить спектр результирующего колебания.

Решение

По условию $x = A\sin 2\pi\nu_1 t$ — (1); $A = A_0(1+\cos 2\pi\nu_2 t)$ — (2). Подставляя (2) в (1), получим

$x = A_0(1+\cos 2\pi\nu_2 t)\sin 2\pi\nu_1 t$;

$x = A_0\sin 2\pi\nu_1 t + A_0\cos 2\pi\nu_2 t\sin 2\pi\nu_1 t$;

$x = A_0\sin 2\pi\nu_1 t + A_0/2\sin(2\pi(\nu_1-\nu_2)t) + A_0/2\sin(2\pi(\nu_1+\nu_2)t)$. Т. е. данное колебание состоит из трех гармонических колебаний. Подставляя числовые данные, построим график слагаемых (рис.1), график результирующего колебания (рис.2) и начертим спектр результирующего колебания (рис.3).

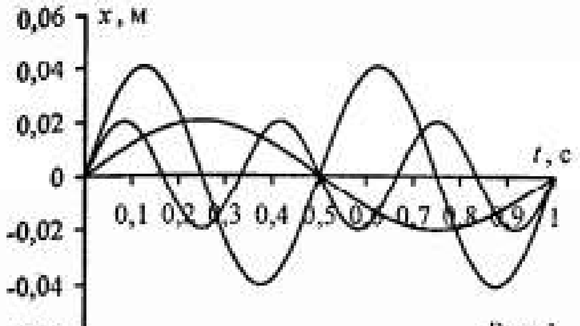


Рис. 1

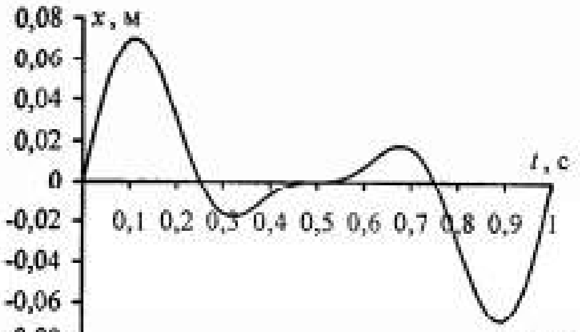


Рис. 2

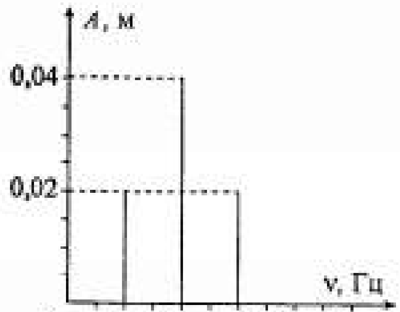


Рис. 3

12.37 Написать уравнение результирующего колебания получающегося в результате сложения двух взаимно перпендикулярных колебаний с одинаковой частотой $\nu_1 = \nu_2 = 5$ Гц одинаковой начальной фазой $\varphi_1 = \varphi_2 = \pi/3$. Амплитуды колебаний равны $A_1 = 0{,}10$ м и $A_2 = 0{,}05$ м.

Решение

При сложении двух взаимно перпендикулярных колебаний одинакового периода уравнение траектории результирующего колебания имеет вид $\frac{x^2}{A_1^2} + \frac{y^2}{A_2^2} - \frac{2xy}{A_1 A_2} \times \cos(\varphi_2 - \varphi_1) = \sin^2(\varphi_2 - \varphi_1)$ — (1). Т. к. у нас $\varphi_2 - \varphi_1 = 0$, то уравнение (1) примет вид $\frac{x^2}{A_1^2} + \frac{y^2}{A_2^2} - \frac{2xy}{A_1 A_2} = 0$, или $\left(\frac{x}{A_1} - \frac{y}{A_2}\right)^2 = 0$, откуда $y = \frac{A_2}{A_1}x$ — уравнение прямой линии. Таким образом, результирующее колебание будет происходить по прямой линии. Угол наклона прямой найдется из уравнения $tg\alpha = \frac{A_2}{A_1} = 0.5$, т. е. $\alpha = 26°34'$.

Период результирующего колебания равен периоду слагаемых колебаний, а амплитуда результирующего колебания $A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2} = 11{,}2$ см. Следовательно, уравнение результирующего колебания имеет вид: $s = 11{,}2\sin\left(10\pi t + \frac{\pi}{3}\right)$ см.

12.38 Точка участвует в двух колебаниях одинакового периода с одинаковыми начальными фазами. Амплитуды колебаний равны $A_1 = 3$ см и $A_2 = 4$ см. Найти амплитуду A результирующего колебания, если колебания совершаются: а) в одном правлении; б) в двух взаимно перпендикулярных направлениях.

Решение

а) В случае сложения одинаково направленных колебаний амплитуда результирующего колебания $A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\varphi_2 - \varphi_1)}$. Учитывая, что $\cos(\varphi_2 - \varphi_1) = 1$, найдем $A = 0.07$ м. б) В случае сложения двух взаимно перпендикулярных колебаний амплитуда результирующего колебания $A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2}$; $A = 0.05$ м.

12.39 Точка участвует в двух взаимно перпендикулярных колебаниях $x = 2\sin(\omega \cdot t)$ м и $y = 2\cos(\omega \cdot t)$ м. Найти траекторию результирующего движения точки.

Решение

Из уравнений колебаний $x = 2\sin\omega t$ – (1) и $y = 2\cos\omega t$ – (2) исключим время. Из уравнения (1) $\sin\omega t = \frac{x}{2}$, из основного тригонометрического тождества $\cos\omega t = \sqrt{1-\frac{x^2}{4}}$ — (3). Подставив (3) в (2), получаем $y = 2\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}$ или $y^2 = 4\left(1-\frac{x^2}{4}\right) = 4 - x^2$. Отсюда после преобразования получим уравнение окружности радиусом $R = 2$ м, которое имеет вид $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4} = 1$.

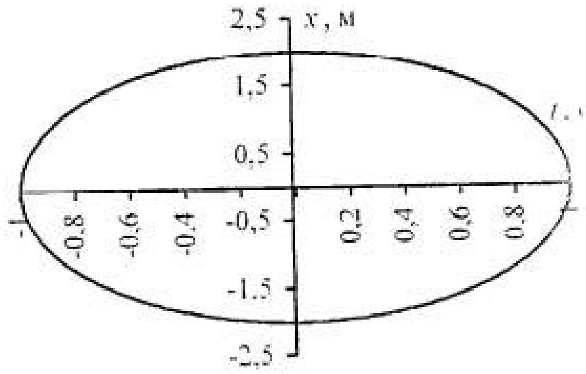
12.40 Точка участвует в двух взаимно перпендикулярных колебания $x = \cos(\pi \cdot t)$ и $y = \cos(\pi/2 \cdot t)$. Найти траекторию результирующего движения точки и начертить ее с нанесением масштаба.

Решение

Имеем $y = \cos\frac{\pi}{2}t = \sqrt{\frac{1+\cos\pi t}{2}}$, откуда $2y^2 - 1 = $ [illegible]. По условию $x = \cos\pi t$, отсюда $\frac{2y^2-1}{x} = 1$ или $2y^2 -$ [illegible] — уравнение параболы.

12.41 Точка участвует в двух взаимно перпендикулярных колебаниях $x = \sin(\pi \cdot t)$ и $y = 2\sin(\pi \cdot t + \pi/2)$. Найти траекторию результирующего движения точки.

Решение

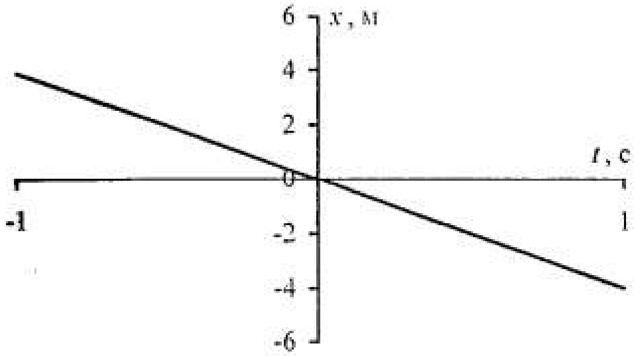


При сложении двух взаимно перпендикулярных [illegible]монических колебательных движений материальной [illegible]очки, описываемых уравнениями $x = a\cos(\omega_1 t -$ [illegible] и $y = b\cos(\omega_2 t - \varphi_{o2})$, траектория результирующе[illegible] движения материальной точки описывается у[illegible]нием $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{2xy}{ab}\cos\alpha = \sin^2\alpha$, где разность фаз [illegible]дываемых колебаний $\alpha = \varphi_{o1} - \varphi_{o2}$. У нас $a = 1$, $b = 2$ [illegible] $\frac{\pi}{2}$.

Подставляя числовые данные, получим $\frac{x^2}{1}+\frac{y^2}{4}=1$, т. е. траектория точки — эллипс.

12.42 Точка участвует в двух взаимно перпендикулярных колебаниях x = sin($\pi{\cdot}t$) *а* $y = 4\sin(\pi{\cdot}t+\pi)$. Найти траекторию результирующего движения точки и начертить ее с нанесением масштаба.

Решение



Из уравнений колебаний $x=\sin\pi t$ — (1); $y=4\sin(\pi t+\pi)$ — (2) исключим время. Для этого преобразуем уравнение (2), используя формулу синуса суммы: $\sin(\pi t+\pi)=\sin\pi t\cos\pi+\cos\pi t\sin\pi=-\sin\pi t$, т. к. $\cos\pi=-1$ и $\sin\pi=0$. Тогда уравнение (2) примет вид $y=-4\sin\pi t$ — (3). Подставляя (1) в (3), получаем уравнение траектории $y=-4x$, т. е. траекторией является прямая.

12.43 Период затухающих колебаний T = 4 с; логарифмический декремент затухания N = 1.6; начальная фаза φ = 0. При t = T/4 смещение точки x = 4,5 см. Написать уравнение движения этого колебания. Построить график этого колебания в пределах двух периодов.

Решение

Уравнение затухающего колебательного движения имеет вид $x=Ae^{-\delta t}\sin(\omega t+\varphi)$ — (1). Круговая частота $\omega=\frac{2\pi}{T}=\frac{\pi}{2}$. Логарифмический декремент затухания $\aleph=\delta T$, откуда $\delta=\frac{\aleph}{T}=0,4\text{ с}^{-1}$. По условию $t=\frac{T}{4}$, т. е. $t=1$ с. Зная значение x в этот момент времени, найдем амплитуду. Подставляя числовые данные, получим $A=6,7$ м. Тогда уравнение движения имеет вид $x=6,7e^{-0,4t}\sin\left(\frac{\pi}{2}t\right)$ — (2). Для построения графиков колебания найдем моменты времени t_1, t_2, t_3,… соответствующие максимальным значениям смещения x. Максимум x найдется из условия $v=\frac{dx}{dt}=0$. Из уравнения (1) находим (при $\varphi=0$) $v=A\omega e^{-\delta t}\cos\omega t-A\delta e^{-\delta t}\sin\omega t=0$, отсюда $tg\,\omega t=\frac{\omega}{\delta}=\frac{2\pi}{\aleph}$ — (3). Из уравнения (3) видно, что при незатухающих колебаниях, когда $\aleph=0$, величина

$tg\omega t = \infty$ или $\omega t = \frac{\pi}{2}$, т. е. $\frac{2\pi t}{T} = \frac{\pi}{2}$, или $t = \frac{T}{4}$. В наше[м]

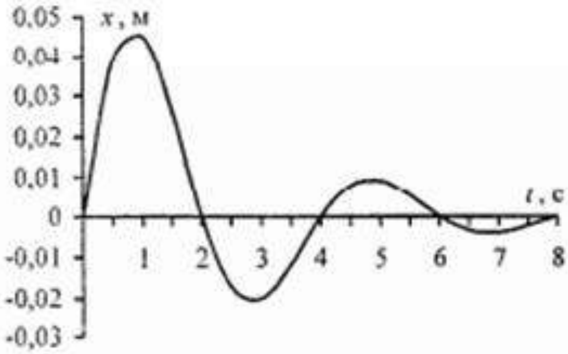
же случае $tg\omega t = \frac{2\pi}{\aleph} = 3{,}925$, т. е. $\omega t = 75°42' \approx 0{,}421\pi$,

откуда $t = 0{,}421\frac{\pi}{\omega} = 0{,}842$ с. Таким образом, $x = x_{max}$ при

$t_1 = 0{,}842$ с; $t_2 = t_1 + \frac{T}{2} = 2{,}842$ с, $t_3 = t_1 + T = 4{,}842$ с и

$t_4 = t_1 + \frac{3T}{2} = 6{,}842$ с и т.д. Подставляя соответствующие

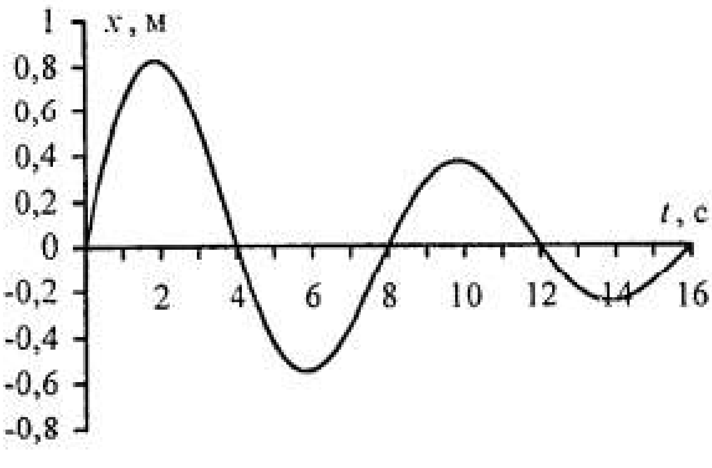
числовые значения в (2), получим $x_1 = 0{,}1$ см; $x_2 = 0{,}17$ см, $x_3 = 0{,}12$ см; $x_4 = 0{,}08$ см. По полученным данным пост[ро]им график.



12.44 Построить график затухающего колебания, данного уравнением $x = e^{-0{,}1t}\sin(\pi/4)t$ м.

Решение

Подставляя значения t в интервале от 0 до $2T$, построим график данного колебания (см. задачу 12.43)



12.45 Уравнение затухающих колебаний дано в виде $x = 5e^{-0,25t}\sin(\pi/2 \cdot t)$ м. Найти скорость v колеблющейся точки в моменты времени t, равные: 0, T, 2 T, 3 T и 4 T.

Решение

Скорость точки, совершающей колебания, в том числе затухающие, определяется соотношением $v = \frac{dx}{dt}$ — (1). По условию смещение $x = 5e^{-0,25t}\, sin\frac{\pi}{2}t$ — (2). Подставляя (2) в (1), получаем $v = \frac{d}{dt}\left(5e^{-0,25t}\, sin\frac{\pi}{2}t\right)$; $v = 5e^{-0,25t} \times \left(\frac{\pi}{2}cos\frac{\pi}{2}t - 0,25\, sin\frac{\pi}{2}t\right)$. Подставляя числовые данные, составим таблицу:

t, с	0	T	$2T$	$3T$	$4T$
v, м/с	7,85	2,89	1,06	0,39	0,15

12.46 Логарифмический декремент затухания математического маятника N = 0.2. Во сколько раз уменьшится амплитуда колебаний за одно полное колебание маятника?

Решение

По формулам для затухающих колебаний имеем $A_1 = A_0\, exp\left(-\aleph\frac{t}{T}\right)$; $A_2 = A_0\, exp\left(-\aleph\frac{t+T}{T}\right)$, откуда $\frac{A_1}{A_2} = e^{\aleph} = 1,22$.

12.47 Найти логарифмический декремент затухания математического маятника, если за время t = 1 мин амплитуда колебаний уменьшилась в 2 раза. Длина маятника l = 1 м.

Решение

По формулам для затухающих колебаний имеем $A_1 = A_0 \times exp\left(-\aleph\frac{t}{T}\right)$ — (1). Период колебаний математического маятника $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ — (2). Из уравнения (1) с учетом (2) получаем $\frac{A_0}{A_1} = exp\left(\frac{\aleph t}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{l}}\right)$ — (3). По условию $\frac{A_0}{A_1} = 2$, тогда из уравнения (3) получим $exp\left(\frac{\aleph t}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{l}}\right) = 2$ — (4). Прологарифмируем уравнение (4), тогда $\frac{\aleph t}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{l}} = ln 2$, откуда логарифмический декремент затухания $\aleph = \frac{2\pi}{t}\sqrt{\frac{l}{g}}\, ln 2 = 0,023$.

12.48 Математический маятник длиной l = 24,7 см совершает затухающие колебания. Через какое время t энергия колебаний маятника уменьшится в 9,4 раза? Задачу решить при значении логарифмического декремента затухания: а) N = 0,01; б) N = 1.

Решение

Для затухающих колебаний имеем $A_1 = A_0 \, exp\left(-\aleph \frac{t}{T}\right)$ или $\frac{A_0}{A_1} = exp\left(\frac{\aleph t}{T}\right)$ — (1). Период колебаний математического маятника $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ — (2). Подставляя (2) в (1), получаем $\frac{A_0}{A_1} = exp\left(\frac{\aleph t}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{l}}\right)$ — (3). Полная энергия колебаний $W = \frac{2\pi^2 m}{T^2} A^2$, и по условию $\frac{W_0}{W_1} = k$, где $k = 9{,}4$ раза, тогда $k = \left(\frac{A_0}{A_1}\right)^2$ или, с учетом (3), $k = exp\left(\frac{\aleph t}{\pi}\sqrt{\frac{g}{l}}\right)$ — (4). Прологарифмируем уравнение (4), тогда $ln\, k = \frac{\aleph t}{\pi}\sqrt{\frac{g}{l}}$. Отсюда время, за которое энергия колебаний уменьшится в k раз, $t = \frac{\pi}{\aleph}\sqrt{\frac{l}{g}}\, ln\, k$ — (5). Подставляя в (5) значение логарифмического декремента затухания, находим: а) для $\aleph_1 = 0{,}01$ время $t_1 = 144$ с; б) для $\aleph_2 = 1$ время $t_2 = 1{,}14$ с.

12.49 Математический маятник совершает затухающие колебания с логарифмическим декрементом затухания N = 0,2 . Во сколько раз уменьшится полное ускорение маятника в его крайнем положении за одно колебание?

Решение

Уравнение затухающего колебательного движения имеет вид $x = Ae^{-\delta t} sin(\omega t + \varphi)$ — (1). Для нахождения ускорения маятника продифференцируем дважды по времени уравнение (1). Имеем: $v = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}\left[Ae^{-\delta t} sin(\omega t + \varphi)\right]$; $v = Ae^{-\delta t}\left[-\delta\, sin(\omega t + \varphi) + \omega\, cos(\omega t + \varphi)\right]$ — (2) — скорость колебаний маятника. Тогда $v = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt} \times$
$\times \left[Ae^{-\delta t}\left(-\delta\, sin(\omega t + \varphi) + \omega\, cos(\omega t + \varphi)\right)\right]$;
$v = Ae^{-\delta t}\left(\left(\delta^2 + \omega^2\right) sin(\omega t + \varphi) + \delta\omega\, cos(\omega t + \varphi)\right)$ — (3). Из уравнения (3) находим

$$\frac{a_0}{a} = \frac{-Ae^0\left[\left(\delta^2 + \omega^2\right) sin\,\varphi + \delta\,\omega\, cos\,\varphi\right]}{-Ae^{-\delta T}\left[\left(\delta^2 + \omega^2\right) sin(2\pi + \varphi) + \delta\,\omega\, cos(2\pi + \varphi)\right]};$$

$\frac{e^0}{e^{-\delta T}} = e^{\delta T}$ — (4). По определению логарифмический декремент затухания $\aleph = \delta T$ — (5), тогда, подставляя (5) в (4), окончательно получаем $\frac{a_0}{a} = e^{\aleph} = 1,22$.

12.50 Амплитуда затухающих колебаний математического маятника за время $t = 1$ мин уменьшилась вдвое. Во сколько раз уменьшится амплитуда за время $t = 3$ мин?

Решение

Отношение начальной и конечной амплитуд колебаний (см. задачу 12.48) $\frac{A_0}{A_1} = exp\left(\frac{\aleph t}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{l}}\right)$ — (1). Прологарифмируем уравнение $ln\left(\frac{A_0}{A_1}\right) = \frac{\aleph t}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{l}}$, отсюда время уменьшения амплитуды $t = \frac{2\pi}{\aleph}\sqrt{\frac{l}{g}}\,ln\left(\frac{A_0}{A_1}\right)$. Следовательно, $\frac{t_1}{t_2} = \frac{ln(A_0/A_1)}{ln(A_0/A_2)}$, отсюда $ln\frac{A_0}{A_2} = \frac{t_2}{t_1}ln\frac{A_0}{A_1}$, следовательно, $\frac{A_0}{A_2} = exp\left(\frac{t_2}{t_1}ln\frac{A_0}{A_1}\right) = 8$.

12.51 Математический маятник длиной $l = 0,5$ м, выведенный из положения равновесия, отклонился при первом колебании на $x_1 = 5$ см, а при втором (в ту же сторону) — на $x_2 = 4$см. Найти время релаксации t, т. е. время, в течение которого амплитуда колебаний уменьшится в е раз, где е — основание натуральных логарифмов.

Решение

Уравнение затухающего колебательного движения имеет вид $x = Ae^{-\delta t}sin(\omega t + \varphi)$ — (1). Из уравнения (1) найдем $\frac{x_1}{x_2} = \frac{Ae^0 sin\varphi}{Ae^{-\delta T}sin(2\pi + \varphi)} = \frac{e^0}{e^{-\delta T}} = e^{\delta T}$ — (2). По условию $e^{\delta t} = e$ — (3). Прологарифмировав уравнения (2) и (3), получаем $\delta T = ln\frac{x_1}{x_2}$ — (4) и $\delta t = 1$ — (5). Разделив (4) на (5), имеем $\frac{T}{t} = ln\frac{x_1}{x_2}$ или $t = \frac{T}{ln(x_1/x_2)}$ — (6). Период колебаний математического маятника $T = 2\pi\sqrt{l/g}$ — (7). Подставляя (7) в (6), находим время релаксации $t = \frac{2\pi\sqrt{l/g}}{ln(x_1/x_2)} = 6,44$ с.

12.52 К вертикально висящей пружине подвешивают груз. При этом пружина удлиняется на dl = 9,8 см. Оттягивая этот груз вниз и отпуская его, заставляют груз совершать колебания. Каким должен быть коэффициент затухания δ, чтобы: а) колебания прекратились через время t = 10 с (считать условно, что колебания прекратились, если их амплитуда упала до 1% от начальной); б) груз возвращается в положение равновесия апериодически; в) логарифмический декремент затухания колебаний был равным N = 6?

Решение

а) По условию $\frac{A_1}{A_0} = 0{,}01 = 1\%$ — (1), где $A_0 = Ae^0$ — (2) и $A_1 = Ae^{-\delta t}$ — (3) — соответственно начальная и конечная амплитуда колебания груза на пружине. Подставляя (2) и (3) в (1), получаем $\frac{e^{-\delta t}}{e^0} = 0{,}01$ или $e^{\delta t} = 100$ — (4). Логарифмируя уравнение (4), получаем $\delta t = \ln 100$, откуда коэффициент затухания $\delta = \frac{\ln 100}{t} = 0{,}46\ \text{с}^{-1}$.

б) В случае апериодического возвращения системы в положение равновесия коэффициент затухания $\delta = \omega_0$ — (1), где ω_0 — начальная циклическая частота колебаний. Поскольку (см. пункт в) $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{\Delta l}}$ — (2), то, подставляя (2) в (1), получаем $\delta = \sqrt{\frac{g}{\Delta l}} = 10\ \text{с}^{-1}$.

в) По определению логарифмический декремент затухания $\aleph = \delta T$ — (1), где $T = \frac{2\pi}{\omega}$ — (2) — период затухающих колебаний. Из (1) с учетом (2) коэффициент затухания $\delta = \frac{\aleph\omega}{2\pi}$ — (3). Циклическая частота затухающих колебаний $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$ — (4). Подставляя (4) в (3), получаем $\delta = \frac{\aleph\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}}{2\pi}$ — (5). Поскольку колебания груза на пружине совершаются под действием двух сил: силы тяжести mg и силы упругости $F = k\Delta l$, где k — жесткость пружины, то в состоянии покоя $mg = k\Delta l$, откуда $\frac{m}{k} = \frac{\Delta l}{g}$ — (6). Начальный период колебания груза $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{k}{m}}$ или, с учетом (6), $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{\Delta l}{g}}$ — (7). Из формулы (2) начальная циклическая частота $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$ или, с учетом (7), $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{\Delta l}}$, тогда $\omega_0^2 = \frac{g}{\Delta l}$ — (8). Подставляя

(8) в (5), получаем $\delta = \frac{\aleph\sqrt{\frac{g}{\Delta l} - \delta^2}}{2\pi}$ — (9) и, возведя обе части уравнения (9) в квадрат, окончательно находим $\delta = \frac{\aleph}{\sqrt{4\pi^2 + \aleph^2}}\sqrt{\frac{g}{\Delta l}} = 6{,}98\ \text{с}^{-1}$.

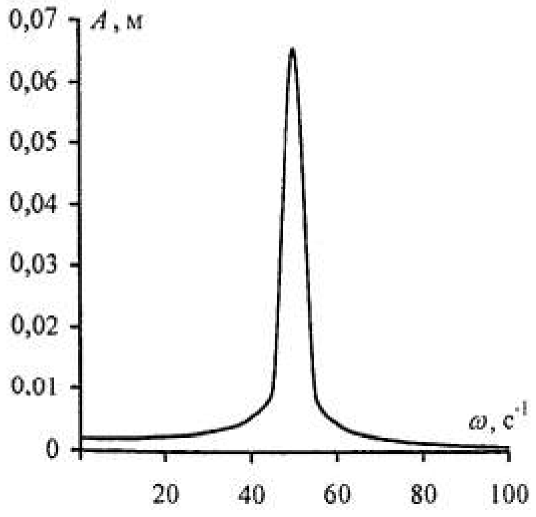
12.53 Тело массой m = 10 г совершает затухающие колебания с максимальной амплитудой A_{max} = 7 см, начальной фазой φ = 0 и коэффициентом затухания δ = 1,6 см$^{-1}$. На это тело начала действовать внешняя периодическая сила F, под действием которой установились вынужденные колебания. Уравнение вынужденных колебаний имеет вид x = 5sin($10\pi t$-3π/4) см. Найти (с числовыми коэффициентами) уравнение собственных колебаний и уравнение внешней периодической силы.

Решение

В случае, когда внешняя сила изменяется по гармоническому закону, колебания описываются дифференциальным уравнением $\ddot{x}+2\delta\dot{x}+\omega_0^2x=f_0\cos\omega t$, где δ — коэффициент затухания, ω_0 — собственная частота системы, ω — частота силы. Общее решение данного уравнения является уравнением собственных колебаний и имеет вид $x=A_0e^{-\delta t}\sin\omega_0 t$. По условию сдвиг фаз между собственными и вынужденными колебаниями равен $-\frac{3\pi}{4}$, следовательно, $tg\varphi=\frac{2\delta\omega}{\omega_0^2-\omega^2}=tg\left(-\frac{3\pi}{4}\right)=1$, отсюда $\omega_0=\sqrt{\omega^2+2\delta\omega}$. Подставляя числовые данные, получим $\omega_0=10.5\pi$. Тогда уравнение собственных колебаний примет вид $x=0{,}07e^{-1{,}6t}\sin 10{,}5\pi t$ м. Уравнение внешней периодической силы имеет вид $F=F_0\sin\omega t$. Максимальное значение внешней периодической силы $F_0=Am\sqrt{\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2+4\delta^2\omega^2}=72$ мН. Тогда уравнение внешней периодической силы будет иметь вид $F=72\sin 10\pi t$ мН.

12.54 Гиря массой m = 0,2 кг, висящая на вертикальной пружине, совершает затухающие колебания с коэффициентом затухания δ = 0,75 см$^{-1}$. Жесткость пружины k = 0,5кН/м. Начертить зависимость амплитуды A вынужденных колебаний гирьки от частоты внешней периодической силы, если известно, что максимальное значение внешней силы F_0 = 0,98 Н. Для построения графика найти значение A для частот: ω = 0, ω = 0,5, ω = 0,75, ω = ω_0, ω = 1,5ω_0 и ω = 2ω_0, где ω_0 — частота собственных колебаний подвешенной гири.

Решение



Период [колебан]ий гири, висящей на вертикальной пружине. $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$ — (1). С другой стороны $T = \frac{2\pi}{\omega_0}$ — (2). Приравнивая правые части уравнений (1) и (2), получаем $\sqrt{\frac{m}{k}} = \frac{1}{\omega_0}$, тогда $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = 50\ с^{-1}$ — (3). Амплитуда вынужденных колебаний $A = \frac{F_0}{m\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2\omega^2}}$ — (4). Произведя расчет значений амплитуды по формуле (4), с учетом (3), строим график.

ω, с$^{-1}$	0	25	37.5	50	75	100
A, м	0.0020	0.0026	0,0045	0.0653	0.0016	0,0007

12.55 По грунтовой дороге прошел трактор, оставив следы в виде ряда углублений, находящихся на расстоянии l = 30 см друг от друга. По этой дороге покатили детскую коляску, имеющую две одинаковые рессоры, каждая из которых прогибается на x_0 = 2 см под действием груза массой m_0 = 1 кг. С какой скоростью v катили коляску, если от толчков на углублениях она, попав в резонанс, начала сильно раскачиваться? Масса коляски M = 10 кг.

Решение

Коляска начнет сильно раскачиваться, если промежуток между двумя последовательными толчками на углублениях будет равен периоду собственных колебаний коляски, который можно найти по формуле $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$. На каждую рессору приходится масса $m = \frac{M}{2} = 5$ кг. Коэффициент упругости $k = \frac{m_0 g}{x_0} = 490$ Н/м. Подставляя числовые данные, получим $T = 0{,}63$ с. Кроме того, $T = \frac{l}{v}$, откуда $v = \frac{l}{T} = 0{,}48$ м/с.

12.56 Найти длину волны λ колебания, период которого $T = 10^{-14}$ с. Скорость распространения колебаний $c = 3 \cdot 10^8$ м с.

Решение

По определению длина волны колебания $\lambda = cT = 3$ мкм.

12.57 Звуковые колебания, имеющие частоту $\nu = 500$ Гц и амплитуду $A = 0.25$ мм. распространяются в воздухе. Длина волны $\lambda = 70$ см. Найти скорость с распространения колебаний и максимальную скорость V_{max} частиц воздуха.

Решение

По определению длина волны колебания $\lambda = cT$ — (1). Т. к. частота колебаний ν есть величина, обратная периоду, т. е. $\nu = \frac{1}{T}$ — (2), тогда, подставляя (2) в (1), получаем $\lambda = \frac{c}{\nu}$, откуда скорость распространения колебаний $c = \lambda\nu = 350$ м/с. Рассматривая частицы воздуха как материальные точки, запишем для скорости уравнение $v = \frac{dx}{dt} = \frac{2\pi}{T} A\cos\left(\frac{2\pi}{T}t + \varphi\right)$. Поскольку $v = v_{max}$, когда $\cos\left(\frac{2\pi}{T}t + \varphi\right) = 1$, то $v_{max} = \frac{2\pi}{T}A$ или, с учетом (2), окончательно получим $v_{max} = 2\pi\nu A = 0.785$ м/с.

12.58 Уравнение незатухающих колебаний имеет вид $x = 10\sin(\pi/2 \cdot t)$ см. Найти уравнение волны, если скорость распространения колебаний $c = 300$ м·с. Написать и изобразить графически уравнение колебания для точки, отстоящей на расстоянии $l = 600$ м от источника колебаний. Написать и изобразить графически уравнение колебания для точек волны в момент времени $t = 4$ с после начала колебаний.

Решение

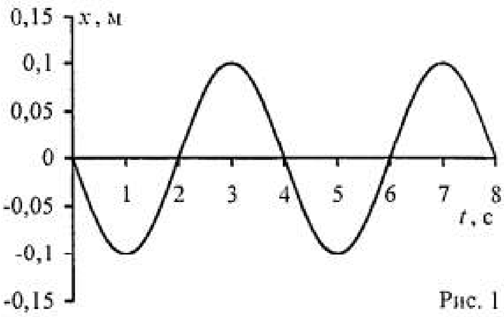


Рис. 1

При распространении незатухающих колебаний со скоростью c вдоль некоторого направления, называемого лучом, смещение любой точки, лежащей на луче и отстоящей от источника колебаний на расстоянии x, определяется выражением: $x = A\sin\left(\frac{2\pi}{T}t - \frac{2\pi l}{\lambda}\right)$ — (1), где A — амплитуда колеблющихся точек, $\lambda = cT$ — (2) — длина волны.

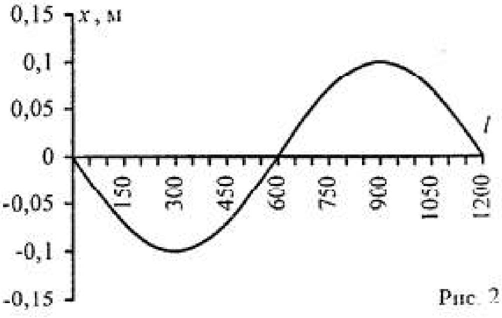


Рис. 2

Подставляя числовые данные в (1), с учетом (2), получим уравнение волны: $x = 0{,}1\sin\left(\frac{\pi}{2}t - \frac{\pi l}{600}\right)$ м — (3). При $l = 600$ м уравнение (3) примет вид $x = 0{,}1\sin\left(\frac{\pi}{2}t - \pi\right)$ м (рис.1), т. е. при $l = const$ получим $x = f(t)$ — смещение фиксированной точки, лежащей на луче, меняется со временем. При $t = 4$ с уравнение (3) примет вид $x = 0{,}1\sin\left(2\pi - \frac{\pi l}{600}\right)$ м (рис.2), т. е. при $t = const$ получим $x = f(l)$ — различные точки, лежащие на луче, имеют различные смещения в данный момент времени.

12.59 Уравнение незатухающих колебаний имеет вид $x = 4\sin(600\pi t)$ см. Найти смещение x от положения равновесия точки, находящейся на расстоянии $l = 75$ см от источника колебаний, для момента времени $t = 0{,}01$ с после начала колебаний. Скорость распространения колебаний $c = 300$ м/с.

Решение

Имеем $x = A\sin\left(\frac{2\pi}{T}t - \frac{2\pi l}{\lambda}\right)$ — (1) (см. задачу 12.58), где A — амплитуда колеблющихся точек, $\lambda = cT$ — (2) — длина волны. Т. к. по условию уравнение незатухающих колебаний имеет вид $x = 4\sin 600\pi t$ — (3), то, сопоставляя (1) и (3) и учитывая (2), окончательно получаем $x = 4\sin\left(600\pi t - \frac{2\pi l}{cT}\right) = 4\sin\left(600\pi t - 600\pi\frac{l}{c}\right) = 4$ см.

12.60 Уравнение незатухающих колебаний имеет вид $x = \sin(2{,}5\pi t)$ см. Найти смещение x от положения равновесия, скорость v и ускорение a точки, находящейся на расстоянии $l = 20$ м от источника колебаний, для момента времени $t = 1$ с после начала колебаний. Скорость распространения колебаний $c = 100$ м·с.

Решение

Смещение точки от положения равновесия (см. задачу 12.59) определяется соотношением $x = \sin\left(2{,}5\pi t - 2{,}5\pi\frac{l}{c}\right) = 0$. Тогда скорость точки можно определить как $v = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}\left[\sin\left(2{,}5\pi t - 2{,}5\pi\frac{l}{c}\right)\right]$;

$v = 2{,}5\cos\left(2{,}5\pi t - 2{,}5\pi\frac{l}{c}\right)$; $v = 7{,}85$ см/с, а ее ускорение

$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left[2{,}5\cos\left(2{,}5\pi t - 2{,}5\pi\frac{l}{c}\right)\right]$;

$a = -6{,}25\pi^2\sin\left(2{,}5\pi t - 2{,}5\pi\frac{l}{c}\right) = 0$.

12.61 Найти разность фаз колебаний двух точек, стоящих от источника колебаний на расстояниях l_1 = и l_2 = 16 м. Период колебаний T = 0,04 с; скорость распространения c = 300 м/с.

Решение

Две точки, лежащие на луче на расстояниях l_1 и l ... не- точника колебаний, имеют разность фаз $\varphi_2 - \varphi_1 = 2$ ... $\frac{l}{}$ (1). Поскольку длина волны λ связана с перио... ко- лебаний T и скоростью их распространения со- шением $\lambda = cT$ — (2), то, подставляя (2) в (1), окон... ль- но получаем $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = 2\pi\frac{l_2 - l_1}{cT} = \pi$, т. е. точк... ле- блются в противоположных фазах.

12.62 Найти разность фаз d_φ колебаний двух точек, лежащих на луче и отстоящих на расстоянии l = 2 м друг от друга, если длина волны λ = 1 м.

Решение

Две точки, лежащие на луче на расстояниях l_1 и l_2 от источника колебаний, имеют разность фаз $\varphi_2 - \varphi_1 = 2\pi\frac{l_2 - l_1}{\lambda}$ — (1). В нашем случае $l = l_2 - l_1$ — (2), поэтому, подставляя (2) в (1), окончательно получаем $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = 2\pi\frac{l}{\lambda} = 4\pi$, т. е. точки колеблются в одинаковых фазах.

12.63 Найти смещение x от положения равновесия точки, отстоящей от источника колебаний на расстоянии $l = \lambda/12$, для момента времени $t = T/6$. Амплитуда колебаний A = 0,05 м.

Решение

При распространении незатухающих колебаний вдоль некоторого направления, называемого лучом, смещение любой точки, лежащей на луче и отстоящей от источника колебаний на расстоянии l, дается уравнением $x = A\sin\left(\frac{2\pi}{T}t - \frac{2\pi l}{\lambda}\right)$. Подставляя исходные данные, получим $x = 0{,}05\sin\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6}\right) = 2.5$ см.

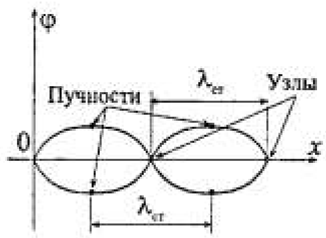
12.64 Смещение от положения равновесия точки, отстоящей источника колебании на расстоянии l = 4 см. в момент времени $t = T/6$ равно половине амплитуды. Найти длину λ бегущей волны.

Решение

Смещение точки от положения равновесия (см. задачу 12.63) дается уравнением $x = A\sin\left(\frac{2\pi}{T}t - \frac{2\pi l}{\lambda}\right)$. Подставляя исходные данные, получим $x = A\sin\left(\frac{\pi}{3} - \frac{2\pi l}{\lambda}\right) = \frac{A}{2}$, отсюда $\sin\left(\frac{\pi}{3} - \frac{2\pi l}{\lambda}\right) = \frac{1}{2}$, следовательно, $\frac{\pi}{3} - \frac{2\pi l}{\lambda} = \arcsin\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{6}$ или $\frac{2\pi l}{\lambda} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6}$. Тогда окончательно $\lambda = 12l = 0{,}48$ м.

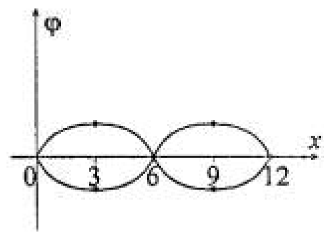
12.65 Найти положение узлов и пучностей и начертить график стоячей волны, если: а) отражение происходит от менее плотной среды; б) отражение происходит от более плотной среды. Длина бегущей волны $\lambda = 12$ см.

Решение

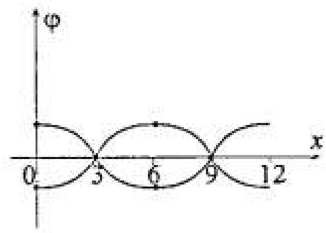


Стоячей называется волна, которая образуется в результате наложения двух бегущих синусоидальных когерентных волн, распространяющихся навстречу друг другу. В отличие от бегущей волны она состоит из узлов и пучностей, причем расстояние между двумя соседними узлами или пучностями есть величина постоянная, называемая длиной стоячей волны, $\lambda_{ст} = \dfrac{\lambda}{2}$ — (1), где λ — длина бегущей волны. Подставляя значение λ в (1), получим $\lambda_{ст} = 6$ см.

а) Если отражение происходит от менее плотной среды, то положение узлов будет определяться из условия $x = (2n+1)\dfrac{\lambda_{ст}}{2}$ (2), где $n = 0,\ 1,\ 2...$ Подставляя в (2) значение n и $\lambda_{ст}$, получаем $x = 3,\ 9,\ 15$ см ... Положение пучностей будет определяться из условия $x = 2n\dfrac{\lambda_{ст}}{2} = n\lambda_{ст}$ — (3). Подставляя в (3) значение n и $\lambda_{ст}$, получаем $x = 0,\ 6,\ 12,\ 18$ см...



б) Если отражение происходит от более плотной среды, то узлы и пучности поменяются местами и положение узлов будет определяться из условия (3), т. е. $x = 0,\ 6,\ 12,\ 18$ см, а положение пучностей — из условия (2), т. е. $x = 3,\ 9,\ 15$ см...



12.66 Найти длину волны λ колебаний, если расстояние между первой и четвертой пучностями стоячей волны $l = 15$ см.

Решение

Длина стоячей волны (см. задачу 12.65) $\lambda_{ст} = \dfrac{\lambda}{2}$ — (1), где λ — длина волны колебаний. С другой стороны, $\lambda_{ст} = \dfrac{l}{n_1 - n_2}$ — (2), где n_1 и n_2 — порядковые номера пучностей. По условию $n_1 = 1$ и $n_2 = 4$, тогда, приравнивая правые части уравнений (1) и (2), получаем $\dfrac{\lambda}{2} = \dfrac{l}{3}$, откуда длина волны колебаний $\lambda = \dfrac{2l}{3} = 10\text{ см} = 0{,}1\text{ м}$.

§ 13. Акустика

13.1 Найти длину волны λ основного тона для частоты ν = 435 Гц. Скорость распространения звука воздухе c = 340 м/с.

Решение

Длина волны основного тона ля $\lambda = cT$ — (1), где T — период колебаний воздуха. Поскольку частота колебаний $\nu = \frac{1}{T}$ — (2), то, подставляя (2) в (1), получаем $\lambda = \frac{c}{\nu} = 0{,}78$ м.

13.2 Человеческое ухо может воспринимать частотой приблизительно от ν_1 = 20 Гц до ν_2 = 20000 Гц. Между какими длинами волн лежит интервал слышимости звуковых колебаний? Скорость распространения звука в воздухе c = 340 м/с.

Решение

Длина волны звуковых колебаний (см. задачу 13.1) $\lambda = \frac{c}{\nu}$. Интервал слышимости звуковых колебаний лежит между длинами волн $\lambda_1 = \frac{c}{\nu_1} = 17$ м и $\lambda_2 = \frac{c}{\nu_2} = 0{,}017$ м $= 17$ мм.

13.3 Найти скорость c распространения звука в стали.

Решение

Скорость распространения акустических колебаний в некоторой среде определяется формулой $c = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$, где E — модуль Юнга среды, ρ — плотность среды. Для стали $E = 216$ ГПа и $\rho = 7{,}7 \cdot 10^3$ кг/м^3, тогда скорость звука в стали $c_c = 5296$ м/с.

13.4 Найти скорость c распространения звука в меди.

Решение

Скорость распространения акустических колебаний в некоторой среде определяется формулой $c = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$, где E — модуль Юнга среды, ρ — плотность среды. Для меди $E = 118$ ГПа и $\rho = 8{,}6 \cdot 10^3$ кг/м^3, тогда скорость звука в меди $c = 3704$ м/с.

13.5 Скорость распространения звука в керосине c = 1330 м/с. Найти сжимаемость p керосина.

Решение

Модуль Юнга E связан со сжимаемостью β соотношением $\beta = \dfrac{1}{E}$, где $E = \rho c^2$. Отсюда $\beta = \dfrac{1}{\rho c^2} = 7{,}1 \cdot 10^{-10}$ Па$^{-1}$.

13.6 При помощи эхолота измерялась глубина моря. Какова была глубина моря, если промежуток времени между возникновением звука и его приемом оказался равным t = 2,5 с? Сжижаемость воды $\beta = 4{,}6 \cdot 10^{-10}$ Па$^{-1}$, плотность морской воды $1{,}03 \cdot 10^3$ кг/м^3.

Решение

Скорость распространения акустических колебаний в некоторой среде определяется формулой $c = \sqrt{\dfrac{E}{\rho}}$ — (1). Модуль Юнга связан со сжимаемостью соотношением $E = \dfrac{1}{\beta}$ — (2). Подставляя (2) в (1), получаем $c = \sqrt{\dfrac{1}{\rho\beta}}$, тогда глубина моря $h = \dfrac{ct}{2} = \dfrac{t}{2}\sqrt{\dfrac{1}{\rho\beta}} = 1815$ м.

13.7 Найти скорость с распространения звука в воздухе при температурах t, равных: -20, 0 и 20 °С.

Решение

Скорость распространения акустических колебаний в газах $c = \sqrt{\dfrac{\gamma RT}{\mu}}$, где μ — молярная масса газа, T — абсолютная температура газа, $R = 8{,}31$ Дж/(моль·К) — универсальная газовая постоянная, γ — показатель адиабаты газа. Воздух в первом приближении можно считать двухатомным газом, поэтому $\mu = 0{,}029$ кг/м^3, $\gamma = \dfrac{i+2}{i}$, где i — число степеней свободы, причем для двухатомных газов $i = 5$, тогда $\gamma = 1{,}4$. Подставляя числовые данные, составим таблицу:

T, К	253	273	[illegible]
c, м/с	321	333	[illegible]

13.8 Во сколько раз скорость с, распространения звука в воздухе летом (t = 27 °С) больше скорости c_2распространения зимой (t = -33 °С)?

Решение

Скорость распространения акустических колебаний в газах (см. задачу 13.7) $c=\sqrt{\frac{\gamma RT}{\mu}}$, откуда следует $\frac{c_1}{c_2}=\sqrt{\frac{T_1}{T_2}}$.

Подставляя числовые данные, получим $\frac{c_1}{c_2}=1.12$.

13.9 Зная, что средняя квадратичная скорость v молекул двухатомного газа в условиях опыта v = 461 м/с, найти скорость c распространения звука в газе.

Решение

Скорость распространения звука в газе (см. задачу 13.7) $c=\sqrt{\frac{\gamma RT}{\mu}}$ — (1), а средняя квадратичная скорость молекул газа $\sqrt{\overline{v^2}}=\sqrt{\frac{3RT}{\mu}}$ — (2). Разделив (1) на (2), получаем $\frac{c}{\sqrt{\overline{v^2}}}=\sqrt{\frac{\gamma}{3}}$, откуда скорость распространения звука в газе $c=\sqrt{\overline{v^2}}\sqrt{\frac{\gamma}{3}}$ — (3). По условию газ двухатомный, следовательно (см. задачу 13.7), показатель адиабаты $\gamma=1{,}4$ и, подставляя его в формулу (3), получаем $c=315$ м/с.

13.10 Найти скорость c распространения звука в двухатомном газе, если известно, что при давлении p = 1,01·10^5 Па, плотность газа p = 1,29 Кг/м^3.

Решение

Скорость распространения звука в газе (см. задачу 13.7) $c=\sqrt{\frac{\gamma RT}{\mu}}$ — (1). Из уравнения Менделеева — Клапейрона

$pV=\frac{m}{\mu}RT$ давление $p=\frac{mRT}{\mu V}=\frac{\rho RT}{\mu}$ или $\frac{p}{\rho}=\frac{RT}{\mu}$ — (2).

Подставляя (2) в (1), получаем $c=\sqrt{\frac{\gamma p}{\rho}}$ — (3). По условию газ двухатомный, следовательно (см. задачу 13.7), показатель адиабаты $\gamma=1{,}4$ и, подставляя его в формулу (3), получаем $c=331$ м/с.

13.11 Зная, что средняя молярная кинетическая энергия поступательного движения молекул азота $W_{к\mu}$ = 3,4 кДж/моль, найти скорость с распространения звука в азоте при этих условиях.

Решение

Скорость распространения звука в газе (см. задачу 13.7) $c=\sqrt{\frac{\gamma RT}{\mu}}$ — (1), а средняя молярная кинетическая энергия поступательного движения молекул $W_{к\mu}=\frac{3}{2}RT$ — (2). Из уравнения (2) абсолютная температура $T=\frac{2W_{к\mu}}{3R}$ — (3). Подставляя (3) в (1), получаем $c=\sqrt{\frac{2\gamma RW_{к\mu}}{3R\mu}}=\sqrt{\frac{2\gamma W_{к\mu}}{3\mu}}$ — (4). Поскольку азот — газ двухатомный, следовательно (см. задачу 13.7), показатель адиабаты $\gamma=1,4$ и, подставляя его в формулу (4), получаем $c=337$ м/с.

13.12 Для определения температуры верхних слоев атмосферы нельзя пользоваться термометром, т. к. вследствие малой плотности газа термометр не придет в тепловое равновесие с окружающей средой. Для этой цели пускают ракету с гранатами, взрываемыми при достижении определенной высоты. Найти температуру t на высоте h = 20 км от поверхности Земли, если известно, что звук от взрыва, произведенного на высоте h_1 = 21 км, пришел позже на 6,75 с звука от взрыва, произведенного на высоте h_2 = 19 км.

Решение

Скорость распространения звука в газе (см. задачу 13.7) $c=\sqrt{\frac{\gamma RT}{\mu}}$ — (1). По условию звук проходит расстояние $\Delta h=h_1-h_2$ за время Δt, поэтому, с другой стороны, $c=\frac{h_2-h_1}{\Delta t}$ — (2). Приравнивая правые части уравнений (1) и (2) и возводя обе части равенства в квадрат, получаем $\frac{\gamma RT}{\mu}=\frac{(h_2-h_1)^2}{(\Delta t)^2}$, откуда абсолютная температура воздуха на высоте h равна $T=\frac{\mu}{\gamma R}\frac{(h_1-h_2)^2}{(\Delta t)^2}$ — (3). Воздух в первом приближении можно считать азотом, для которого $\mu=0,028$ кг/м^3 и $\gamma=1,4$. Подставляя значения в формулу (3), получаем $T=216$ К или $t=T-273=-57°$ С.

13.13 Найти показатель преломления n звуковых волн на границе воздух — стекло. Модуль Юнга для стекла $E = 6{,}9\cdot10^{10}$ Па, плотность стекла $\rho = 2{,}6\cdot10^{3}$ кг/м^3, температура воздуха $t = 20$ °С.

Решение

Скорость распространения акустических колебаний в твердой и жидкой средах (см. задачи 13.3 и 13.4) $c = \sqrt{\dfrac{E}{\rho}}$ — (1), а в газах (см. задачу 13.7) $c = \sqrt{\dfrac{\gamma RT}{\mu}}$ — (2). По определению показателя преломления $n = \dfrac{c_1}{c_2}$ — (3), где c_1 и c_2 — скорости звука в воздухе и в стекле, которые могут быть найдены соответственно из формул (2) и (1). Подставляя (2) и (1) в (3) и учитывая, что абсолютная температура $T = t + 273$, получаем $n = \sqrt{\dfrac{\gamma RT\rho}{\mu E}} = \sqrt{\dfrac{\gamma R\rho(t+273)}{\mu E}}$ — (4). Воздух в первом приближении можно считать двухатомным газом, для которого $\mu = 0{,}029$ кг/м^3 и $\gamma = 1{,}4$. Подставляя значения в формулу (4), получаем $n = 0{,}067$.

13.14 Найти предельный угол α полного внутреннего отражения звуковых волн на границе воздух — стекло. Воспользоваться необходимыми данными из предыдущей задачи 13.13.

Решение

Согласно закону преломления волн показатель преломления $n = \dfrac{\sin\alpha}{\sin\beta}$ — (1), где α — угол падения, β — угол преломления. При определенном значении угла падения α_0 преломленная волна скользит вдоль границы двух сред. В этом случае $\beta = \dfrac{\pi}{2}$ и $\sin\beta = 1$ (2). Это явление называется полным внутренним отражением, а угол α_0 — предельным углом. Из (1), с учетом (2), получаем $n = \sin\alpha_0$ — (3) и, с другой стороны (см. задачу 13.13), показатель преломления $n = \sqrt{\dfrac{\gamma R\rho(t+273)}{\mu E}}$ — (4). Приравнивая правые части уравнений (3) и (4), получаем $\sin\alpha_0 = \sqrt{\dfrac{\gamma R\rho(t+273)}{\mu E}}$, откуда предельный угол полного внутреннего отражения звуковых волн $\alpha_0 = \arcsin\left(\sqrt{\dfrac{\gamma R\rho(t+273)}{\mu E}}\right)$. Считая воздух в первом приближении двухатомным газом, для которого $\mu = 0{,}029$ кг/м^3 и $\gamma = 1{,}4$, получаем $\alpha = 3{,}84°$.

13.15 Два звука отличаются по уровню громкости на $\Delta L = 1$ фон. Найти отношение — I_2/I_1интенсивностей этих звуков.

Решение

Уровень громкости в фонах L_I связан с интенсивностью звука соотношением $L_I = 10 lg\frac{I}{I_0}$ — (1), где I_0 — порог слышимости звука. Условно принимается, что $I_0 = 10^{-12}$ Вт/м^2. Для первого и второго звука из (1) соответственно имеем $L_{I1} = 10 lg\frac{I_1}{I_0}$ и $L_{I2} = 10 lg\frac{I_2}{I_0}$, тогда

$\Delta L_I = L_{I2} - L_{I1} = 10\left(lg\frac{I_2}{I_0} - lg\frac{I_1}{I_0}\right) = 10 lg\frac{I_2}{I_1}$ или

$lg\frac{I_2}{I_1} = \frac{\Delta L_I}{10}$. Отсюда $\frac{I_2}{I_1} = 10^{\left(\frac{\Delta L_I}{10}\right)} = 1{,}26$.

13.16 Два звука отличаются по уровню звукового давления $\Delta L_p = 1$ Дб. Найти отношение p_2/p_1 амплитудах звукового давления.

Решение

Уровень звукового давления в децибелах связан с амплитудой звукового давления соотношением $L_p = 20 lg\frac{p}{p_0}$ — (1), где p_0 — амплитуда звукового давления при нулевом уровне громкости. Условно принимается, что $p_0 = 2\times$ $\times 10^{-5}$ Па. Для первого и второго звука из (1) соответственно $L_{p1} = 20\cdot lg\frac{p_1}{p_0}$ и $L_{p2} = 20\cdot lg\frac{p_2}{p_0}$, тогда

$\Delta L_p = L_{p2} - L_{p1} = 20\left(lg\frac{p_2}{p_1} - lg\frac{p_1}{p_0}\right)$; $\Delta L_p = 20 lg\frac{p_2}{p_1}$ или

$lg\frac{p_2}{p_1} = \frac{\Delta L_p}{20}$. Отсюда $\frac{p_2}{p_1} = 10^{\left(\frac{\Delta L_p}{20}\right)} = 1{,}12$.

13.17 Шум на улице с уровнем громкости $L_{I1} = 70$ фон слышен в комнате так, как шум с уровнем громкости $L_{I2} = 40$ фон. Найти отношение I_1/I_2 интенсивностей звуков на улице и комнате.

Решение

Отношение интенсивностей звуков на улице и в комнате (см. задачу 13.15) будет определяться как $\frac{I_2}{I_1} = 10^{\left(\frac{L_{I2} - L_{I1}}{10}\right)}$

или $\frac{I_1}{I_2} = 10^{\left(\frac{L_{I1} - L_{I2}}{10}\right)} = 1000$.

13.18 Интенсивность звука увеличилась в 1000 раз. На сколько увеличилась амплитуда звукового давления?

Решение

Уровень звукового давления (см. задачи 13.15 и 13.16) увеличился на $\Delta L_p = \Delta L_I = 10\,lg\frac{I_2}{I_1} = 30$ Дб. С другой стороны, $\Delta L_p = 20 \cdot lg\frac{p_2}{p_1}$, откуда отношение амплитуд звукового давления $\frac{p_2}{p_1} = 10^{\left(\frac{\Delta L_p}{20}\right)} = 31{,}6$.

13.19 Интенсивность звука I = 10 мВт/м^2. Найти уровень громкости L, и амплитуду p звукового давления.

Решение

Уровень громкости в фонах L_I (см. задачу 13.15) связан с интенсивностью звука соотношением $L_I = 10\,lg\frac{I}{I_0}$, где $I_0 = 10^{-12}$ Вт/м^2, тогда $L_I = 100$ фон. Поскольку $L_I = L_p = 20 \cdot lg\frac{p}{p_0}$, то $lg\frac{p}{p_0} = \frac{L_I}{20}$, значит, $\frac{p}{p_0} = 10^{\left(\frac{L_I}{20}\right)}$, отсюда амплитуда звукового давления $p = p_0 10^{\left(\frac{L_I}{20}\right)}$, где $p_0 = 2 \cdot 10^{-5}$ Па, тогда $p = 2$ Па.

13.20 На сколько увеличился уровень громкости L_1 звука. Если интенсивность звука возросла: а) в 3000 раз; б) в 30000 раз?

Решение

Уровень громкости (см. задачу 13.15) увеличивается на $\Delta L_I = 10 \cdot lg\frac{I_2}{I_1}$. а) Если $\frac{I_2}{I_1} = 3000$, то $\Delta L_I = 34.77$ фон. б) Если $\frac{I_2}{I_1} = 30000$, то $\Delta L_I = 44{,}77$ фон.

13.21 Найти l расстояние между соседними зубцами звуковой бороздки на грамофонной пластинке тона для частоты ν = 435 Гц): а) в начале записи на расстоянии r = 12 см от центра; б) в конце записи на расстоянии r = 4 см от центра. Частота вращения n = 78 мин$^{-1}$.

Решение

Имеем $l = \frac{\omega r}{\nu}$, где $\omega = 2\pi n$ — угловая скорость вращения пластинки, отсюда $l = \frac{2\pi n r}{\nu}$. Подставляя числовые данные, получим: а) $l = 2{,}25$ мм; б) $l = 0{,}75$ мм.

13.22 Найти расстояние l между соседними зубцами звуковой бороздки на граммофонной пластинке для: а) ν = 100 Гц; б)ν = 2000 Гц. Среднее расстояние от центра пластинки r = 10 см. Частота вращения пластинки n = 78 мин$^{-1}$.

Решение

Расстояние между соседними зубцами звуковой бороздки на граммофонной пластинке найдем по формуле $l = \frac{\omega r}{\nu}$, где $\omega = 2\pi n$ — угловая скорость вращения пластинки, отсюда $l = \frac{2\pi n r}{\nu}$. а) Если $\nu_1 = 100$ Гц, то $l_1 = 8{,}15$ мм. б) Если $\nu_1 = 2000$ Гц, то $l_1 = 0{,}41$ мм.

13.23 При образовании стоячей волны в трубке Кундта в воздушном столбе наблюдалось n = 6 пучностей. Какова была длина l_2, воздушного столба, если стальной стержень закреплен а)посередине; б) в конце? Длина стержня l_1 = 1 м. Скорость распространения звука в стали c_1 = 5250 м/с, в воздухе c_2 = 313 м/c.

Решение

При возбуждении колебаний в стальном стержне установится стоячая волна с узлами в точках зажима и пучностями на свободных концах. В стоячей волне воздушного столба расстояние между соседними пучностями равно половине длины возбужденной звуковой волны. Имеем $\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{c_1}{c_2}$ — (1). Длина l_2 воздушного столба на основании сказанного найдется из условия $\frac{n\lambda_{21}}{2} = l_2$ — (2). Из (1) и (2) имеем $l_2 = \frac{n\lambda_1 c_2}{2c_1}$. Тогда: а) $\lambda = 2l_1$, $l_2 = 0{,}392$ м; б) $\lambda = 4l_1$, $l_2 = 0{,}784$ м.

13.24 Какова длина l_1 стеклянного стержня в трубке Кундта, если при закреплении его посередине в воздушном столбе наблюдалось n = 5 пучностей? Длина воздушного столба l_2 = 0,25 м. Модуль Юнга для стекла $E = 6{,}9\cdot10^{10}$ Па; плотность стекла $p = 2{,}5\cdot10^3$ кг/м^3. Скорость распространения звука в воздухе c = 340 м/с.

Решение

Имеем $l_2 = \frac{n\lambda_1 c_2}{2c_1}$ — (1) (см. задачу 13.23). По условию $\lambda_1 = 2l_1$ — (2). Скорость распространения акустических колебаний в стекле $c_1 = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$ — (3). Подставляя (2) и (3) в (1), получаем $l_2 = \frac{2n_1 l c_2}{2\cdot\sqrt{\frac{E}{\rho}}}$, откуда длина стеклянного стержня $l_1 = \frac{l_2}{nc_2}\sqrt{\frac{R}{\rho}} = 0{,}772$ м.

13.25 Для каких наибольших частот применим метод Кудта определения скорости звука, если считать, что наименьше различимое расстояние между пучностями $l \approx 4$ мм? Скорость распространения звука в воздухе $c = 340$ м/с.

Решение

Имеем $l = \frac{\lambda}{2} = \frac{c}{2\nu}$ (см. задачу 13.23), отсюда максимальная частота $\nu = \frac{c}{2l} \approx 43$ кГц.

13.26 Два поезда идут навстречу друг другу со скоростями $v_1 = 72$ км/ч и $v_2 = 54$ км/ч. Первый поезд дает гудок с частотой $\nu = 600$ Гц. Найти частоту ν' колебаний звука, который слышит пассажир второго поезда: а) перед встречей поездов; б) после встречи поездов. Скорость распространения звука в воздухе $c = 340$ м/с.

Решение

По принципу Доплера частота звука, воспринимаемая наблюдателем, определяется формулой $\nu' = \frac{c + u_2}{c - u_1}\nu$ — (1), где ν — частота звука, посылаемая источником звука, u_1 — скорость движения источника звука, u_2 — скорость движения наблюдателя, c — скорость распространения звука. Скорость $u_2 > 0$, если наблюдатель движется по направлению к источнику звука; скорость $u_1 > 0$, если источник движется к наблюдателю. а) Перед встречей поездов $\nu_1' = \frac{c + u_2}{c - u_1}\nu = 666$ Гц. б) После встречи поездов $\nu_2' = \frac{c - u_2}{c + u_1}\nu = 542$ Гц.

13.27 Когда поезд проходит мимо неподвижного наблюдателя частота тона гудка паровоза меняется скачком. Какой процент от истинной частоты тона составляет скачок частоты, если поезд движется со скоростью $c = 60$ км/ч?

Решение

По принципу Доплера частота звука, воспринимаемая наблюдателем, определяется формулой $\nu' = \frac{c + u_2}{c - u_1}\nu$ — (1). Поскольку наблюдатель покоится, то $u_2 = 0$, тогда (см. задачу 13.26) при движении поезда к наблюдателю и от него соответственно имеем из формулы (1) частоты звука $\nu_1' = \frac{c}{c - u}\nu$ — (2) и $\nu_2' = \frac{c}{c + u}\nu$ — (3). Величина скачка частоты $\Delta\nu = \nu_1' - \nu_2'$ — (4). Подставляя (2) и (3) в (4), получаем $\Delta\nu = c\nu\left[\frac{1}{c - u} - \frac{1}{c + u}\right] = 9.8\%$.

13.28 Наблюдатель на берегу моря слышит звук пароходного гудка. Когда наблюдатель и пароход находятся в покое, частота воспринимаемого наблюдателем звука ν = 420 Гц. При движении парохода воспринимаемая частота ν_1 = 430 Гц. если пароход приближается к наблюдателю, и ν_2 = 415 Гц, если пароход удаляется от него. Найти скорость v парохода в первом и втором случаях, если скорость распространения звука в воздухе c = 338 м/с.

Решение

По принципу Доплера частота звука, воспринимаемая наблюдателем, определяется формулой $\nu' = \frac{c+u_2}{c-u_1}\nu$ — (1). Поскольку наблюдатель покоится, то $v_2 = 0$. Если пароход приближается к наблюдателю (см. задачу 13.26), то из формулы (1) имеем $\nu_1' = \frac{c}{c-u}\nu$, откуда скорость парохода $u = c\left[1 - \frac{\nu_1'}{\nu}\right] = 8{,}05$ м/с. Аналогично при удалении парохода от наблюдателя $\nu_2' = \frac{c}{c+u}\nu$, следовательно, $u = c\left[\frac{\nu_2'}{\nu} + 1\right] = 4{,}07$ м/с.

13.29 Ружейная пуля летит со скоростью u = 200 м/с. Во сколько раз изменится частота тона свиста пули для неподвижного наблюдателя, мимо которого пролетает пуля? Скорость распространения звука в воздухе c = 333 м/с.

Решение

Частоты звука при движении пули к неподвижному наблюдателю и от него (см. задачу 13.27) соответственно равны $\nu_1' = \frac{c}{c-u}\nu$ и $\nu_2' = \frac{c}{c+u}\nu$, тогда $\frac{\nu_1'}{\nu_2'} = \frac{c+u}{c-u} = 4$.

13.30 Два поезда идут навстречу друг другу с одинаковой скоростью. Какова должна быть их скорость, чтобы частота свистка одного из них, слышимого на другом, изменялась в 9/8 раза? Скорость распространения звука в воздухе c = 335 м/с.

Решение

По принципу Доплера частота звука, воспринимаемая наблюдателем, определяется формулой $\nu' = \frac{c+u_2}{c-u_1}\nu$ — (1).

По условию $u_1 = u_2 = u$ — (2) и $\frac{\nu'}{\nu} = \frac{c+u}{c-u} = \frac{9}{8}$, отсюда скорость поездов $u = \frac{c}{17} = 19{,}7$ м/с.

13.31 Летучая мышь летит перпендикулярно к стене со скоростью u = 6,0 м/с, издавая ультразвук частотой ν = 45 кГц. Какие две частоты звука ν_1 и ν_2 слышит летучая мышь? Скорость распространения звука в воздухе c = 340 м/с.

Решение

По принципу Доплера частота звука, воспринимаемая наблюдателем, определяется формулой $\nu' = \frac{c+u_2}{c-u_1}\nu$ — (1).

По условию $u_1 = u_2 = u$ — (2) — скорость летучей мыши. Летучая мышь будет слышать прямой звук и отраженный от стены. Для прямого звука из формулы (1) имеем $\nu_1 = \frac{c+u}{c+u}\nu = \nu = 45$ кГц. Аналогично для отраженного звука $\nu_2 = \frac{c+u}{c-u}\nu = 46{,}6$ кГц.

13.32 Какую длину l должна иметь стальная струна радиусом r = 0,05 см, чтобы при силе натяжения F = 0,49 кН она издавала тон частотой ν = 320 Гц?

Решение

Частота основного тона струны определяется формулой $\nu = \frac{1}{2l}\sqrt{\frac{F}{\rho S}}$ — (1), где l — длина струны, F — сила ее натяжения, $S = \pi r^2$ — (2) — площадь ее поперечного сечения, ρ — плотность материала среды. Подставляя (2) в (1), получаем $\nu = \frac{1}{2l}\sqrt{\frac{F}{\rho\pi r^2}}$, откуда длина струны $l = \frac{1}{2\nu}\sqrt{\frac{F}{\rho\pi r^2}} = 0{,}45$ м.

13.33 С какой силой F надо натянуть стальную струной l = 20 см и диаметром d = 0,2 мм, чтобы она издавала (частота ν = 435 Гц)?

Решение

Частота основного тона струны определяется формулой $\nu = \frac{1}{2l}\sqrt{\frac{F}{\rho S}}$ — (1) (см. задачу 13.32), где $S = \frac{\pi d^2}{4}$ — (2).

Тогда, подставляя (2) в (1), получим $\nu = \frac{1}{2l}\sqrt{\frac{4F}{\rho\pi d^2}}$ — (3).

Возведя обе части уравнения (3) в квадрат, имеем $\nu^2 = \frac{1}{4l^2}\frac{4F}{\rho\pi d^2} = \frac{F}{\rho\pi d^2 l^2}$, откуда сила натяжения струны $F = \rho\pi\nu^2 d^2 l^2 = 7{,}32$ Н.

13.34 Зная предел прочности для стали, найти наибольшую, частоту v, на которую можно настроить струну длиной l.

Решение

Частота основного тона струны определяется формулой $\nu = \frac{1}{2l}\sqrt{\frac{F}{\rho S}}$ — (1). По определению предел прочности

$p_{max} = \frac{F_{max}}{S}$, откуда максимальная сила, с которой можно натянуть струну, равна $F_{max} = P_{max}S$ — (2). Подставляя (2) в (1), находим наибольшую частоту, на которую можно настроить струну, $\nu_{max} = \frac{1}{2l}\sqrt{\frac{p_{max}}{\rho}} = 159$ Гц.

13.35 Струна, натянутая с силон F_1 = 147 Н, дает с камертоном частоту биений v_1 = 8 Гц. После того как эту струну натянули с силой F_2 = 156,8 Н, она стала настроена с камертоном в унисон. Найти частоту v_2 колебании камертона.

Решение

Имеем $\frac{\nu_1}{\nu_2} = \sqrt{\frac{F_1}{F_2}} = 0{,}97$; $\nu_б = \nu_2 - \nu_1 = 8$ Гц. Решая эти уравнения совместно, получим $\nu_2 = 252$ Гц.

13.36 Камертон предыдущей задачи дает с другим камертоном частоту биений v = 2 Гц. Найти частоту колебаний второго камертона.

Решение

Частота биений $\nu_б = \nu_2 - \nu_1$ — (1). Из предыдущей задачи частота одного камертона $\nu_2 = 252$ Гц, тогда из формулы (1) получим $\nu_1 = \nu_2 - \nu_б = 250$ Гц. Однако следует обратить внимание, что камертон из предыдущей задачи может быть как вторым, так и первым, т. е. $\nu_1 = 252$ Гц, тогда $\nu_2 = \nu_б + \nu_1 = 254$ Гц.

13.37 Найти частоту v основного тона струны, натянутой с силой F = 6 кН. Длина струны l = 0.8 м, ее масса m = 30 г.

Решение

Частота основного тона струны определяется формулой $\nu = \frac{1}{2l}\sqrt{\frac{F}{\rho S}}$ — (1). Масса струны $m = \rho V$ — (2), где $V = lS$ — (3) — ее объем. Из (2) и (3) имеем $m = \rho lS$, откуда плотность материала струны $\rho = \frac{m}{lS}$ — (4). Подставляя (4) в (1), находим частоту основного тона струны $\nu = \frac{1}{2l}\sqrt{\frac{Fl}{m}} = 250$ Гц.

13.38 Найти частоту ν основного тона: а) открытой трубы; б)закрытой трубы.

Решение

а) В открытой трубе образуется стоячая звуковая волна с пучностями на обоих концах. На длине трубы l может поместиться n полуволн, где $n = 1, 2, 3$ ... т. е. $l = \frac{n\lambda}{2}$ и $\nu = \frac{c}{\lambda} = \frac{nc}{2l}$. Частота основного тона $\nu = \frac{c}{2l}$. б) В закрытой трубе стоячая волна имеет на одном конце узел, а на другом — пучность. В этом случае $l = \frac{n\lambda}{4}$ и $\nu = \frac{c}{\lambda} = \frac{nc}{4l}$. Частота основного тона $\nu = \frac{c}{4l}$.

13.39 Закрытая труба издает основной тон до (частота $\nu_1 = l{\cdot}30{,}5$ Гц). Трубу открыли. Какую частоту ν_2имеет основной тон теперь? Какова длина l трубы? Скорость распространения звука в воздухе v = 340 м/с.

Решение

В закрытой трубе стоячая волна имеет узел на одном конце и пучность на другом. В этом случае $l = \frac{n\lambda_1}{4}$ — (1) и $\nu_1 = \frac{c}{\lambda_1} = \frac{nc}{4l}$ — (2). При $n = 1$ из формулы (2) частота основного тона $\nu_1 = \frac{c}{4l}$, откуда длина трубы $l = \frac{c}{4\nu_1} = 0{,}65$ м. Когда трубу открыли, в ней возникла стоячая волна с пучностями на обоих концах. Тогда $l = \frac{n\lambda_2}{2}$ — (3) и $\nu_2 = \frac{c}{\lambda_2} = \frac{nc}{2l}$ — (4). Приравнивая правые части уравнений (1) и (3), получаем $\lambda_2 = \frac{\lambda_1}{2}$ — (5). Из (2) и (4) следует, что $\frac{\nu_1}{\nu_2} = \frac{\lambda_2}{\lambda_1}$, откуда, с учетом (5), частота основного тона открытой трубы $\nu_2 = 2\nu_1 = 261$ Гц.

§ 14. Электромагнитные колебания н волны

14.1 Колебательный контур состоит из конденсатора емкостью C = 888 пФ и катушки с индуктивностью L = 2 мГн. На какую длину волны λ настроен контур?

Решение

По формуле Томсона период электромагнитных колебаний в контуре $T = 2\pi\sqrt{LC}$ — (1). Длина волны, на которую настроен контур, $\lambda = cT$ — (2). Подставляя (1) в (2), получаем $\lambda = 2\pi c\sqrt{LC} = 2512$ м.

14.2 На какой диапазон длин волн можно настроить колебательный контур, если его индуктивность L = 2 мГн, а емкость может меняться от C_1 = 69 пФ до C_2 = 533 пФ?

Решение

Длина волны, на которую можно настроить контур (см. задачу 14.1), $\lambda = 2\pi c\sqrt{LC}$ — (1). Подставляя в (1) значения емкостей C_1 и C_2, получаем диапазон длин волн от $\lambda_1 = 700$ м до $\lambda_2 = 1946$ м.

14.3 Какую индуктивность L надо включить в колебательный контур, чтобы при емкости C = 2 мкФ получить частоту ν = 1000 Гц?

Решение

По формуле Томсона период электромагнитных колебаний в контуре $T = 2\pi\sqrt{LC}$ — (1), а частота $\nu = \frac{1}{T}$ — (2). Из (1) и (2) следует, что $\nu = \frac{1}{2\pi}\frac{1}{\sqrt{LC}}$ — (3). Возводя обе части уравнения (3) в квадрат, получаем $\nu^2 = \frac{1}{4\pi^2 LC}$, откуда индуктивность контура $L = \frac{1}{4\pi^2\nu^2 C} = 12{,}66$ мГн.

14.4 Катушка с индуктивностью L = 30 мкГн присоединена к плоскому конденсатору с площадью пластин S = 0,01 м^2 и расстоянием между ними d = 0,1 мм. Найти диэлектрическую проницаемость ε среды, заполняющей пространство между пластинами, если контур настроен на длину волны λ = 750 м.

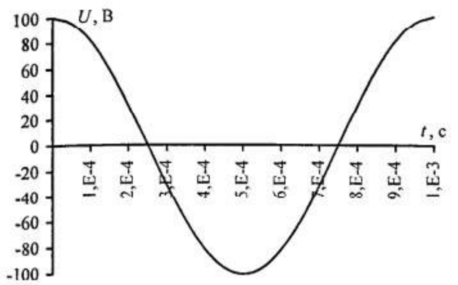
Решение

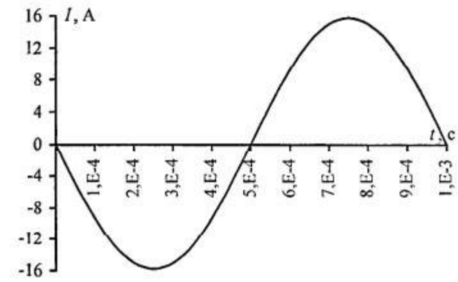
Емкость плоского конденсатора $C = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 S}{d}$ — (1), где ε — диэлектрическая проницаемость среды, S — площадь пластин конденсатора, d — расстояние между ними. Длина волны, на которую настроен контур (см. задачу 14.1), $\lambda = 2\pi c\sqrt{LC}$ — (2). Подставляя (1) в (2), получаем $\lambda = 2\pi c\sqrt{\frac{\varepsilon\varepsilon_0 SL}{d}}$ — (3). Возведя уравнение (3) в квадрат, получим $\lambda^2 = \frac{4\pi^2 c^2 \varepsilon\varepsilon_0 SL}{d}$, откуда диэлектрическая проницаемость среды, заполняющей пространство между пластинами конденсатора, $\varepsilon = \frac{\lambda^2 d}{4\pi^2 c^2 \varepsilon_0 SL} = 5{,}96$.

14.5 Колебательный контур состоит из конденсатора емкостью C = 25 нФ и катушки с индуктивностью L = 1,015 Гн. Обкладки конденсатора имеют заряд q = 2,5 мкКл. Написать уравнение (с числовыми коэффициентами) изменения разности потенциалов U на обкладках конденсатора и тока I в цепи. Найти разность потенциалов на обкладках конденсатора и ток в цепи в моменты времени T/8, T/4 и T/2. Построить графики этих зависимостей в пределах одного периода.

Решение

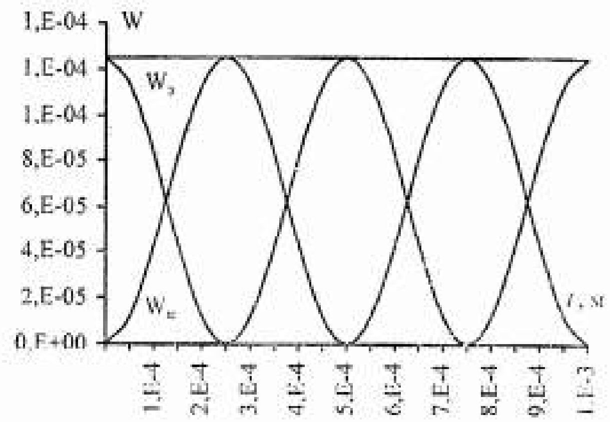
Разность потенциалов на обкладках конденсатора $U = U_0 \cos\omega t$ — (1). Начальное значение разности потенциалов $U_0 = \frac{q}{C}$ — (2), а циклическая частота колебаний $\omega = \frac{2\pi}{T}$ — (3), где $T = 2\pi\sqrt{LC}$ — (4) — период колебаний. Подставляя (4) в (3), находим $\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ — (5). Подставляя (2) и (5) в (1), получим $U = \frac{q}{C}\cos\frac{t}{\sqrt{LC}}$ — (6). Подставляя числовые данные в (6), получим $U = 100\cos\left(2\pi \cdot 10^3 t\right)$. Ток в цепи контура $I = C\frac{dU}{dt} = -CU_0\omega \sin\omega t$ — (7). Подставляя числовые данные в (7) и учитывая (2) и (5), получим $I = -15{,}7\sin\left(2\pi \cdot 10^3 t\right)$. Если $t_1 = \frac{T}{8}$, то $U_1 = 70{,}7$ В и $I_1 = -11{,}1$ мА. Если $t_2 = \frac{T}{4}$, то $U_2 = 0$ В и $I_2 = -15{,}7$ мА. Если $t_3 - \frac{T}{2}$, то $U_3 = -100$ В и $I_3 = 0$. Для заданного интервала значений t построим графики.





14.6 Для колебательного контура предыдущей задачи (14.5) написать уравнение (с числовыми коэффициентами) изменения со временем *t* энергии электрического поля $W_э$, энергии магнитного поля $W_м$ и полной энергии поля *W*. Найти энергию электрического поля, энергию магнитного поля и полную энергию поля в моменты времени *T*/8, *T*/4 и *T*/2. Построить графики этих зависимостей в пределах одного периода.

Решение



Запишем выражение для энергии магнитного и электрических полей катушки $W_м = \frac{LI^2}{2}$ — (1) и конденсатора $W_э = \frac{cU^2}{2}$ — (2). В предыдущей задаче мы нашли: $U = 100\cos(2\pi \cdot 10^3 t)$В — (3); $I = -15{,}7 \cdot 10^{-3}(2\pi \cdot 10^3)$А — (4). Подставляя (3) в (2) и (4) в (1), а также числовые значения индуктивности L и емкости C из предыдущей задачи, получим $W_м = 125 \cdot 10^{-6} \sin^2(2\pi \cdot 10^3 t)$Дж и $W_э = 125 \cdot 10^{-6} \cos^2(2\pi \cdot 10^3 t)$Дж. Полная энергия поля $W = W_м + W_э = 125 \cdot 10^{-6}\left(\sin^2(2\pi \cdot 10^3 t) + \cos^2(2\pi \cdot 10^3 t)\right)$; $W = 125 \cdot 10^{-6}$ Дж. При $t = \frac{T}{8} = \frac{\pi}{4\omega}$ имеем $\omega t = \frac{\pi}{4}$, тогда $W_м = 125 \cdot 10^{-6} \sin^2\frac{\pi}{4} = 62.5 \cdot 10^{-6}$ Дж;

$W_э = 125 \cdot 10^{-6} \cos^2\frac{\pi}{4} = 62.5 \cdot 10^{-6}$ Дж; $W = 125 \cdot 10^{-6}$ Дж. При

$t = \dfrac{T}{4}$ имеем $\omega t = \dfrac{\pi}{2}$, тогда $W_м = 125 \cdot 10^{-6}$ Дж; $W_э = 0$;
$W = 125 \cdot 10^{-6}$ Дж. При $t = \dfrac{T}{2}$ имеем $\omega t = \pi$, тогда $W_м = 0$;
$W_э = 125 \cdot 10^{-6}$ Дж; $W = 125 \cdot 10^{-6}$ Дж.

14.7 Уравнение изменения со временем разности потенциалов на обкладках конденсатора в колебательном контуре имеет вид $U = 50 \cdot \cos 10^4 \pi t$ В. Емкость конденсатора $C = 0{,}1$ мкФ. Найти период T колебаний, индуктивность L контура, закон изменения со временем t тока I в цепи и длину волны λ, соответствующую этому контуру.

Решение

По условию уравнение изменения со временем разности потенциалов $U = 50 \cos 10^4 \pi t$ — (1). Общий вид уравнения $U = U_0 \cos \omega t$ — (2). Сопоставляя (1) и (2), находим $\omega = 10^4 \pi$ и учитывая, что $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$, находим $T = 0{,}2$ мс. Поскольку период колебаний $T = 2\pi\sqrt{LC}$ — (3), то, возведя обе части уравнения (3) в квадрат, находим $T^2 = 4\pi^2 LC$, откуда индуктивность контура $L = \dfrac{T}{4\pi^2 C} = 10{,}13$ мГн. Закон изменения со временем тока в цепи $I = C\dfrac{dU}{dt} = -CU_0\omega \sin \omega t$ — (4). Подставляя в (4) числовые значения, получаем $I = -157 \sin 10^4 \pi t$. Длина волны, соответствующая контуру, $\lambda = cT = 60$ км.

14.8 Уравнение изменения со временем тока в колебательном контуре имеет вид $I = -0.02 \cdot \sin(400\pi t)$ А. Индуктивность контура $L = 1$ Гн. Найти период T колебаний, емкость C контура, максимальную энергию $W_м$ магнитного поля и максимальную энергию $W_{эл}$ электрического поля.

Решение

По условию уравнение изменения тока со временем $I = -0{,}02 \sin 400\pi t$ — (1). Закон изменения со временем тока в цепи (см. задачу 14.7) $I = -CU_0\omega \sin \omega t$ — (2). Сопоставляя (1) и (2), находим период колебаний $T = 5$ мс. С другой стороны, по формуле Томсона $T = 2\pi\sqrt{LC}$ — (3), откуда после возведения (3) в квадрат емкость конденсатора $C = \dfrac{T^2}{4\pi^2 L} = 0{,}63$ мкФ. Ток максимален, когда $\sin 400\pi t = -1$, т. е. $I_{max} = 0{,}02$ А. Тогда максимальная энергия магнитного поля $W_м = \dfrac{LI^2}{2} = 0{,}2$ мДж. Поскольку колебания в контуре не затухают, то по закону сохранения энергии максимальная энергия электрического поля $W_{эл} = W_м = 0{,}2$ мДж.

14.9 Найти отношение энергии $W_м/W_{эл}$ магнитного поля колебательного контура к энергии его электрического поля для момента времени $T/8$.

Решение

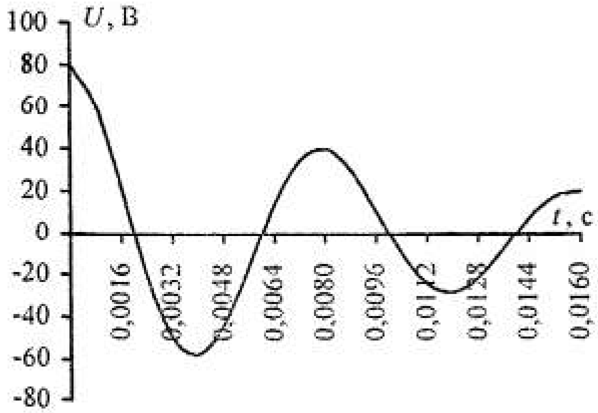
Запишем выражение для энергии магнитного и электрических полей катушки $W_м = \frac{LI^2}{2}$ и конденсатора $W_э = \frac{cU^2}{2}$. Напряжение в колебательном контуре изменяется по следующему закону: $U = U_0 \cos\omega t$, а сила тока в цепи $I = C\frac{dU}{dt}$, где C — электроемкость конденсатора. $I = -CU_0\omega \sin\omega t$. Тогда выражения для $W_м$ и $W_э$ можно записать в виде $W_м = \frac{LC^2U_0\omega^2 \sin^2\omega t}{2}$,

$W_э = \frac{CU_0^2 \cos^2\omega t}{2}$, а их отношение

$\frac{W_м}{W_э} = \frac{LC^2U_0^2\omega^2 \sin^2\omega t \cdot 2}{2CU_0^2 \cos^2\omega t} = LC\omega^2 tg^2\omega t$. Циклическая частота и период колебаний связаны следующим соотношением: $\omega = \frac{2\pi}{T}$. При $t = \frac{T}{8}$, $\omega t = \frac{\pi}{4}$. Кроме того, $\frac{W_м}{W_э} = tg^2\frac{\pi}{4} = 1$.

14.10 Колебательный контур состоит из конденсатора емкостью $C = 7$ мкФ и катушки с индуктивностью $L = 0{,}23$ Гн и сопротивлением $R = 40$ Ом. Обкладки конденсатора имеют заряд $q = 0{,}56$ мКл. Найти период T колебаний контура и логарифмический декремент затухания N колебаний. Написать уравнение изменения со временем t разности потенциалов U на обкладках конденсатора. Найти разность потенциалов в моменты времени, равные: $T/2$, T, $3T/2$ и $2T$. Построить график $U = F(t)$ в пределах двух периодов.

Решение



Период электромагнитных колебаний в контуре, состоящем из емкости C, индуктивности L и сопротивления R, определяется формулой $T = \frac{2\pi}{\sqrt{1/LC - (R/2L)^2}}$ ... ме, Логарифмический декремент затухания $\aleph = \delta T$ — (1), где $\delta = \frac{R}{2L}$ — (2) — коэффициент затухания. Подставляя (2) в (1), находим $\aleph = \frac{RT}{2L} = 0,7$. Разность потенциалов на обкладках конденсатора меняется со временем по закону $U = U_0 e^{-\delta t} \cos \omega t$ — (3), где $\omega = \frac{2\pi}{T} = 250\pi$ — (4), $U_o = \frac{q}{C} = 80$ В — (5). Подставляя (4) и (5) в (3), получаем $U = 80e^{-87.5t} \cos 250\pi t$. Если $t_1 = \frac{T}{2}$, то $U_1 = -56.5$ В. Если $t_2 = T$, то $U_2 = 40$ В. Если $t_3 = \frac{3T}{2}$, то $U_3 = -28$ В. Если $t_4 = 2T$, то $U_4 = 20$ В. Характер зависимости $U = f(t)$ показан на графике.

14.11 Колебательный контур состоит из конденсатора емкостью C = 0,2 мкФ н катушки с индуктивностью L = 5,07 мГн. При каком логарифмическом декременте затухания N разность потенциалов на обкладках конденсатора за время t = 1 мс уменьшится в три раза? Каково при этом сопротивление R контура?

Решение

Период электромагнитных колебаний в контуре равен $T = \frac{2\pi}{\sqrt{1/LC - (R/2L)^2}}$. Предположим, что R достаточно мало, тогда период колебаний найдем по формуле $T = 2\pi\sqrt{LC} = 0,2 \cdot 10^{-3}$ с. Разность потенциалов на обкладках конденсатора изменяется со временем по закону $U = U_0 \exp\left(-\frac{\aleph t}{T}\right)$, откуда $\aleph = \frac{T \ln(U_0/U)}{t}$. Подставляя числовые данные, получим $\aleph = \frac{0.2 \cdot 10^{-3} \ln 3}{10^{-3}} = 0,22$. Логарифмический декремент затухания $\aleph = \delta T = \frac{R}{2L} T$, откуда $R = \frac{2\aleph L}{T} = 11,1$ Ом. Величина $\left(\frac{R}{2L}\right)^2 \approx 10^3$ намного меньше величины $\frac{1}{LC} \approx 10^9$, следовательно, мы действительно могли применять формулу $T = 2\pi\sqrt{LC}$.

14.12 Колебательный контур состоит из конденсатора емкостью $C = 405$ нФ, катушки с индуктивностью $L = 10$ мГн и сопротивления $R = 2$ Ом. Во сколько раз уменьшится разность потенциалов на обкладках конденсатора за один период колебаний.

Решение

Разность потенциалов на обкладках конденсатора меняется со временем по закону $U = U_0 e^{-\delta t} \cos\omega t$, следовательно, за время $t = T$ отношение $\frac{U_0}{U} = e^{\delta t}$ — (1), где $T = \frac{2\pi}{\sqrt{1/LC - (R/2L)^2}}$ — (2) — период электромагнитных колебаний в контуре, $\delta = \frac{R}{2L}$ — (3) — коэффициент затухания. Подставляя (2) и (3) в (1), окончательно получаем $\frac{U_0}{U} = exp\left(\frac{\pi R}{\sqrt{L/C - R^2/4}}\right) = 1{,}02$.

14.13 Колебательный контур состоит из конденсатора емкостью $C = 2{,}22$ нФ и катушки длиной $l = 20$ см из медной проволоки диаметром $d = 0{,}5$ мм. Найти логарифмический декремент затухания N колебаний.

Решение

Пусть D — диаметр катушки, тогда ее площадь поперечного сечения равна $S_к = \frac{\pi D^2}{4}$ — (1). Число витков катушки $N = \frac{l}{d}$ — (2), где l — длина катушки, d — диаметр проволоки. Индуктивность катушки $L = \mu\mu_0 n^2 l S_к$ — (3), где $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м — магнитная постоянная, μ — магнитная проницаемость среды, $n = \frac{N}{l} = \frac{1}{d}$ — (4) — число витков на единицу длины. Подставляя (1) и (4) в (3), получаем $L = \frac{\mu\mu_0 l \pi D^2}{4d^2}$ — (5). Длина одного витка катушки составляет $l_1 = \pi D$, а всей проволоки, намотанной на катушку, $l_{пр} = N l_1 = \frac{\pi D l}{d}$ — (6). Активное сопротивление проволоки $R = \rho \frac{l_{пр}}{S_{пр}}$, где ρ — удельное сопротивление меди, $S_{пр} = \frac{\pi d^2}{4}$ — (8) — площадь поперечного сечения проволоки. Подставляя (6) и (8) в (7), получаем $R = \frac{4\rho D l}{d^3}$ — (9). Логарифмический декремент затухания $\aleph = \delta T$ — (10), где $\delta = \frac{R}{2L}$ — (11) — коэффициент затухания, $T = 2\pi\sqrt{LC}$ — (12) — период электромагнитных колебаний в контуре. Подставляя (5) в (12), находим $T = \frac{\pi D}{d}\sqrt{\mu\mu_0 \pi l C}$ — (14), затем, подставляя (13) и (14) в (10), окончательно получаем $\aleph = \frac{8\rho}{d}\sqrt{\frac{\pi l C}{\mu\mu_0}} = 0{,}018$.

14.14 Колебательный контур имеет емкость C = 1,1 нФ и индуктивность L = 5 мГн. Логарифмический декремент затухания N = 0,005. За какое время вследствие затухания потеряется 99% энергии контура?

Решение

Разность потенциалов на обкладках конденсатора меняется со временем по закону $U = U_0 e^{-\delta t}\cos\omega t$ — (1). Из формулы (1) следует, что $\frac{U_0}{U} = e^{\delta t}$ — (2). По условию $\frac{U_0 - U}{U_0} = 0{,}99$, следовательно, $\frac{U_0}{U} = 100$ — (3). Приравнивая правые части уравнений (2) и (3), получаем $e^{\delta t} = 100$ — (4). Логарифмируя уравнение (4), находим $\delta t = \ln 100$ — (5). Логарифмический декремент затухания $\aleph = \delta T$, откуда $\delta = \frac{\aleph}{T}$ — (6). Подставляя (6) в (5), получаем $\frac{\aleph t}{T} = \ln 100$ или $t = \frac{T\ln 100}{\aleph}$ — (7). По формуле Томсона $T = 2\pi\sqrt{LC}$ — (8). Подставляя (8) в (7), окончательно находим $t = \frac{2\pi\sqrt{LC}\ln 100}{\aleph} = 13{,}6$ м/с.

14.15 Колебательный контур состоит из конденсатора и катушки длиной l = 40 см из медной проволоки, площадь поперечного сечения которой s = 0,1 мм^2. Найти емкость конденсатора С , если, вычисляя период колебаний контура по приближенной, формуле $T = 2\pi(LC)^{1/2}$, мы допускаем ошибку ε = 1%. Указание: учесть, что ошибка $\varepsilon = (T_2 - T_1)/T_2$, где T_1 - период колебаний, найденный по приближенной формуле, а T_2 - период колебаний, найденный по точной формуле.

Решение

Индуктивность катушки (см. задачу 14.13) $L = \frac{\mu\mu_0 l\pi D^2}{4d^2}$ — (1), где D — диаметр катушки, d — диаметр проволоки. Поскольку $S = \frac{\pi d^2}{4}$, то $d^2 = \frac{4S}{\pi}$ — (2) и $d = 2\sqrt{\frac{S}{\pi}}$ (3). Подставляя (2) в (1), получаем $L = \frac{\mu\mu_0 l\pi^2 D^2}{16S}$ — (4). Активное сопротивление проволоки $R = \frac{4\rho Dl}{d^3}$ — (5), где ρ — удельное сопротивление меди. Подставляя (3) в (5), получаем $R = \frac{\rho Dl}{2}\left(\frac{\pi}{S}\right)^{\frac{3}{2}}$ — (6). По формуле Томсона $T_1 = 2\pi\sqrt{LC}$ — (7). Подставляя (4) в (7), получаем $T_1 = \frac{\pi^2 D}{2}\sqrt{\frac{\mu\mu_0 lC}{S}}$ — (8). По точной формуле, с учетом активного сопротивления проволоки, намотанной на катушку, $T_2 = \frac{2\pi}{\sqrt{1/LC - (R/2L)^2}}$ — (9). Подставляя (4) и

(6) в (9), получаем $T_2 = \frac{\pi^2 \mu\mu_0 D}{2}\sqrt{\frac{lC}{S\left(\mu\mu_0 - \rho^2 lC\pi^{-2}\right)}}$ — (10). По условию $\varepsilon = 1 - \frac{T_1}{T_2}$ — (11). Подставляя (8) и (10) в (11), находим $\varepsilon = 1 - \sqrt{1 - \frac{\rho^2 lC\pi}{\mu\mu_0}}$ — (12). Возводя обе части уравнения (12) в квадрат, получаем $\varepsilon^2 - 2\varepsilon + 1 = 1 - \frac{\rho^2 lC\pi}{\mu\mu_0}$, откуда окончательно находим $C = \frac{(2-\varepsilon)\varepsilon\mu\mu_0}{\pi\rho^2 l} = 0{,}68$ мкФ.

14.16 Катушка длиной l = 50 см и площадью поперечного сечения S = 10 см^2 включена в цепь переменного тока частотой ν = 50 Гц. Число витков катушки N = 3000. Найти сопротивление R катушки, если сдвиг фаз между напряжением и током φ = 60°.

Решение

Сдвиг фаз между напряжением и током определяется формулой $tg\varphi = \frac{\omega L - 1/\omega C}{R}$ — (1). Поскольку цепь не содержит конденсатора, то формула (1) примет упрощенный вид $tg\varphi = \frac{\omega L}{R}$ — (2). Циклическая частота колебаний связана с обычной соотношением $\omega = 2\pi\nu$ — (3). Подставляя (3) в (2), получаем $tg\varphi = \frac{2\pi\nu L}{R}$ — (4). Индуктивность катушки $L = \mu\mu_0 n^2 lS$ — (5), где $n = \frac{N}{l}$ — (6) — число витков на единицу длины. Подставляя (6) в (5), получаем $L = \frac{\mu\mu_0 N^2 S}{l}$ — (7), затем, подставляя (7) в (4), находим $tg\varphi = \frac{2\pi\nu\mu\mu_0 N^2 S}{Rl}$, откуда активное сопротивление катушки $R = \frac{2\pi\nu\mu\mu_0 N^2 S}{l\,tg\varphi} = 4{,}1$ Ом.

14.17 Обмотка катушки состоит из N = 500 витков медной проволоки, площадь поперечного сечения которой s = 1 мм^2. Длина катушки l = 50 см, ее диаметр D = 5 см. При какой частоте ν переменного тока полное сопротивление Z катушки вдвое больше ее активного сопротивления R?

Решение

Активное сопротивление катушки (см. задачу 14.15) $R=\frac{\rho Dl}{2}\left(\frac{\pi}{S}\right)^{\frac{3}{2}}$ — (1), а ее полное сопротивление $Z=\sqrt{R^2+\omega^2L^2}$ — (2). Индуктивность катушки (см. задачу 14.16) $L=\frac{\mu\mu_0N^2S_к}{l}$ — (3), где $S_к=\frac{\pi D^2}{4}$ — (4) — площадь поперечного сечения катушки. Подставляя (4) в (3), получаем $L=\frac{\mu\mu_0N^2\pi D^2}{4l}$ — (5). Поскольку $\omega=2\pi\nu$ — (6), то, подставляя (1), (5) и (6) в (2), получаем $Z=\frac{D}{2l}\left(\frac{\pi}{S}\right)^{\frac{3}{2}}\sqrt{\rho^2l^4+\pi\nu^2\mu^2\mu_0^2N^4D^2S^3}$ — (7). По условию $Z=2R$. Подставляя (1) и (7) в (8), получаем $\frac{1}{l}\sqrt{\rho^2l^4+\pi\nu^2\mu^2\mu_0^2N^4D^2S^3}=2\rho l$ — (9). Возведя обе части уравнения (9) в квадрат, имеем $\rho^2l^4+\pi\nu^2\mu^2\mu_0^2\times$ $\times N^4D^2S^3=4\rho^2l^4$, отсюда $\nu^2=\frac{3\rho^2l^4}{\pi\mu^2\mu_0^2N^4D^2S^3}$ или окончательно $\nu=\frac{\rho l^2}{\mu\mu_0N^2D}\sqrt{\frac{3}{\pi S^3}}=265$ Гц.

14.18 Два конденсатора с емкостями C_1 = 0,2 мкФ и C_2 = 0,1 мкФ включены последовательно в цепь переменного тока напряжением U = 220 В и частотой ν = 50 Гц. Найти ток I в цепи и падения потенциала U_{C1} и U_{C2} на первом и втором конденсаторах.

Решение

Емкостное сопротивление конденсатора выражается формулой $x_c = \frac{1}{\omega C}$ — (1), где $\omega = 2\pi\nu$ — (2) — циклическая частота колебаний. Подставляя (2) в (1), найдем сопротивления конденсаторов: $x_{c1} = \frac{1}{2\pi\nu C_1}$ и $x_{c2} = \frac{1}{2\pi\nu C_2}$. Поскольку конденсаторы соединены последовательно, то их общее сопротивление $x_c = x_{c1} + x_{c2} = \frac{C_1 + C_2}{2\pi\nu C_1 C_2}$ — (3).

По закону Ома для переменного тока $I_{эф} = \frac{U_{эф}}{X_c}$ — (4), где $I_{эф} = \frac{I}{\sqrt{2}}$ — (5) и $U_{эф} = \frac{U}{\sqrt{2}}$ — (6) — эффективные значения тока и напряжения. Подставляя (3) в (4), с учетом (5) и (6), находим ток в цепи $I = \frac{2\pi\nu C_1 C_2 U}{C_1 + C_2} = 4{,}6$ мА. Падения потенциала на первом и втором конденсаторах будут соответственно равны $U_1 = IX_{c1} = \frac{C_2 U}{C_1 + C_2} = 73{,}34$ В и $U_2 = IX_{c2} = \frac{C_1 U}{C_1 + C_2} = 146{,}6$ В.

14.19 Катушка длиной l = 25 см и радиусом r = 2 см имеет обмотку из N = 1000 витков медной проволоки, площадь поперечного сечения которой s = 1 мм^2. Катушка включена в цепь переменного тока частотой ν = 50 Гц. Какую часть полного сопротивления Z катушки составляет активное сопротивление R и индуктивное сопротивление X_L?

Решение

Индуктивность катушки выражается формулой $L = \mu\mu_0 \times \times n^2 l S_к$ — (1), где $n = \dfrac{N}{l}$ — (2) — число витков на единицу длины и $S_к = \pi r^2$ — (3) — площадь поперечного сечения катушки. Подставляя (2) и (3) в (1), получаем $L = \dfrac{\mu\mu_0 N^2 \pi r^2}{l}$ — (4). Индуктивное сопротивление катушки выражается формулой $X_L = \omega L$ — (5), где $\omega = 2\pi\nu$ — (6) — циклическая частота колебаний. Подставляя (4) и (6) в (5), получаем $X_L = \dfrac{2\pi^2 \nu\mu\mu_0 N^2 r^2}{l}$ — (7). Активное сопротивление проволоки выражается формулой $R = \rho\dfrac{l_{пр}}{S}$ — (8), где $l_{пр} = 2\pi r N$ — (9) — длина проволоки, намотанной на катушку. Подставляя (9) в (8), получаем $R = \dfrac{2\pi r N\rho}{S}$ — (10). Полное сопротивление цепи $Z = \dfrac{2\pi r N}{Sl}\sqrt{l^2\rho^2 + \pi^2\nu^2\mu^2\mu_0^2 N^2 r^2 S^2}$ — (11). Из формул (7), (10) и (11) следует, что доли активного и емкостного сопротивлений от полного соответственно равны

$$\frac{R}{Z} = \frac{\rho l}{\sqrt{l^2\rho^2 + \pi^2\nu^2\mu^2\mu_0^2 N^2 r^2 S^2}} = 0{,}74 \cdot 100\% = 74\% \text{ и}$$

$$\frac{X_L}{Z} = \frac{\pi\nu\mu\mu_0 N r S}{\sqrt{l^2\rho^2 + \pi^2\nu^2\mu^2\mu_0^2 N^2 r^2 S^2}} = 0{,}68 \cdot 100\% = 68\%.$$

14.20 Конденсатор емкостью C = 20 мкФ и резистор, сопротивление которого R = 150 Ом, включены последовательно в цепь переменного тока частотой ν = 50 Гц. Какую часть напряжения U, приложенного к этой цепи, составляют падения напряжения на конденсаторе U_C и на резисторе U_R?

Решение

Емкостное сопротивление конденсатора (см. задачу 14.18) $X_C = \frac{1}{2\pi\nu C}$ — (1). Полное сопротивление цепи $Z = \sqrt{R^2 + X_C^2}$ — (2). Подставляя (1) в (2), получаем $Z = \sqrt{R^2 + \frac{1}{4\pi^2\nu^2C^2}}$ — (3). По закону Ома для переменного тока $I_{эф} = \frac{U_{эф}}{Z}$ — (4), где $I_{эф} = \frac{I}{\sqrt{2}}$ — (5) и $U_{эф} = \frac{U}{\sqrt{2}}$ — (6) — эффективные значения тока и напряжения. Подставляя (3) и (4), с учетом (5) и (6), находим ток в цепи $I = \frac{U}{\sqrt{R^2 + 1/\left(4\pi^2\nu^2C^2\right)}}$ — (7). Токи через резистор и конденсатор соответственно равны $I_R = \frac{U_R}{R}$ — (8) и $I_C = 2\pi\nu CU_C$ — (9), где U_R и U_C — падения напряжения на резисторе и конденсаторе. Поскольку резистор и конденсатор соединены последовательно, то $I = I_C = I_R$ — (10). Подставляя (7), (8) и (9) в (10), получаем $\frac{U}{\sqrt{R^2 + 1/\left(4\pi^2\nu^2C^2\right)}} = 2\pi\nu CU_C$ и $\frac{U}{\sqrt{R^2 + 1/4\pi^2\nu^2C^2}} = \frac{U_R}{R}$,

откуда $\frac{U_C}{U} = \frac{1}{2\pi\nu C\sqrt{R^2 + 1/\left(4\pi^2\nu^2C^2\right)}} = 0{,}727 \cdot 100\% = 72{,}7\%$

и $\frac{U_R}{U} = \frac{1}{\sqrt{R^2 + 1/\left(4\pi^2\nu^2C^2\right)}} = 0{,}685 \cdot 100\% = 68{,}5\%$.

14.21 Конденсатор и электрическая лампочка соединены последовательно и включены в цепь переменного тока напряжением U = 440 в и частотой ν = 50 Гц. Какую емкость C должен иметь конденсатор для того, чтобы через лампочку протекал ток I = 0,5 А и падение потенциала на ней было равным $U_л$ = 110 В?

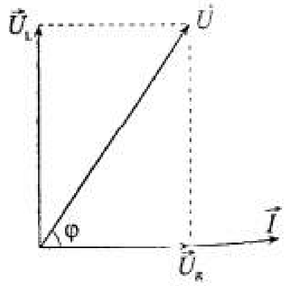
Решение

Ток, протекающий через лампочку (см. задачу 14.20), $I = \frac{U_л}{R_л}$ — (1), где $R_л$ — сопротивление лампочки. С другой стороны, $I = \frac{U}{\sqrt{R_л^2 + 1/(4\pi^2\nu^2C^2)}}$ — (2). Из (1) имеем $R_л = \frac{U_л}{I}$ — (3). Возведя (3) в квадрат и подставляя в (2), получим $I = \frac{U}{\sqrt{U_л^2/I^2 + 1/(4\pi^2\nu^2C^2)}}$, откуда после преобразований находим смкость конденсатора $C = \frac{I}{2\pi\nu\sqrt{U^2 - U_л^2}} = 3{,}74$ мкФ.

14.22 Катушка с активным сопротивлением R = 10 Ом и индуктивностью L включена в цепь переменного тока напряжением U = 127 В и частотой ν = 50 Гц. Найти индуктивность I катушки, если известно, что катушка поглощает мощность P = 400 Вт и сдвиг фаз между напряжением и током φ = 60°.

Решение

Изобразим векторную диаграмму напряжений. Катушка обладает индуктивностью L и активным сопротивлением R. Напряжение на R будет иметь такую же фазу, что и ток I, а напряжение на индуктивности U_L опередит ток на $\frac{\pi}{2}$. Полное напряжение можно изобразить (см. рисунок) векторной суммой $\vec{U} = \vec{U}_R + \vec{U}_L$. Индуктивное сопротивление катушки (см. задачу 14.19) $X_L = 2\pi\nu L$ — (1), а ее полное сопротивление $Z = \sqrt{R^2 + X_L^2}$ — (2). Подставляя (1) в (2), получаем $Z = \sqrt{R^2 + 4\pi^2\nu^2L^2}$ — (3). По закону Ома для переменного тока $I_{эф} = \frac{U_{эф}}{Z}$ — (4), где $I_{эф} = \frac{I}{\sqrt{2}}$ — (5) и $U_{эф} = \frac{U}{\sqrt{2}}$ — (6) — эффективные значения тока и напряжения. Подставляя (3) и (4), с учетом (5) и (6), находим ток в цепи $I = \frac{U}{\sqrt{R^2 + 1/(4\pi^2\nu^2L^2)}}$ — (7). Мощность, поглощаемая катушкой, $P = I_{эф}U_{эф}\cos\varphi$ — (8). Подставляя (7) в (8), получаем $P = \frac{U^2\cos\varphi}{\sqrt{R^2 + 4\pi^2\nu^2L^2}}$, откуда после преобразований находим индуктивность катушки $L = \frac{\sqrt{U^4\cos^2\varphi - P^2R^2}}{2\pi\nu P} = 55$ мГн.



14.23 Найти формулы для полного сопротивления цепи Z и сдвига фаз φ между напряжением и током при различных способах включения сопротивления R, емкости C и индуктивности L. Рассмотреть случаи: *а*) R и C включены последовательно; б) R и C включены параллельно; в) R и L включены последовательно; г) R и L включены параллельно; д) R, A и C включены последовательно.

Решение

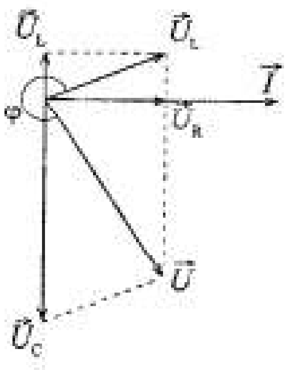
Если цепь содержит сопротивление R, емкость C и индуктивность L, соединенные последовательно, то полное сопротивление цепи равно $Z=\sqrt{R^2+\left(\omega L-\dfrac{1}{\omega C}\right)^2}$ — (1), а сдвиг фаз между напряжением и током определяется формулой $tg\varphi=\dfrac{\omega L-1/\omega C}{R}$ — (2).

а) Если R и C включены последовательно, то $L=0$, следовательно, формулы (1) и (2) примут вид $Z=\sqrt{R^2+\left(\dfrac{1}{\omega C}\right)^2}$ и $tg\varphi=\dfrac{1}{\omega C R}$.

б) Если R и C включены параллельно, то $L=0$. Тогда $\dfrac{1}{Z}=\sqrt{\dfrac{1}{R^2}+(\omega C)^2}$, откуда $Z=\dfrac{R}{\sqrt{1+R^2\omega^2C^2}}$ и $tg\varphi=-\omega CR$.

в) Если R и L включены последовательно, то $C=0$, следовательно, формулы (1) и (2) примут вид $Z=\sqrt{R^2+(\omega L)^2}$ и $tg\varphi=\dfrac{\omega L}{R}$.

г) Если R и L включены параллельно, то $C=0$. Тогда $\dfrac{1}{Z}=\sqrt{\dfrac{1}{R^2}+\left(\dfrac{1}{\omega L}\right)^2}$, откуда $Z=\dfrac{R\omega L}{\sqrt{1+(\omega L)^2}}$ и $tg\varphi=\dfrac{R}{\omega L}$.



д) Если R, L и C включены последовательно, то формулы для Z и $tg\varphi$ будут иметь начальный вид (1) и (2). В качестве примера построим векторную диаграмму для данного случая. Векторы $\vec U_R$ и $\vec I$ будут параллельны, вектор $\vec U_L$ повернут на $\dfrac{\pi}{2}$ против часовой стрелки, а $\vec U_C$ — по часовой стрелке относительно $\vec I$ (см. рисунок).

14.24 Конденсатор емкостью C = 1 мкФ и резистор сопротивлением R = 3 кОм включены в цепь переменного тока частотой ν = 50 Гц. Найти полное сопротивление Z цепи, если конденсатор и резистор включены: а) последовательно; б) параллельно.

Решение

а) Если конденсатор и резистор включены в цепь последовательно, то полное сопротивление цепи (см. задачу 14.23) равно $Z=\sqrt{R^2+\left(\frac{1}{\omega C}\right)^2}$ — (1), где $\omega=2\pi\nu$ — (2) — циклическая частота колебаний. Подставляя (2) в (1), получим $Z=\sqrt{R^2+\frac{1}{4\pi^2\nu^2C^2}}=4{,}37$ кОм. б) Если конденсатор и резистор включены в цепь параллельно, тогда $Z=\frac{R}{\sqrt{1+R^2\omega^2C^2}}$ — (3). Подставляя (2) в (3), получим $Z=\frac{R}{\sqrt{1+4\pi^2\nu^2C^2R^2}}=2{,}18$ кОм.

14.25 В цепь переменного тока напряжением U = 220 В и частотой ν = 50 Гц включены последовательно емкость C = 35,4 мкФ, сопротивление R = 100 Ом и индуктивность L = 0,7 Гн. Найти ток I в цепи и падения напряжения U_C, U_R и U_L на емкости, сопротивлении и индуктивности.

Решение

По закону Ома для переменного тока $I_{эф}=\frac{U_{эф}}{Z}$ — (1), где $Z=\sqrt{R^2+\left(\omega L-\frac{1}{\omega C}\right)^2}$ — (2) — полное сопротивление цепи, $I_{эф}=\frac{I}{\sqrt{2}}$ — (3) и $U_{эф}=\frac{U}{\sqrt{2}}$ — (4) — эффективные значения тока и напряжения. Подставляя (2) в (1), с учетом (3) и (4), и учитывая, что $\omega=2\pi\nu$ — циклическая частота колебаний, находим ток в цепи $I=\frac{U}{\sqrt{R^2+(2\pi\nu L-1/2\pi\nu C)^2}}=1{,}34$ А. Падение напряжения на емкости равно $U_C=IX_C=\frac{I}{2\pi\nu C}=120{,}49$ В. Падение напряжения на резисторе $U_R=IR=134$ В. Падение напряжения на индуктивности равно $U_L=IX_L=2\pi\nu LI=294{,}68$ В.

14.26 Индуктивность L = 22,6 мГн и сопротивление R включены параллельно в цепь переменного тока частотой ν = 50 Гц. Найти сопротивление R , если известно, что сдвиг фаз между напряжением и током $\varphi = 60°$.

Решение

Если индуктивность и сопротивление включены параллельно в цепь переменного тока, то сдвиг фаз между напряжением и током (см. задачу 14.23) определяется формулой $tg\varphi = \frac{R}{\omega L}$ — (1), где $\omega = 2\pi\nu$ — (2) — циклическая частота колебаний. Подставляя (2) в (1), получаем $tg\varphi = \frac{R}{2\pi\nu L}$, откуда сопротивление $R = 2\pi\nu L tg\varphi = 12{,}3$ Ом.

14.27 Активное сопротивление R и индуктивность L соединены параллельно и включены в цепь переменного тока напряжением U = 127 В и частотой ν = 50 Гц. Найти сопротивление R и индуктивность L, если известно, что цепь поглощает мощность P = 404 Вт и сдвиг фаз между напряжением и током $\varphi = 60°$.

Решение

Если активное сопротивление и индуктивность включены параллельно в цепь переменного тока, то полное сопротивление цепи (см. задачу 14.23) определяется формулой $Z = \frac{R\omega L}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}}$ — (1), где $\omega = 2\pi\nu$ — (2) — циклическая частота колебаний, а сдвиг фаз между напряжением и током (см. задачу 14.26) равен $tg\varphi = \frac{R}{2\pi\nu L}$ — (3). Подставляя (2) в (1), получаем $Z = \frac{2\pi\nu RL}{\sqrt{R^2 + (2\pi\nu L)^2}}$ — (4). По закону Ома для переменного тока $I_{эф} = \frac{U_{эф}}{Z}$ — (5), где $I_{эф} = \frac{I}{\sqrt{2}}$ — (6) и $U_{эф} = \frac{U}{\sqrt{2}}$ — (7) — эффективные значения тока и напряжения. Подставляя (4) в (5), с учетом (6) и (7), получим $I = \frac{U\sqrt{R^2 + (2\pi\nu L)^2}}{2\pi\nu RL}$ — (8), а мощность переменного тока $P = I_{эф}U_{эф} \cos\varphi$ — (9). Подставляя (8) в (9), получаем $P = \frac{U^2\sqrt{R^2 + (2\pi\nu L)^2}}{4\pi\nu RL}$ — (10). Решая совместно (3), (4) и (10), находим $R = \frac{U^2\sqrt{tg^2\varphi + 1}}{2P} = 40$ Ом и

$$L = \frac{U^2\sqrt{tg^2\varphi + 1}}{4\pi\nu P tg\varphi} = 74 \text{ мГн}.$$

14.28 В цепь переменного тока напряжением U = 220 В включены последовательно емкость C, сопротивление R и индуктивность L. Найти падение напряжения U_R на сопротивлении, если известно, что падение напряжения на конденсаторе $U_C = 2U_R$, на индуктивности $U_L = 3U_R$.

Решение

Если емкость сопротивление и индуктивность включены в цепь переменного тока последовательно, то $U = \frac{U_R}{\sqrt{2}} + \frac{U_L}{\sqrt{2}} - \frac{U_C}{\sqrt{2}}$ — (1), где U_R, U_L и U_C, — падения напряжения на сопротивлении, индуктивности и емкости. По условию $U_C = 2U_R$ — (2) и $U_L = 3U_R$ — (3). Подставляя (2) и (3) в (1), получим $U - \frac{2U_R}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}U_R$, откуда падение напряжения на сопротивлении $U_R = \frac{U}{\sqrt{2}} = 155{,}56$ В.

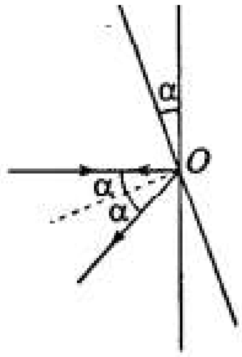
Глава V. Оптика

§ 15. Геометрическая оптика и фотометрия

15.1 Горизонтальные луч света падает на вертикально распложенное зеркало. Зеркало поворачивается на угол α около вертикально оси. На какой угол θ повернется отраженный луч?

Решение

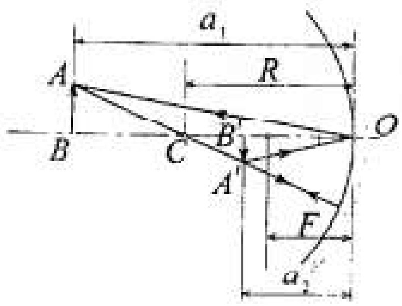
При повороте зеркала на угол α перпендикуляр к зеркалу, восстановленный в точке O падения луча, также повернется на угол α, поэтому угол падения тоже будет равен α, а угол между падающим и отраженным лучами равен 2α.



15.2 Радиус кривизны вогнутого зеркала R = 20 см. На расстоянии a_1 = 30 см от зеркала поставлен предмет высотой y_1 = 1 см. Найти положение и высоту y_2 изображения. Дать чертеж.

Решение

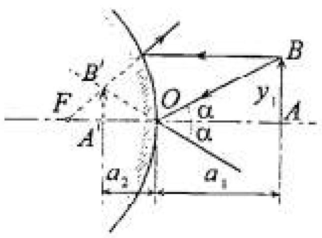
Фокусное расстояние зеркала $F = \frac{R}{2} = 10$ см. Подставим значения a_1 и F в формулу вогнутого зеркала: $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} = \frac{1}{F}$; отсюда $a_2 = \frac{Fa_1}{a_1 - F} = 15$ см. Т. к. стержень



расположен за центром зеркала, то его изображение действительное ($f > 0$), обратное, уменьшенное. Увеличение $k = \frac{a_2}{a_1} = 0{,}5$. Следовательно, высота изображения $y_2 = ky_1 = 0{,}5$ см.

15.3 На каком расстоянии a_2 от зеркала получится изображение предмета в выпуклом зеркале с радиусом кривизны $R = 40$ см, если предмет помещен на расстоянии $a_1 = 30$ см от зеркала? Какова будет высота y_2 изображения, если предмет имеет высоту $y_1 = 2$ см? Проверить вычисления, сделав чертеж на миллиметровой бумаге.

Решение



Изображение $A'B'$ предмета AB мнимое, прямое, уменьшенное. Фокусное расстояние зеркала $F = -\frac{R}{2} = -20$ см. Используя формулу зеркала, имеем $\frac{1}{a_2} = \frac{1}{F} - \frac{1}{a_1} = -\frac{1}{12}$, откуда $a_2 = -12$ см. Увеличение $k = \frac{|a_2|}{a_1} = 0.4$. Высота изображения $y_2 = ky_1 = 0.8$ см.

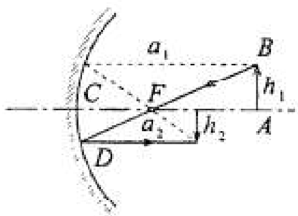
15.4 Выпуклое зеркало имеет радиус кривизны $R = 60$ см. На расстоянии $a_1 = 10$ см от зеркала поставлен предмет высотой $y_1 = 2$ см. Найти положение и высоту y_2 изображения. Дать чертеж.

Решение

Изображение мнимое, прямое, уменьшенное (см. рисунок к задаче 15.3). Фокусное расстояние зеркала $F = -\frac{R}{2} = -30$ см. Используя формулу зеркала, имеем $\frac{1}{a_2} = \frac{1}{F} - \frac{1}{a_1}$, откуда $a_2 = -7{,}5$ см. Увеличение $k = \frac{|a_2|}{a_1} = 0{,}75$. Высота изображения $y_2 = ky_1 = 1.5$ см.

15.5 В вогнутом зеркале с радиусом кривизны $R = 40$ см хотят получить действительное изображение, высота которого вдвое меньше высоты самого предмета. Где нужно поставить предмет и где получится изображение?

Решение



Из подобия треугольников ABF и CDF следует, что $\frac{h_2}{h_1} = \frac{F}{a_1 - F}$ — (1). По формуле вогнутого зеркала имеем $\frac{1}{F} = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2}$ — (2), откуда $a_2 = \frac{a_1 F}{a_1 - F}$ — (3). Из сравнения соотношений (1) и (2) получаем $\frac{h_1}{h_2} = \frac{a_1}{a_2}$. По условию $\frac{h_1}{h_2} = 2$, следовательно, $\frac{a_1}{a_2} = 2$ или $a_1 = 2a_2$ — (4). Фокусное расстояние зеркала $F = \frac{R}{2} = 20$ см. Из (2) найдем $F = \frac{a_1 a_2}{a_1 + a_2}$, подставляя (4), получим $F = a_2$, следовательно, $a_1 = 2F = R$. Таким образом, предмет нужно поместить в центр кривизны зеркала, а его изображение получится в фокусе.

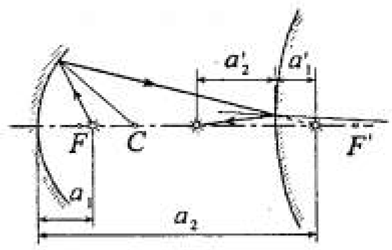
15.6 Высота изображения предмета в вогнутом зеркале вдвое больше высоты самого предмета. Расстояние между предметом и изображением $a_1 + a_2 = 15$ см. Найти фокусное расстояние F и оптическую силу D зеркала.

Решение

Имеем $\frac{h_2}{h_1} = 2$, следовательно, $\frac{a_2}{a_1} = 2$ (см. задачу 15.5). По условию $a_1 + a_2 = 15$ см. Т. к. $a_2 = 2a_1$, то $a_1 + 2a_1 = 15$ см; $a_1 = 5$ см; $a_2 = 10$ см. Изображение получится прямое, мнимое и увеличенное, если предмет находится между зеркалом и фокусом. Тогда по формуле зеркала $\frac{1}{F} = \frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_2}$, откуда фокусное расстояние $F = \frac{a_1 a_2}{a_2 - a_1} = 10$ см. Оптическая сила зеркала $D = \frac{1}{F} = 10$ дптр.

15.7 Перед вогнутым зеркалом на главной оптической оси перпендикулярно к ней на расстоянии $a_1 = 4F/3$ от зеркала поставлена горящая свеча. Изображение свечи в вогнутом зеркале попадает на выпуклое зеркало с фокусным расстоянием $F' = 2F$. Расстояние между зеркалами $d = 3F$, их оси совпадают. Изображение свечи в первом зеркале играет роль мнимого предмета по отношению ко второму зеркалу и дает действительное изображение, расположенное между обоими зеркалами. Построить это изображение и найти общее линейное увеличение k системы.

Решение



Имеем $\frac{1}{F} = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2}$ — (1); $\frac{1}{2F} = \frac{1}{a'_1} - \frac{1}{a'_2}$ — (2); по условию $a_2 - a'_1 = 3F$ — (3). Увеличение вогнутого зеркала $k_1 = \frac{a_2}{a_1}$, увеличение выпуклого зеркала $k_2 = \frac{a'_2}{a'_1}$, общее увеличение системы $k = k_1 k_2 = \frac{a_2 a'_2}{a_1 a'_1}$ — (4). По условию $a_1 = \frac{4F}{3}$, тогда из (1) найдем $a_2 = 4F$. Подставляя значение a_2 в (3), получим $4F - a'_1 = 3F$, откуда $a'_1 = F$. Тогда из (2) найдем $a'_2 = 2F$. Подставляя значения a_1, a_2, a'_1 и a'_2 в (4), найдем $k = \frac{4F \cdot 2F \cdot 3}{4F \cdot F} = 6$.

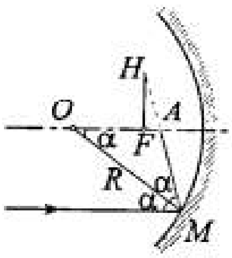
15.8 Где будет находиться и какой размер y_2 будет иметь изображение Солнца, получаемое в рефлекторе, радиус кривизны которого $R = 16$ м?

Решение

Диаметр Солнца $y_1 = 1{,}4 \cdot 10^9$ м, расстояние от Земли до Солнца $a_1 = 1{,}5 \cdot 10^{11}$ м. Имеем $\frac{y_2}{y_1} = \frac{a_2}{a_1}$ — (1), где a_2 — расстояние от рефлектора до изображения Солнца (см. задачу 15.5). По формуле зеркала $\frac{2}{R} = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2}$, откуда $a_2 = \frac{Ra_1}{2a_1 - R} \approx 8$ м, т. е. изображение будет находиться в фокусе. Это следует также из того, что расстояние до Солнца очень велико и его лучи можно считать параллельными, следовательно, они дадут изображение в фокусе. Из (1) найдем $y_2 = y_1 a_2 / a_1 = 7{,}5$ см.

15.9 Если на зеркало падает пучок света, ширина которого определяется углом α, то луч, идущий параллельно главной оптической оси и падающий на край зеркала, после отражения от него, пересечет оптическую ось уже не в фокусе, а на некотором расстояния AF от фокуса. Расстояние $x = AF$ называется продольной сферической аберрацией, расстояние $y = FH$ — поперечной сферической аберрацией. Вывести формулы, связывающие эта аберрации с углом α и радиусом кривизны зеркала R.

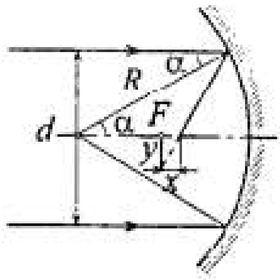
Решение



Из равнобедренного треугольника OAM имеем $OA = \frac{R}{2}\cos\alpha$. Продольная сферическая аберрация $x = AF = OA - \frac{R}{2}$, или $x = \frac{R}{2}\left(\frac{1}{\cos\alpha} - 1\right)$. При $\alpha = 0$ имеем $\cos\alpha = 1$, следовательно, $x = 0$. Поперечная сферическая аберрация $y = FH = x tg\angle HAF$. Но $\angle HAF = 2\alpha$, как внешний угол треугольника AOM, отсюда $y = \frac{R}{2} \times \left(\frac{1}{\cos\alpha} - 1\right) tg2\alpha$. При $\alpha = 0$ имеем $\cos\alpha = 1$, следовательно, $tg2\alpha = 0$ и $y = 0$.

15.10 Вогнутое зеркало с диаметром отверстия d = 40 см имеет радиус кривизны R = 60 см. Найти продольную x и поперечную y сферическую аберрацию краевых лучей, параллельных главной оптической оси.

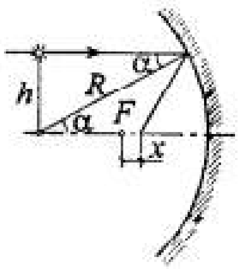
Решение



Из задачи 15.9 имеем $x = \frac{R}{2}\left(\frac{1}{\cos\alpha} - 1\right)$ — (1); $y = \frac{R}{2}\left(\frac{1}{\cos\alpha} - 1\right)tg2\alpha$ — (2). Из рисунка видно, что $\sin\alpha \approx \frac{d/2}{R} \approx 0{,}33$, отсюда $\alpha \approx 19.3°$; $\cos\alpha \approx 0{,}94$; $tg2\alpha \approx 0{,}8$. Подставляя числовые данные, получим $x = 1{,}8$ см; $y = 1{,}44$ см.

15.11 Имеется вогнутое зеркало с фокусным расстоянием F = 20 см. На каком наибольшем расстоянии h от главной оптической оси должен находиться предмет, чтобы продольная сферическая аберрация x составляла не больше 2% фокусного расстояния F?

Решение

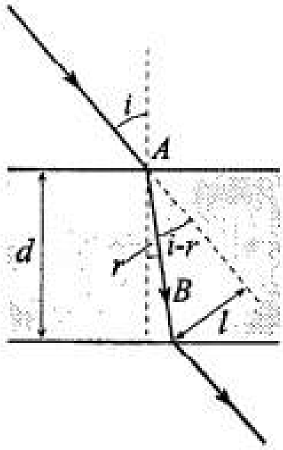


Имеем $x = F\left(\frac{1}{\cos\alpha} - 1\right)$ — (1) (см. задачу 15.9). Из рисунка видно, что $h = R\sin\alpha$ или $\sin\alpha = \frac{h}{R} = \frac{h}{2F}$ — (2). Из основного тригонометрического тождества имеем $\cos\alpha = \sqrt{1 - \sin^2\alpha}$ или, с учетом (2), $\cos\alpha = \sqrt{1 - h^2/4F^2}$ — (3). Подставляя (3) в (1) и учитывая, что $x = 0{,}02F$, получим $0{,}02F = F\left(\frac{1}{\sqrt{1 - h^2/(4F^2)}} - 1\right)$;

$\frac{1}{\sqrt{1 - h^2/(4F^2)}} = 1{,}02$; $\frac{h^2}{4F^2} = 0{,}04$; $h = 2F \cdot 0{,}2 = 0{,}08$ м.

15.12 Луч света падает под углом $I = 30°$ на плоскопараллельную стеклянную пластинку и выходит из нее параллельно первоначальному лучу. Показатель преломления стекла $\pi = 1{,}5$. Какова толщина d пластинки, если расстояние между лучами $l = 1{,}94$ см?

Решение



Смещение луча $l = AB\sin(i-r)$, где r — угол преломления луча в стекле. Толщина пластинки d связана со смещением луча следующим соотношением: $d = AB\cos r = \dfrac{l\cos r}{\sin i\cos r - \cos i\sin r}$.

Согласно закону преломления $\sin r = \dfrac{\sin i}{n}$, т. е. $\cos r = \sqrt{1 - \dfrac{\sin^2 i}{n^2}}$,

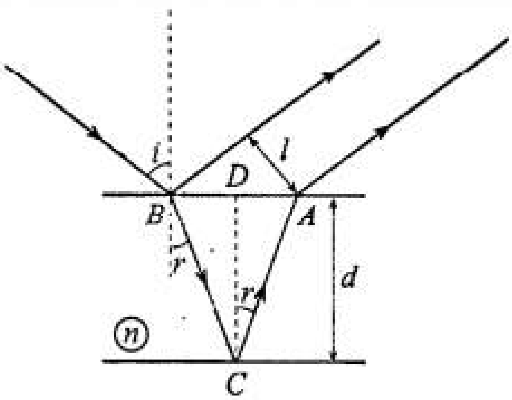
поэтому $d = \dfrac{l\sqrt{n^2 - \sin^2 i}}{\sin i\left(\sqrt{n^2 - \sin^2 i - \cos i}\right)}$.

Подставляя числовые данные, получим $d = 0{,}1$ м.

15.13 На плоскопараллельную стеклянную пластинку толщиной $d = 1$ см падает луч света под углом $i = 60°$. Показатель преломления стекла $n = 1{,}73$. Часть света отражается, а часть, преломляясь, проходит в стекло, отражается от нижней поверхности пластинки и, преломляясь вторично, выходит обратно в воздух параллельно первому отраженному лучу. Найти расстояние l между лучами.

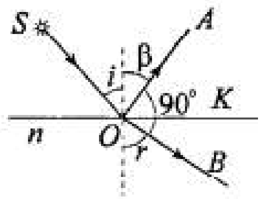
Решение

Согласно закону преломления $\sin r = \dfrac{\sin i}{n} = 0{,}5$, следовательно, угол преломления $r = 30°$. Из ΔADC найдем $AD = d\cdot tgr$, тогда $AB = 2d\cdot tgr$, а $l = AB\sin(90° - i) = 2d\cdot tgr\sin 30°$. Подставляя числовые данные, получим $l = 0{,}58$ см.



15.14 Луч света падает под углом *i* на тело с показателем преломления *n*. Как должны быть связаны между собой величины *i* и *n*, чтобы отраженный луч был перпендикулярен к преломленному?

Решение



Согласно закону преломления $\frac{\sin i}{\sin r} = \frac{1}{n}$ — (1). Из рисунка видно, что $\angle KOB = \beta$, $\angle KOA = r$ (как углы с соответственно перпендикулярными сторонами). Поскольку по закону отражения $\beta = i$, а $\angle KOB + \angle KOA = 90°$ (по условию), то $i + r = 90°$. Совместное решение (1) и (2) дает $\frac{\sin i}{\sin r} = \frac{\sin i}{\sin(90° - i)} = \frac{\sin i}{\cos i} = tgi = n$.

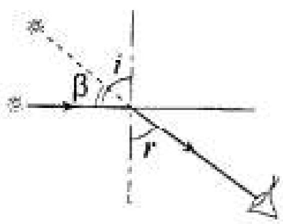
15.15 Показатель преломления стекла n =1,52. Найти предельный угол полного внутреннего отражения β для поверхности раздела: а) стекло – воздух; б) вода – воздух; в) стекло – вода.

Решение

Полное внутреннее отражение происходит, если значение преломленного угла $r \geq 90°$. При $r = 90°$ из закона преломления имеем $\sin\beta = \frac{n_2}{n_1}$. Подставляя значение n_1 и n_2 для различных поверхностей раздела, найдем: а) $\sin\beta = \frac{1}{1{,}52} = 0{,}65$; $\beta \approx 41°$; б) $\sin\beta = \frac{1}{1{,}33} = 0{,}75$; $\beta \approx 49°$; в) $\sin\beta = \frac{1{,}33}{1{,}52} = \frac{1{,}33}{1{,}52} = 0{,}88$; $\beta \approx 61°$.

15.16 В каком направлении пловец, нырнувший в воду, видит заходящее Солнце?

Решение



Угол падения солнечных лучей $i = 90°$. Из закона преломления имеем $\frac{\sin i}{\sin r} = n$ или $\frac{1}{\sin r} = n$, откуда $\sin r = \frac{1}{n} = 0{,}75$; $r \approx 49°$. Следовательно, пловец видит Солнце под углом $\beta = i - r = 41°$ к поверхности воды.

15.17 Луч света выходит из скипидара в воздух. Предельный угол полного внутреннего отражения для этого луча $\beta = 42°23'$. Найти скорость v_1 распространения света в скипидаре.

Решение

Физический смысл абсолютного показателя преломления заключается в том, что он показывает, во сколько раз скорость света в вакууме больше скорости света в данном веществе. Тогда скорости распространения света в скипидаре и в воздухе связаны с соответствующими показателями преломления соотношением $\frac{n_1}{n_2} = \frac{v_2}{v_1}$ — (1).

Поскольку $n_2 = 1$, а $v_2 = c$, то из (1) $n_1 = \frac{c}{v_1}$ — (2), где $c = 3 \cdot 10^8$ м/с — скорость света в воздухе. Значение n_1 найдем из соотношения $\sin\beta = \frac{n_2}{n_1} = \frac{1}{n_1}$, откуда $n_1 = \frac{1}{\sin\beta}$.

Тогда из (2) найдем $v_1 = \frac{c}{n_1} = c\sin\beta$. Подставляя числовые данные, получим $v_1 = 2{,}02 \cdot 10^8$ м/с.

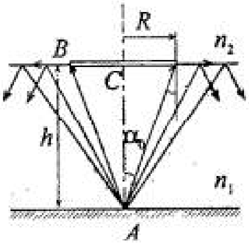
15.18 На стакан, наполненный водой, положена стеклянная пластинка. Под каким углом i должен падать на пластинку луч света, чтобы от поверхности раздела вода – стекло произошло полное внутреннее отражение? Показатель преломления стекла $n_1 = 1{,}5$.

Решение

По закону преломления $\frac{\sin i}{\sin\beta} = n$. Если $\sin\beta = \frac{n_1}{n}$, где n_1 — показатель преломления воды, то произойдет полное внутреннее отражение от поверхности раздела стекло — вода. Тогда $\sin i = n\sin\beta = n_1 = 1{,}33$, т. е. условия задачи неосуществимы.

15.19 На дно сосуда, наполненного водой до высоты h = 10 см, помещен точечный источник света. На поверхности воды плавает круглая непрозрачная пластинка так, что ее центр находится над источником света. Какой наименьший радиус r должна иметь эта пластинка, чтобы ни один луч не мог выйти через поверхность воды?

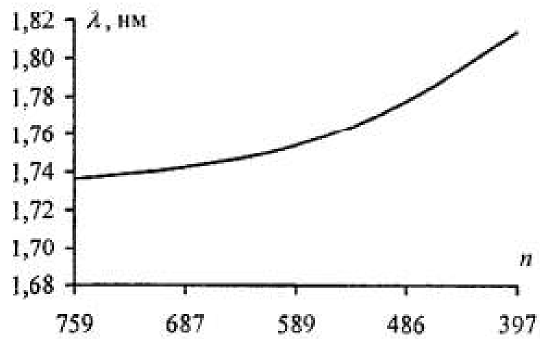
Решение



Лучи, идущие из светящейся точки A, падают на границу раздела вода — воздух расходящимся пучком. Те лучи, которые падают на границу раздела под углом, большим предельного α_0, отразятся в воду, испытывая полное отражение, а в воздух выйдут лишь лучи, заключенные внутри конуса радиусом r и вершиной в точке A. Для лучей, идущих из воды в воздух под предельным углом, можно записать: $\sin\alpha_0 = \frac{n_2}{n_1}$ — (1), где n_1 и n_2 — показатели преломления воды и воздуха соответственно. Из ΔABC $r = h\,tg\,\alpha_0$ — (2). Решая совместно (1) и (2) относительно радиуса пластинки, получим: $r = \frac{hn_2}{\sqrt{n_1^2 - n_2^2}}$. Полагая, что показатели преломления воздуха и воды соответственно $n_1 = \frac{4}{3}$ и $n_2 = 1$, находим: $r = \frac{3}{\sqrt{7}}h = 11{,}3$ см.

15.20 При падении белого света под углом i = 45° на стеклянную пластинку углы преломления β лучей различных длин волн получились следующие значения, указанные в таблице. Построить график зависимости показателя преломления n материала пластинки от длины волны λ.

Решение



Имеем $\frac{\sin i}{\sin\beta} = n$. Т. к. $\sin i = \frac{\sqrt{2}}{2}$, то $n = \frac{\sqrt{2}}{2\sin\beta}$. Подставляя числовые данные, дополним таблицу значениями n и построим график зависимости $n = f(\lambda)$.

λ, нм	759	687	589	486	397
β	24°2′	23°57′	23°47′	23°27′	22°57′
N	1,74	1,74	1,75	1,78	1,81

15.21 Показатели преломления некоторого сорта стекла для красного и фиолетового лучей равны $n_{кр}$ = 1,51 и $n_ф$ = 1,53. Найти предельные углы полного внутреннего отражения $\beta_{кр}$ и $\beta_ф$ при падении этих лучей на поверхность раздела стекло - воздух.

Решение

Имеем $sin\,\beta = \frac{1}{n}$ (см. задачу 15.15). Отсюда $sin\,\beta_{кр} = \frac{1}{n_{кр}} = 0{,}66$; $\beta_{кр} = 41{,}5°$; $sin\,\beta_ф = \frac{1}{n_ф} = 0{,}65$; $\beta_ф = 40{,}8°$.

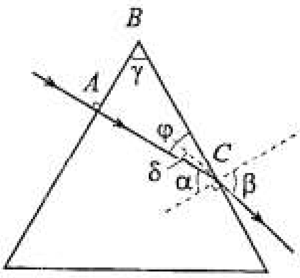
15.22 Что произойдет при падении белого луча под углом i = 41° на поверхность раздела стекло - воздух, если взять стекло предыдущей задачи? (Воспользоваться результатами решения предыдущей задачи.) Текст предыдущей задачи: Показатели преломления некоторого сорта стекла для красного и фиолетового лучей равны $n_{кр}$ = 1,51 и $n_ф$ = 1,53. Найти предельные углы полного внутреннего отражения $\beta_{кр}$ и $\beta_ф$ при падении этих лучей на поверхность раздела стекло – воздух.

Решение

Поскольку полное внутреннее отражение происходит при значениях угла падения $i > \beta$ (предельного угла полного отражения), то фиолетовые лучи испытают полное внутреннее отражение, а красные лучи выйдут из стекла в воздух.

15.23 Монохроматический луч падает нормально на боковую поверхность призмы, преломляющий угол которой γ = 40°. Показатель преломления материала призмы для этого луча n = 1,5. Найти угол отклонения d луча, выходящего из призмы, от первоначального направления.

Решение



Т. к. луч падает по нормали, то на первой поверхности он не испытывает преломления. Обозначим через α и β углы падения и преломления на второй поверхности. δ — угол между входящим лучом и продолжением луча, выходящего из призмы. Угол $\varphi = \delta + (90° - \beta)$ — (1). Из ΔABC: $90° + \gamma + \varphi = 180°$; $\gamma + \varphi = 90°$ — (2). Подставим (2) в (1): $\gamma + \varphi + 90° - \beta = 90°$. Отсюда $\delta = \beta - \gamma$ — (3). Угол $\alpha = 90° - \varphi$. Из уравнения (2) $\varphi = 90° - \gamma$, следовательно, $\alpha = \gamma = 40°$. Угол β найдем из закона преломления $\frac{sin\,\alpha}{sin\,\beta} = \frac{1}{n}$, откуда $sin\,\beta = n\,sin\,\alpha = n\,sin\,\gamma$; $sin\,\beta = 1{,}5 \cdot 0{,}64 = 0{,}96$, отсюда $\beta \approx 74°$. Тогда из (2) $\delta \approx 74° - 40° = 34°$.

15.24 Монохроматический луч падает нормально на боковую поверхность призмы и выходит из неё отклоненным на угол $\delta = 25°$. Показатель преломления материала призмы для этого луча $n = 1,7$. Найти преломляющий угол γ призмы.

Решение

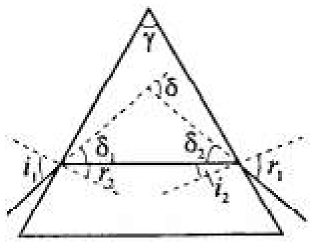
См. решение задачи 15.23. Из уравнения (3) $\beta = \delta + \gamma$. Из закона преломления $n\sin\alpha = \sin\beta$; $\sin\beta = \sin(\delta + \gamma) = \sin\delta\cos\gamma + \cos\delta\sin\gamma$. Но $\alpha = \gamma$, отсюда $\sin\alpha = \sin\gamma$; $n\sin\gamma = \sin\delta\cos\gamma + \cos\delta\sin\gamma$; $\sin\gamma(n - \cos\delta) = \sin\delta\cos\gamma$;

$tg\gamma = \dfrac{\sin\delta}{n - \cos\delta}$; $tg\gamma = \dfrac{0,42}{1,7 - 0,9} = 0,53$; $\gamma \approx 28°$.

15.25 Преломляющий угол равнобедренной призмы $\gamma = 10°$. Монохроматический луч падает на боковую грань под углом $i = 10°$. Показатель преломления материала призмы для этого луча $n = 1,6$. Найти угол отклонения δ луча от первоначального направления.

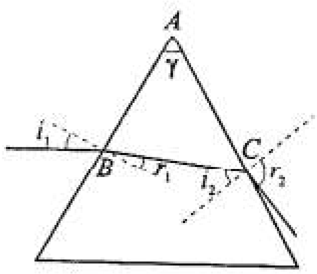
Решение

Преломляющий угол призмы и угол падения луча малы, для малых углов падения и преломления получаем $r_2 = \dfrac{\gamma}{n}$, $r_1 = i_2 n$. Поскольку $i_2 = \gamma - r_2$, находим $i_2 = \gamma - r_2$, $r_1 = \gamma n - i_1$. Угол отклонения луча призмой $\delta = \delta_1 + \delta_2 = (i_1 - r_2) + (r_1 - i_2) = \gamma(n-1)$. Подставляя числовые данные, получим $\delta = 6,2°$.



15.26 Преломляющий угол призмы $\gamma = 45°$. Показатель преломления материала призмы для некоторого монохроматического луча $n = 1,6$. Каков должен быть наибольший угол падения i этого луча на призму, чтобы при выходе луча из нее не наступило полное внутреннее отражение?

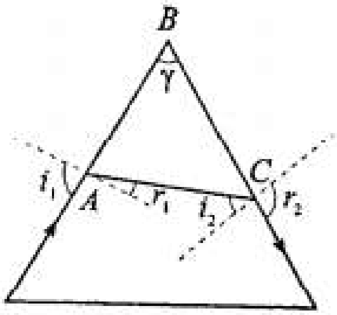
Решение



Полное внутреннее отражение выходящего луча наступит при $r_2 = 90°$. Согласно закону преломления $\sin r_2 = n\sin i_2$ или $n\sin i_2 = 1$, откуда $\sin i_2 = \dfrac{1}{n} = 0,625$; $i_2 = 38,7°$. Поскольку сумма углов γ, $90° - r_1$ и $90° - i_2$ треугольника ABC равна 180°, найдем $r_1 = \gamma - i_2 = 6,3°$. Далее имеем $\sin i_1 = n\sin r_1$, откуда $i_1 = \arcsin(n\sin r_1) = 10°$. Т. е. при углах падения больших 10° наступит полное внутреннее отражение.

15.27 Пучок света скользит вдоль боковой грани равнобедренной призмы. При каком предельном преломляющем угле γ призмы преломленные лучи претерпят полное внутреннее отражение на второй боковой грани? Показатель преломления материала призмы для этих лучей n = 1,6.

Решение

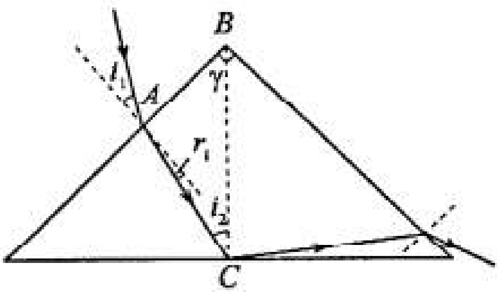


Полное внутреннее отражение выходящего луча наступит при $r_2 = 90°$. Согласно закону преломления $\sin r_2 = n \sin i_2$ или $n \sin i_2 = 1$, откуда $\sin i_2 = \frac{1}{n} = 0{,}625$; $i_2 = 38{,}7°$. Поскольку сумма углов γ, $90° - r_1$ и $90° - i_2$ треугольника ABC равна $180°$, найдем $\gamma = r_1 + i_2$ — (1). Далее имеем $\sin i_1 = n \sin r_1$, откуда $r_1 = \arcsin\frac{1}{n} = 38{,}7°$. Тогда из (1) $\gamma = 2 \cdot 38{,}7° = 77{,}4°$.

15.28 Монохроматический луч падает на боковую поверхность прямоугольной равнобедренной призмы. Войдя в призму, луч претерпевает полное внутреннее отражение от основания призмы и выходит через вторую боковую поверхность призмы. Каким должен быть наименьший угол падения i луча на призму, чтобы еще происходило полное внутреннее отражение? Показатель преломления материала призмы для этого луча n = 1,5.

Решение

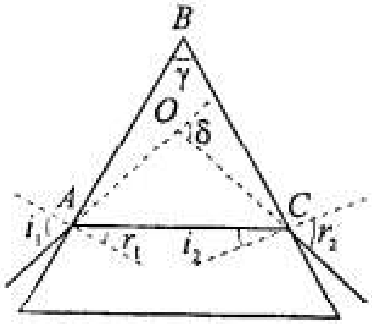
Полное внутреннее отражение выходящего луча наступит при $r_2 = 90°$. Согласно закону преломления $\sin r_2 = n \sin i_2$ или $n \sin i_2 = 1$, откуда $i_2 = \arcsin\frac{1}{n} = 41{,}8°$.



Поскольку сумма углов $45°$, $90° - r_1$ и $90° - i_2$ треугольника ABC равна $180°$, найдем $r_1 = 45° - i_2 = 3{,}2°$. Далее имеем $\sin i_1 = n \sin r_1$, откуда $i_1 = \arcsin(n \sin r_1) = 4{,}7°$.

15.29 Монохроматический луч падает на боковую поверхность равнобедренной призмы и после преломления идет в призме параллельно ее основанию. Выйдя из призмы, он оказывается отклоненным на угол δ от своего первоначального направления. Найти связь между преломляющим углом призмы γ, углом отклонения луча γ и показателем преломления для этого луча n.

Решение



Согласно закону преломления $\sin i_1 = n \sin r_1$ — (1). Поскольку сумма углов γ, $90° - r_1$ и $90° - i_2$ треугольника ABC равна $180°$, найдем $\gamma = r_1 + i_2$ — (2). ΔABC — равнобедренный, следовательно, $\angle BAC = \angle BCA$ или $90° - r_1 = 90° - i_2$, откуда $r_1 = i_2$ — (3). Тогда из (2) $\gamma = 2i_2$ или $i_2 = \frac{\gamma}{2}$ — (4). ΔAOC также равнобедренный, сумма его углов $180° - \delta + 2(i_1 - r_1) = 180°$, откуда $\delta = 2i_1 - 2r_1$; $r_1 = i_1 = \frac{\delta}{2}$ — (5). Подставляя (5) в (2), с учетом (4), получим $\gamma = i_1 - \frac{\delta}{2} + \frac{\gamma}{2}$, откуда $i_1 = \frac{\gamma + \delta}{2}$ — (6). Поскольку $r_1 = i_2 - \frac{\gamma}{2}$, и с учетом (6), уравнение (1) можно записать в виде $\sin\frac{\gamma+\delta}{2} = n \sin\frac{\gamma}{2}$.

15.30 Луч белого света падает на боковую поверхность равнобедренной призмы под таким углом, что красный луч выходят из нее перпендикулярно ко второй грани. Найти углы отклонения $\delta_{кр}$ и $\delta_ф$ красного и фиолетового лучей от первоначального направления, если преломляющий угол призмы $\gamma = 45°$. Показатели преломления материала призмы для красного и фиолетового лучей равны $n_{кр} = 1{,}37$ и $n_ф = 1{,}42$.

Решение

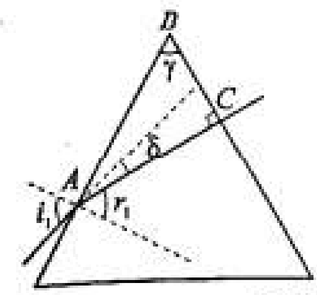


Рис.1

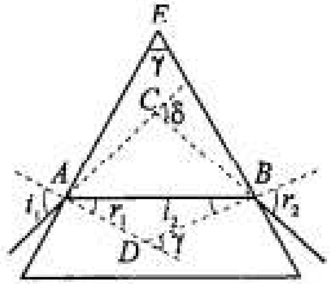


Рис.2

Красный луч выходит из второй грани под углом 0° (рис. 1), следовательно, $n_{кр}\sin i_2 = 0$, откуда $\alpha_2 = 0°$, т. е. красный луч падает на вторую грань перпендикулярно к ней. В ΔABC угол $\angle BAC$ равен 45°. Тогда $r_1 = 90° - BAC = 45°$. По закону преломления $\sin i_1 = n_{кр}\sin r_1$, откуда $i_1 = \arcsin\dfrac{\sqrt{2}}{2}n_{кр} = 75{,}6°$. Таким образом, мы найдем угол падения белого луча. Сумма углов треугольника ABC равна $\delta_{кр}(90° - i_1) + 45° + 90° = 180°$, откуда найдем угол отражения красного луча $\delta_{кр} = 30{,}6°$. Угол отражения фиолетового луча $\delta_ф = (i_1 - r_1) + (r_2 - i_2)$ — (1), как внешний угол ΔABC (рис. 2). Кроме того, $\angle AEB = \angle BDK$, как углы со взаимно перпендикулярными сторонами. Угол BDK является внешним углом треугольника ABD, поэтому $\gamma = r_1 + i_2$ — (2). По закону преломления света $\sin i_1 = n_ф \sin r_1$ — (3) и $\sin r_2 = n_ф \sin i_2$ — (4). Из (3) найдем $r_1 = \arcsin\left(\dfrac{\sin i_1}{n_ф}\right) = 43°$. Из (2): $i_2 = \gamma - r_1 = 45° - 43° = 2°$. Из (4): $r_2 = \arcsin(n_ф \sin i_2) = 2{,}8°$. Подставив найденные значения углов в (1), получим $\delta_ф = (75{,}6° - 43°) + (2{,}8° - 2°) = 33{,}4°$.

15.31 Найти фокусное расстояние F_1 кварцевой линзы для ультрафиолетовой линии спектра ртути (λ_1 = 259 нм), если фокусное расстояние для желтой линии натрия (λ_2 = 589 нм) F_2 = 16 см. Показатели преломления кварца для этих длин волн равны n_1 = 1,504 и n_2 = 1,458.

Решение

Для линзы, имеющей радиусы кривизны R_1 и R_2, имеем $(n-1)\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right)=\frac{1}{F}$ — (1), где n — показатель преломления материала, из которого изготовлена линза. Для желтой линии из (1) имеем $F_2=\frac{R_1R_2}{(n_2-1)(R_2-R_1)}$, откуда $\frac{R_1R_2}{R_2-R_1}=F_2(n_2-1)$ — (2). Поскольку для ультрафиолетовой линии $F_1=\frac{R_1R_2}{(n_1-1)(R_2-R_1)}$ — (3), то, подставляя (2) в (3), получим $F_1=\frac{F_2(n_2-1)}{n_1-1}=0{,}145$ м.

15.32 Найти фокусное расстояние F для следующих линз: а) линза двояковыпуклая: R_1 = 15 см и R_2 = -25 см; б) линза плосковыпуклая: R_1 = 15 см и $R_2 = \infty$; в) линза вогнуто-выпуклая (положительный мениск): R_1 = 15 см и R_2 = 25 см; г) линза двояковогнутая: R_1 = -15 см и R_2 = 25 см; д) линза плосковогнутая: $R_1 = \infty$; R_2 = -15 см; е) линза выпукло-вогнутая (отрицательный мениск): R_1 = 25 см, R_2 = 15 см. Показатель преломления материала линзы n = 1,5.

Решение

По формуле линзы $(n-1)\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right)=\frac{1}{F}$ — (1), откуда $F=\frac{R_1R_2}{(n-1)(R_2-R_1)}$ — (2). В случае плоско-выпуклой линзы $(R_1=\infty)$ уравнение (1) имеет вид: $(n-1)\frac{1}{R_2}=\frac{1}{F}$, откуда $F=\frac{R_1}{n-1}$ — (3). В случае плоско-вогнутой линзы $(R_1=\infty)$ уравнение (1) имеет вид: $-(n-1)\frac{1}{R_2}=\frac{1}{F}$, откуда $F=-\frac{R_2}{n-1}$ — (4). Подставляя числовые данные, получим:

а) из (2) $F=\frac{0{,}15\cdot(-0{,}25)}{0{,}5\cdot(-0{,}25-0{,}15)}=0{,}188$ м;

б) из (3) $F=\frac{0{,}15}{0{,}5}=0{,}3$ м;

в) из (2) $F=\frac{0{,}15\cdot 0{,}25}{0{,}5\cdot(0{,}25-15)}=0{,}75$ м;

г) из (2) $F=\frac{-0{,}15\cdot 0{,}25}{0{,}5(0{,}25+0{,}15)}=-0{,}188$ м;

д) из (4) $F=-\frac{-0{,}15}{0{,}5}=0{,}3$ м;

е) из (2) $F=\frac{0{,}25\cdot 0{,}15}{0{,}5(0{,}15-0{,}25)}=-0{,}75$ м.

15.33 Из двух стекол с показателями преломления n_1 = 1,5 и n_2 = 1,7 сделаны две одинаковые двояковыпуклые линзы. Найти отношение F_1/F_2 их фокусных расстояний. Какое действие каждая из этих линз произведет на луч, параллельный оптической оси, если погрузить линзы в прозрачную жидкость с показателем преломления n = 1,6?

Решение

Имеем $F_1 = \frac{R_1R_2}{(n_1-1)(R_2-R_1)}$; $F_2 = \frac{R_1R_2}{(n_2-1)(R_2-R_1)}$ (см. задачу 15.32). Отсюда $\frac{F_1}{F_2} = \frac{n_2-1}{n_1-1} = 1{,}4$.

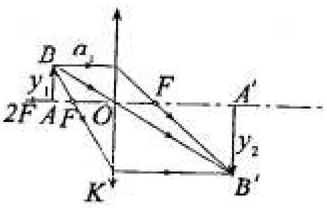
15.34 Радиусы кривизны поверхностей двояковыпуклой линзы $R_1 = R_2$ = 50 см. Показатель преломления материала линзы n = 1,5. Найти оптическую силу D линзы.

Решение

Согласно формуле тонкой линзы $D = (n-1)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)$. Поскольку по условию $R_1 = R_2 = R$, то $D = \frac{2(n-1)}{R}$. Подставляя числовые данные, получим $D = \frac{2(1{,}5-1)}{0{,}5} = 2$ дптр.

15.35 На расстоянии a_1 = 15 см от двояковыпуклой линзы, оптическая сила которой D = 10 дптр, поставлен перпендикулярно к оптической оси предмет высотой y_1 = 2 см. Найти положение и высоту y_2 изображения. Дать чертеж.

Решение



Фокусное расстояние линзы $F = \frac{1}{D} = 0{,}1$ м, т. е. предмет находится за фокусом. По условию $AO = a_1 = 0{,}15$ м, $OF = F = 0{,}1$ м, $AB = y_1 = 0{,}02$ м.

Поскольку ΔABO подобен $\Delta A'B'O$, то $\frac{AB}{A'B'} = \frac{AO}{A'O}$ — (1). Кроме того, ΔABF подобен ΔOKF, следовательно, $\frac{AB}{OK} = \frac{AF}{OF}$ или $\frac{0{,}02}{OK} = \frac{0{,}05}{0{,}1}$, откуда $OK = 0{,}04$ м. По построению $A'B' = OK = 0{,}04$ м. Подставляя числовые данные в (1), получим $\frac{0{,}02}{0{,}04} = \frac{0{,}15}{OA'}$, откуда $OA' = 0{,}3$ м.

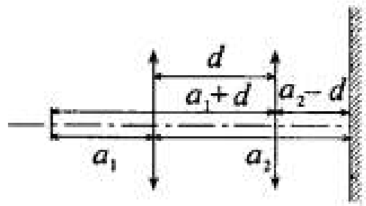
15.36 Доказать, что в двояковыпуклой линзе с равными радиусами кривизны поверхностей и с показателем преломления $n = 1{,}5$ фокусы совпадают с центрами кривизны.

Решение

По формуле тонкой линзы $\frac{1}{F} = (n-1)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)$, откуда при $R_1 = R_2 = R$, имеем $F = \frac{R}{2(n-1)}$. При $n = 1{,}5$ получим $F = \frac{R}{2(1{,}5-1)} = R$.

15.37 Линза с фокусным расстоянием $F = 16$ см дает резкое изображение предмета при двух положениях, расстояние между которыми $d = 6$ см. Найти расстояние $a_1 + a_2$ от предмета до экрана.

Решение



Запишем формулу тонкой линзы для двух положений: $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} = \frac{1}{F}$ — (1) и $\frac{1}{a_1+d} + \frac{1}{a_2-d} = \frac{1}{F}$ — (2). Предмет и экран неподвижны, следовательно, в первом случае предмет по отношению к линзе находится между первым и вторым фокусом, а во втором случае за вторым фокусом. Из (1) получим $\frac{a_1+a_2}{a_1a_2} = \frac{1}{F}$ — (3). Из (2) получим $\frac{a_1+a_2}{(a_1+d)(a_2-d)} = \frac{1}{F}$ — (4). Приравняем левые части уравнений (3) и (4) $\frac{a_1+a_2}{a_1a_2} = \frac{a_1+a_2}{(a_1+d)(a_2-d)}$, откуда $a_1a_2 = (a_1+d)(a_2-d)$. Раскрыв скобки и проведя небольшое преобразование, получим $a_1 = a_2 - d$ — (5). Подставляя (5) в (3), получим $\frac{a_2-d+a_2}{(a_2-d)a_2} = \frac{1}{F}$; $1 + \frac{a_2}{a_2-d} = \frac{1}{F}$; $a_2 = \frac{d(1-F)}{1-2F} = 0{,}74$ м. Тогда из (5) $a_1 + a_2 = 2a_2 - d = 0{,}88$ м.

15.38 Двояковыпуклая линза с радиусами кривизны поверхностей $R_1 = R_2 = 12$ см поставлена на таком расстоянии от предмета, что изображение на экране получилось в k раз больше предмета. Найти расстояние $a_1 + a_2$ от предмета до экрана, если: а) $k = 1$; б) $k = 20$; в) $k = 0,2$. Показатель преломления материала линзы $n = 1,5$.

Решение

Линейное увеличение линзы $k = \frac{a_2}{a_1}$ — (1). По формуле линзы $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} = (n-1)\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)$ или, при $R_1 = R_2 = R$, $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} = \frac{2(n-1)}{R}$; $\frac{a_1 + a_2}{a_1 a_2} = \frac{2(n-1)}{R}$ — (2). Из (1) имеем

$a_2 = ka_1$ — (3). Подставляя (3) в (2), получим $\frac{1+k}{ka_1} = \frac{2(n-1)}{R}$, откуда $a_1 = \frac{R(1+k)}{2k(n-1)}$. Подставляя числовые данные, получим:

а) $a_1 = 0,24$ м; $a_2 = ka_1 = 0,24$ м; $a_1 + a_2 = 0,48$ м;

б) $a_1 = 0,126$ м; $a_2 = ka_1 = 2,52$ м; $a_1 + a_2 = 2,65$ м;

в) $a_1 = 0,72$ м; $a_2 = ka_1 = 0,144$ м; $a_1 + a_2 = 0,864$ м.

15.39 Линза предыдущей задачи погружена в воду. Найти ее фокусное расстояние F.

Решение

В общем случае формула для расчета фокусного расстояния линзы имеет вид: $\frac{1}{F} = \left(\frac{n_1}{n_2} - 1\right)\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)$ — (1), где $n_1 = 1,5$ — показатель преломления стекла, $n_2 = 1,33$ — показатель преломления воды. Т. к. $R_1 = R_2 = R$, то из (1) получим $F - \frac{R}{2(n_1 / n_2 - 1)}$. Подставляя числовые данные, получим $F = 0,46$ м.

15.40 Решать предыдущую задачу при условии, что линза погружена в сероуглерод.

Решение

Имеем $F = \frac{R}{2(n_1 / n_2 - 1)}$. Показатель преломления сероуглерода $n_2 = 1,63$. Подставляя числовые данные, получим $F = -0,75$ м. Т. е. линза будет рассеивающей.

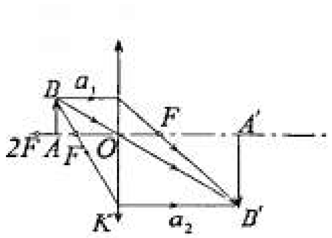
15.41 Найти фокусное расстояние F_2 линзы, погруженной в воду, если ее фокусное расстояние в воздухе F_1=20 см. Показатель преломления материала линзы n = 1,6.

Решение

Имеем $F_1 = \dfrac{R}{2(n/n_1 - 1)}$ — (1); $F_2 = \dfrac{R}{2(n/n_2 - 1)}$, где n_1 — показатель преломления воздуха, $n_2 = 1{,}33$ — показатель преломления воды. Разделив (1) на (2), получим $\dfrac{F_1}{F_2} = \dfrac{n/n_2 - 1}{n/n_2 - 1} = \dfrac{n_1(n - n_2)}{n_2(n - n_1)}$. Отсюда $F_2 = \dfrac{F_1 n_2 (n - n_1)}{n_1(n - n_2)} = 0{,}59$ м.

15.42 Плоско-выпуклая линза с радиусом кривизны R = 30 см и показателем преломления n = 1,5 дает изображение предмета с увеличением k = 2. Найти расстояния a_1 и a_2 предмета и изображения от линзы. Дать чертеж.

Решение



Толстые линзы, имеющие радиус кривизны R_1 и R_2 — двояковыпуклые, или $R_1 = \infty$ и R_2 — плоско-выпуклые, проявляют себя как тонкие линзы, если рассматривать лучи, находящиеся вблизи главной оптической оси. Тогда аберрация не учитывается и построения аналогичны построениям в тонкой линзе. Линейное увеличение линзы $k = \dfrac{a_2}{a_1}$, откуда $a_2 = ka_1$ — (1). Для плоско-выпуклой линзы $\dfrac{1}{F} = \dfrac{n-1}{R} = -\dfrac{1}{a_1} + \dfrac{1}{a_2}$ — (2) (см. задачу 15.32). Из (2) имеем $\dfrac{n-1}{R} = \dfrac{a_1 - a_2}{a_1 a_2}$. Подставляя это выражение в (1), получим $\dfrac{n-1}{R} = \dfrac{1-k}{ka_1}$, откуда $a_1 = \dfrac{R(1-k)}{k(n-1)} = -0{,}9$ м. Тогда из (1) найдем $a_2 = 1{,}8$ м.

15.43 Найти продольную хроматическую аберрацию двояковыпуклой линзы из флинтгласа с радиусами кривизны $R_1 = R_2$ = 8 см. Показатели преломления флинтгласа для красного ($\lambda_{кр}$ = 760 нм) и фиолетового ($\lambda_ф$ = 430 нм) лучей равны $n_{кр}$ = 1,5 и $n_ф$ = 1,8.

Решение

Имеем $F_1 = \dfrac{R_1}{2(n_1 - 1)}$ (см. задачу 15.36). Подставляя числовые данные, получим $F_1 = 0{,}08$ м. Аналогично $F_2 = \dfrac{R_2}{2(n_2 - 1)} = 0{,}05$ м. Таким образом, продольная хроматическая аберрация составляет $F_1 - F_2 = 0{,}03$ м.

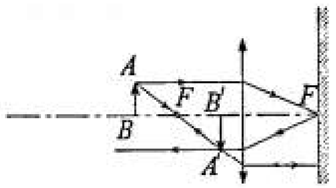
15.44 На расстоянии $a_1 = 40$ см от линзы предыдущей задачи на оптической оси находится светящаяся точка. Найти положение изображения этой точки, если она испускает монохроматический свет с длиной волны: а) $\lambda_1 = 760$ нм; б) $\lambda_2 = 430$ нм.

Решение

Из формулы линзы имеем $a_2 = \frac{Fa_1}{a_1 - F}$ — (1). В задаче 15.43 мы нашли, что для данной линзы длине волны $\lambda_1 = 760$ нм соответствует фокусное расстояние $F_1 = 0{,}08$ м, а длине волны $\lambda_2 = 430$ нм соответствует фокусное расстояние $F_2 = 0{,}05$ м. Подставляя числовые данные в (1), получим: а) $a_2 = 0{,}1$ м; б) $a_2 = 0{,}057$ м.

15.45 В фокальной плоскости двояковыпуклой линзы расположено плоское зеркало. Предмет находится перед линзой между фокусом и двойным фокусным расстоянием. Построить изображение предмета.

Решение



Построение хода лучей показано на рисунке.

15.46 Найти увеличение k, даваемое лупой с фокусным расстоянием $F = 2$ см, для: а) нормального глаза с расстоянием наилучшего зрения $L = 25$ см; б) близорукого глаза с расстоянием наилучшего зрения $L = 15$ см.

Решение

Увеличение лупы $k = \frac{L}{F}$. Подставляя числовые данные, получим: а) $k = \frac{0{,}25}{0{,}02} = 12{,}5$; б) $k = \frac{0{,}15}{0{,}02} = 7{,}5$.

15.47 Какими должны быть радиусы кривизны $R_1 = R_2$ поверхностей лупы, чтобы она давала увеличение для нормального глаза $k = 10$? Показатель преломления стекла, из которого сделана лупа, $n = 1{,}5$.

Решение

Для нормального глаза расстояние наилучшего зрения $L = 0{,}25$ м — (1). Фокусное расстояние лупы $F = \frac{R}{2(n-1)}$ (см. задачу 15.36), откуда $R = 2F(n-1)$ — (2). Увеличение лупы $k = \frac{L}{F}$, откуда $F = \frac{L}{k}$ — (3). Подставляя (3) в (2) и с учетом (1), получим $R = \frac{2L(n-1)}{k} = 0{,}025$ м.

15.48 Зрительная труба с фокусным расстоянием F = 50 см установлена на бесконечность. После того как окуляр трубы передвинули на некоторое расстояние, стали ясно видны предметы, удаленные от объектива на расстояние a = 50 м. На какое расстояние d передвинули окуляр при наводке?

Решение

Зрительная труба дает изображение предметов, находящихся на бесконечности, в своей фокальной плоскости. Изображение предметов, находящихся на расстоянии a_1 от объектива, получается на расстоянии $a_2 = \frac{a_1 F}{a_1 - F}$, т. е. на $\Delta a = a_2 - F = \frac{F^2}{a_1 - F}$ дальше. Следовательно, окуляр нужно отодвинуть на столько же, чтобы созданное объективом изображение по-прежнему находилось в фокальной плоскости окуляра. Таким образом, $d = \frac{F^2}{a_1 - F} = 0{,}005$ м.

15.49 Микроскоп состоит из объектива с фокусным расстоянием F_1 = 2 мм и окуляра с фокусным расстоянием F_2 = 40 мм. Расстояние между фокусами объектива и окуляра d = 18 см. Найти увеличение k, даваемое микроскопом.

Решение

Поскольку созданное объективом изображение лежит в фокальной плоскости окуляра, то $\frac{aF_1}{a - F_1} + F_2 = d$ — (1), где a — расстояние от рассматриваемого предмета до объектива. Объектив дает изображение в фокальной плоскости окуляра, линейное увеличение объектива $k = \frac{F_1}{a - F_1}$.

Окуляр работает как лупа, поэтому угловое увеличение окуляра $k_2 = \frac{L}{F_2}$, где $L = 0{,}25$ м — расстояние наилучшего зрения нормального глаза. Отсюда полное увеличение микроскопа $k = k_1 \cdot k_2 = \frac{F_1 L}{F_2(a - F_1)}$ — (2). Из (1) найдем $a = \frac{F_1(l - F_2)}{l - (F_2 + F_1)} = 2{,}022 \cdot 10^{-3}$ м. Подставляя числовые данные в (2), получим $k = 568$.

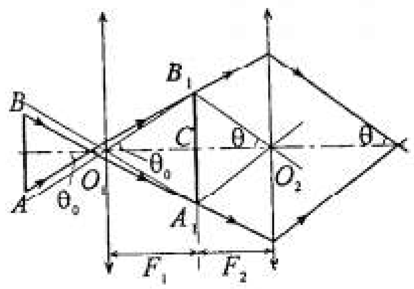
15.50 Картину площадью S = 2х2 м^2 снимают фотоаппаратом, установленным от нее на расстоянии a = 4,5 м. Изображение получилось размером s = 5x5 см^2. Найти фокусное расстояние F объектива аппарата. Расстояние от картины до объектива считать большим по сравнению с фокусным расстоянием.

Решение

Поперечное увеличение объектива $k = \frac{a_2}{a_1} = \frac{\sqrt{s}}{\sqrt{S}} = \frac{1}{40}$, отсюда $a_2 = \frac{a_1}{40}$ — (1). По формуле линзы $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} = \frac{1}{F}$, откуда $F = \frac{a_1 a_2}{a_1 - a_2}$ — (2). Подставляя (1) в (2), получим $F = \frac{a_1}{39} = 0{,}115$ м.

15.51 Телескоп имеет объектив с фокусным расстоянием F_1 = 150 см и окуляр с фокусным расстоянием F_2 = 10 см. Под каким углом зрения θ видна полная Луна в этот телескоп, если невооруженным глазом она видна под углом θ_0 = 31′?

Решение



Из ΔCB_1O_1 найдем $tg\theta_0 = \frac{CB_1}{CO_1} = \frac{CB_1}{F_1}$. Из ΔCB_1O_2 найдем $tg\theta = \frac{CB_1}{CO_2} = \frac{CB_1}{F_2}$. Углы θ_0 и θ малы, поэтому можно записать $\theta_0 = \frac{CB_1}{F_1}$ и $\theta = \frac{CB_1}{F_2}$. Угловое увеличение телескопа $k = \frac{\theta}{\theta_0} = \frac{F_1}{F_2} = 15$. Отсюда $\theta = 15\theta_0 = 7°45'$.

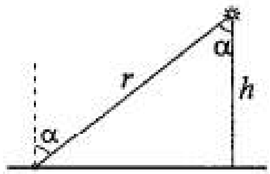
15.52 При помощи двояковыпуклой линзы, имеющей диаметр D = 9 см и фокусное расстояние F = 50 см, изображение Солнца проектируется на экран. Каким получается диаметр d изображения Солнца, если угловой диаметр Солнца α = 32′? Во сколько раз освещенность, создаваемая изображением Солнца, будет больше освещенности, вызываемой Солнцем непосредственно?

Решение

Диаметр изображения $d = 2Ftg\frac{\alpha}{2} = 4{,}6 \cdot 10^{-3}$ м. Поток лучей, попадающих на поверхность линзы площадью $\frac{\pi D^2}{4}$, концентрируется в изображении Солнца площадью $\frac{\pi d^2}{4}$. Тогда $\frac{E_2}{E_1} = \frac{4\pi D^2}{4\pi d^2} = 383$.

15.53 Свет от электрической лампочки с силой света I = 200 кд падает под углом α = 45° на рабочее место, создавая освещенность E = 141 лк. На каком расстоянии r от рабочего места находится лампочка? На какой высоте h от рабочего места она висит?

Решение



Освещенность, создаваемая лампочкой, равна $E = \frac{I}{r^2} \cos\alpha$, отсюда $r = \sqrt{\frac{I \cos\alpha}{E}} = 1$ м. Высота $h = r\cos\alpha = 0{,}7$ м.

15.54 Лампа, подвешенная к потолку, дает в горизонтальном направлении силу света I = 60 кд. Какой световой поток Φ падает на картину площадью S = 0,5 м^2, висящую вертикально на стене на расстоянии r = 2 м от лампы, если на противоположной стене находится большое зеркало на расстоянии a = 2 м от лампы?

Решение

Лампа создает на площади S картины освещенность $E_1 = \frac{I}{r^2} \cos\alpha$ или, поскольку $\cos\alpha = 1$, $E_1 = \frac{I}{r^2}$. Изображение лампы в зеркале, находящемся на расстоянии $r + 2a$ от картины, создает освещенность $E_2 = \frac{I}{(r+2a)^2}$. Результирующая напряженность $E = E_1 + E_2 = I\left(\frac{1}{r^2} + \frac{1}{(r+2a)^2}\right)$. Кроме того, $E = \frac{\Phi}{S}$, откуда $\Phi = ES = IS\left(\frac{1}{r^2} + \frac{1}{(r+2a)^2}\right)$. Подставляя числовые данные, получим $\Phi = 8{,}3$ лм.

15.55 Большой чертеж фотографируют сначала целиком, затем отдельные его детали в натуральную величину. Во сколько раз надо увеличить время экспозиции при фотографировании деталей?

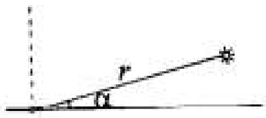
Решение

При фотографировании всего чертежа, размеры которого гораздо больше фотопластинки, изображение получается приблизительно в главном фокусе объектива. При фотографировании деталей изображение в натуральную величину получается при помещении предмета на двойном фокусном расстоянии от объектива (на таком же расстоянии получается и изображение на фотопластинке). Площадь изображения при этом увеличится в $\left(\frac{2F}{F}\right)^2 = 4$ раза. Во столько же раз уменьшится освещенность фотопластинки, следовательно, время экспозиции надо увеличить в 4 раза.

15.56 21 марта, в день весеннего равноденствия, на Северной Земле Солнце стоит в полдень под углом $\alpha = 10°$ к горизонту. Во сколько раз освещенность площадки, поставленной вертикально, будет больше освещенности горизонтальной площадки?

Решение

Освещенность вертикальной площадки $E_1 = \frac{I}{r^2}\cos\alpha$. Освещенность горизонтальной площадки $E_2 = \frac{I}{r^2}\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \frac{I}{r^2}\sin\alpha$. Отсюда $\frac{E_1}{E_2} = ctg\alpha = 5{,}7$.



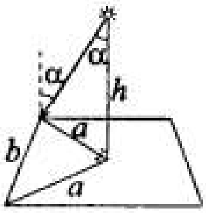
15.57 В полдень во время весеннего и осеннего равноденствия Солнце стоит на экваторе в зените. Во сколько раз в это время освещенность поверхности Земли на экваторе больше освещенности поверхности Земли в Ленинграде? Широта Ленинграда $\varphi = 60°$.

Решение

Освещенность поверхности Земли на экваторе $E_1 = \frac{I}{r^2}$. Освещенность поверхности Земли в Ленинграде $E_2 = \frac{I}{r^2}\cos\varphi$. Отсюда отношение $\frac{E_1}{E_2} = \frac{1}{\cos\varphi} = 2$.

15.58 В центре квадратной комнаты площадью $S = 25$ м^2 висит лампа. На какой высоте h от пола должна находиться лампа, чтобы освещенность в углах комнаты была наибольшей?

Решение

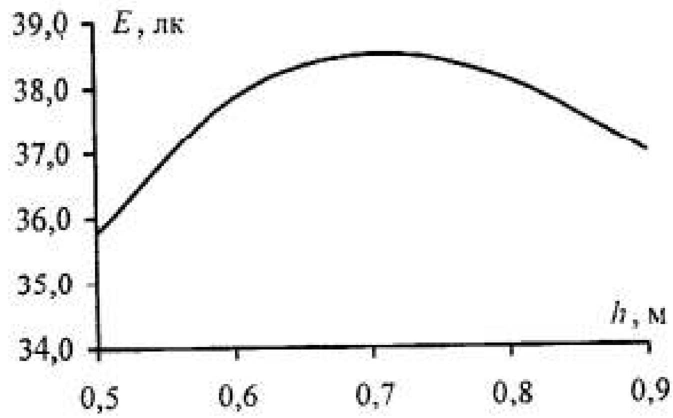


Освещенность E находится по формуле $E = \frac{I}{r^2}\cos\alpha$, где I — сила света источника, r — расстояние от источника до угла комнаты, α — угол падения лучей. Из рисунка видно, что $a = r\sin\alpha = \frac{b}{\sqrt{2}} = htg\alpha$, поэтому можно записать $E = \frac{I}{a^2}\cos\alpha\sin^2\alpha$. Для нахождения максимума E возьмем производную $\frac{dE}{d\alpha}$ и приравняем ее нулю: $\frac{dE}{d\alpha} = \frac{I}{a^2}\left(2\cos^2\alpha\sin\alpha - \sin^3\alpha\right) = 0$. отсюда $tg^2\alpha = 2$. Тогда $h = \frac{b}{\sqrt{2}tg\alpha} = \frac{\sqrt{S}}{\sqrt{2}tg\alpha} = 2{,}5$ м.

15.59 Над центром круглого стола диаметром D = 2 м висит лампа с силой света I = 100 кд. Найти изменение освещенности E края стола при постепенном подъеме лампы в интервале $0{,}5 \le h \le 0{,}9$ м через каждые 0,1 м. Построить график $E = F(h)$.

Решение

Освещенность края стола $E = \frac{I}{r^2}\cos\alpha$, где $r = \sqrt{h^2 + \frac{D^2}{4}}$; $\cos\alpha = \frac{h}{r} = \frac{h}{\sqrt{h^2 + D^2/4}}$. Отсюда $E = \frac{Ih}{\left(h^2 + D^2/4\right)^{\frac{3}{2}}}$. Подставляя числовые данные, получим $E = \frac{100h}{\left(h^2+1\right)^{\frac{3}{2}}}$. Для заданного интервала значений h построим график.



15.60 В центре круглого стола диаметром D = 1,2 м стоит настольная лампа из одной электрической лампочки, расположенной на высоте h_1 = 40 см от поверхности стола. Над центром стола на высоте h_2 = 2 м от его поверхности висит люстра из четырех таких же лампочек. В каком случае получится большая освещенность на краю стола (и во сколько раз): когда горит настольная лампа или когда горит люстра?

Решение

Настольная лампа создает освещенность $E_1 = \frac{Ih_1}{\left(h_1^2 + D^2/4\right)^{\frac{3}{2}}}$ (см. задачу 15.59). Люстра создает освещенность $E_2 = \frac{4Ih_2}{\left(h_2^2 + D^2/4\right)^{\frac{3}{2}}}$. Отсюда отношение $\frac{E_1}{E_2} = \frac{h_1}{4h_2} \times \left(\frac{h_2^2 + D^2/4}{h_1^2 + D^2/4}\right)^{\frac{3}{2}}$. Подставляя числовые данные, получим $\frac{E_1}{E_2} = 1{,}2$.

15.61 Предмет при фотографировании освещается электрической лампой, расположенной от него на расстоянии r_1 = 2 м. Во сколько раз надо увеличить время экспозиции, если эту же лампу отодвинуть на расстояние r_2 = 3 м от предмета?

Решение

Имеем $E_1 = \frac{I}{r_1^2}$; $E_2 = \frac{I}{r_2^2}$, отсюда $\frac{E_1}{E_2} = \frac{r_2^2}{r_1^2} = 2{,}25$. Освещенность уменьшилась в 2,25 раза, следовательно, время экспозиции необходимо увеличить в 2,25 раза.

15.62 Найти освещенность E на поверхности Земли, вызываемую нормально падающими солнечными лучами. Яркость Солнца $B = 1{,}2 \cdot 10^9$ кд/м^2.

Решение

Яркость Солнца можно определить по формуле $B = \frac{I}{S\cos\theta}$, где S — площадь видимого диска Солнца. По условию $\theta = 90°$, следовательно, $\cos\theta = 1$; $S = \frac{\pi D^2}{4}$ — (1), где $D \approx 1{,}4 \cdot 10^9$ м — диаметр Солнца. Отсюда освещенность поверхности Земли $E = \frac{I}{R^2}$ — (2), где $R = 1{,}5 \cdot 10^{11}$ м — расстояние от поверхности Земли до Солнца. Из (1) найдем $I = \frac{B\pi D^2}{4}$ — (3). Подставляя (3) в (2), получим $E = \frac{B\pi D^2}{4R^2} = 82 \cdot 10^3$ лк.

15.63 Спираль электрической лампочки с силой света I = 100 кд заключена в матовую сферическую колбу диаметром: *а*) d = 5 см; б) d = 10 см. Найти светимость R и яркость. В лампы. Потерей света в оболочке колбы пренебречь.

Решение

Если потерь света в оболочке колбы не происходит, то светимость R численно равна освещенности E, т. е. $R = E = \frac{4I}{d^2}$ — (1). Светимость R и яркость B связаны соотношением $R = \pi B$, откуда $B = \frac{R}{\pi}$ — (2). Подставляя числовые данные, получим: а) $R = 16 \cdot 10^4$ лм/м^2; $B = 5{,}1 \times$ $\times 10^4$ кд/м^2; б) $R = 4 \cdot 10^4$ лм/м^2; $B = 1{,}27 \cdot 10^4$ кд/м^2.

15.64 Лампа, в которой светящим телом служит накаленный шарик диаметром d = 3 мм, дает силу света I = 85 кд. Найти яркость B лампы, если сферическая колба лампы сделана: а) из прозрачного стекла; б) из матового стекла. Диаметр колбы D = 6 см.

Решение

Яркость лампы $B = \frac{I}{S}$, где S — площадь проекции излучающей поверхности на плоскость, перпендикулярную направлению наблюдения. а) Излучающей поверхностью является поверхность шарика, т. е. $S = \frac{\pi d^2}{4}$. Отсюда $B = \frac{4I}{\pi d^2} = 1{,}2 \cdot 10^7$ кд/м^2. б) Если колба лампы сделана из матового стекла, то свет рассеивается и излучающей поверхностью является поверхность лампы, т. е. $S = \frac{\pi D^2}{4}$. Отсюда $B = \frac{4I}{\pi D^2} = 3 \cdot 10^4$ кд/м^2.

15.65 Какую освещенность E дает лампа предыдущей задачи на расстоянии r = 5 м при нормальном падении света?

Решение

По определению $E = \frac{I}{r^2}$. Таким образом, освещенность будет одинакова и для прозрачной и для матовой колбы. Подставляя числовые данные, получим $E = 3{,}4$ лк.

15.66 На лист белой бумаги площадью S = 20x30 см^2 перпендикулярно к поверхности падает световой поток Φ = 120 лм. Найти освещенность E, светимость R и яркость B бумажного листа, если коэффициент отражения ρ = 0,75.

Решение

Имеем $E = \frac{\Phi}{S} = 2 \cdot 10^3$ лк. Поскольку светимость листа обусловлена его освещенностью, то $R = \rho E = 1{,}5 \cdot 10^3$ лм/м^2. Светимость R и яркость B связаны соотношением $R = \pi B$, откуда $B = \frac{R}{\pi} = 480$ кд/м^2.

15.67 Какова должна быть освещенность E листа бумаги в предыдущей задаче, чтобы его яркость была равна $B = 10^4$ кд/м^2?

Решение

Имеем $B = \frac{R}{\pi}$ — (1); $R = \rho E$ — (2). Подставив (2) в (1), получим $B = \frac{\rho E}{\pi}$, откуда $E = \frac{\pi B}{\rho} = 4{,}2 \cdot 10^4$ лк.

15.68 Лист бумаги площадью $S = 10х30$ см^2 освещается лампой с силой света $I = 100$ кд, причем на него падает 0,5% всего посылаемого лампой света. Найти освещенность E листа бумаги.

Решение

Полный световой поток, испускаемый лампой, $\Phi_0 = 4\pi I$. На лист падает световой поток $\Phi = 5 \cdot 10^{-3} \Phi_0$. Освещенность листа $E = \frac{\Phi}{S} = \frac{5 \cdot 10^{-3} \cdot 4\pi I}{S}$. Подставляя числовые данные, получим $E = 210$ лк.

15.69 Электрическая лампа с силой света $I = 100$ кд посылает во все стороны в единицу времени $W_t = 122$ Дж/мин световой энергии. Найти механический эквивалент света K и к.п.д. η световой отдачи, если лампа потребляет мощность $N = 100$ Вт.

Решение

Принято переходный множитель, определяющий в ваттах мощность, необходимую для получения светового ощущения, вызываемого потоком в 1 люмен, измерять для определенного узкого интервала длин волн, соответствующего максимуму чувствительности глаза, а именно, $\lambda = 555$ нм. Этот фактор носит название механического

эквивалента света. Он равен $K = \frac{W_\tau}{4\pi I}$. Пересчитаем световую энергию W_τ из Дж/мин в Вт. $W_\tau = \frac{122}{60} = 2{,}03$ Дж/с $= 2{,}03$ Вт. Подставляя числовые данные, получим $K = 0{,}0016$ Вт/лм. К.п.д. световой отдачи $\eta = \frac{W_\tau}{N} \cdot 100\%$; $\eta \approx 2\%$.

§ 16. Волновая оптика

16.1 При фотографировании спектра Солнца было найдено, что желтая спектральная линия (λ = 589 нм) в спектрах, полученных от левого и правого краев Солнца, была смещена на $\Delta\lambda$ = 0,008 нм. Найти скорость v вращения солнечного диска.

Решение

Согласно принципу Доплера при фотографировании левого края Солнца, т. е. когда источник света движется к нам, $\nu' = \frac{\nu c}{c - v}$ — (1); при фотографировании правого края диска, когда источник света движется от нас, $\nu'' = \frac{\nu c}{c + v}$ — (2). Частота излучения $\nu = \frac{c}{\lambda}$ — (3). Подставляя (3) в (1) и (2), получим $\Delta\lambda = \frac{2v\lambda}{c}$, отсюда $v = \frac{c\Delta\lambda}{2\lambda} = 2 \cdot 10^3$ м/с.

16.2 Какая разность потенциалов U была приложена между электродами гелиевой разрядной трубки, если при наблюдении вдоль пучка α-частиц максимальное доллеровское смешение линии гелия (λ = 492,2 нм) получилось равным $\Delta\lambda$ = 0,8 нм?

Решение

За счет работы сил электрического поля α-частицы приобрели кинетическую энергию, т. е. $qU = \frac{mv^2}{2}$, где скорость частиц $v = \frac{c\Delta\lambda}{\lambda}$, т. е. $qU = \frac{mc^2(\Delta\lambda)^2}{2\lambda^2}$, откуда

$U = \frac{mc^2(\Delta\lambda)^2}{2\lambda^2 q}$. Подставляя числовые данные, получим $U = 2500$ В.

16.3 При фотографировании спектра звезды Андромеды было найдено, что линия титана (λ = 495,4 нм) смешена к фиолетовому концу спектра на $\Delta\lambda$ = 0,17 нм. Как движется звезда относительно Земли?

Решение

Смещение спектральных линий в сторону коротких волн означает, что звезда приближается к нам. Радиальная скорость ее движения (т. е. скорость вдоль линии, соединяющей звезду и Землю) находится из соотношения $v = \frac{c\Delta\lambda}{\lambda} = 103 \cdot 10^3$ м/с.

16.4 Во сколько раз увеличится расстояние между соседними интерференционными полосами на экране в опыте Юнга, если зеленый светофильтр (λ_1 = 500 нм) заменить красным (λ_2 = 650 нм)?

Решение

Условие интерференционного максимума: $y_{max} = k\frac{L}{d}\lambda$ — (1), где $k = 0, 1, 2, 3...$ Условие интерференционного минимума: $y_{min} = \left(k + \frac{1}{2}\right)\frac{L}{d}\lambda$ — (2), где $k = 0, 1, 2, 3...$ Расстояние между двумя соседними максимумами интенсивности называется расстоянием между интерференционными полосами, а расстояние между соседними минимумами интенсивности — шириной интерференционной полосы. Из (1) и (2) следует, что расстояние между полосами и ширина полосы имеют одинаковое значение, равное $\Delta y = \frac{L}{d}\lambda$. Тогда расстояние между интерференционными полосами при зеленом светофильтре равно $\Delta y_1 = \frac{L}{d}\lambda_1$, при красном $\Delta y_2 = \frac{L}{d}\lambda_2$, где L — расстояние от экрана до источников света. Поскольку величины L и d не меняются, то $\frac{\Delta y_2}{\Delta y_1} = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} = 1{,}3$.

16.5 В опыте Юнга отверстия освещались монохроматическим светом (λ = 600нм). Расстояние между отверстиями d = 1 мм, расстояние от отверстий до экрана L = 3 м. Найти положение трех первых светлых полос.

Решение

Первая светлая полоса находится на расстоянии $y_1 = \frac{L}{d}\lambda = 1{,}8 \cdot 10^{-3}$ м. Вторая — на расстоянии $y_2 = 2y_1 = 3{,}6 \cdot 10^{-3}$ м. Третья — на расстоянии $y_3 = 3y_1 = 5{,}4 \cdot 10^{-3}$ м.

16.6 В опыте с зеркалами Френеля расстояние между мнимыми изображениями источника света d = 0,5 мм, расстояние до экрана L = 5 м. В зеленом свете получились интерференционные полосы, расположенные на расстоянии l = 5 мм друг от друга. Найти длину волны λ зеленого света.

Решение

Имеем $l = \frac{L}{d}\lambda$, откуда $\lambda = \frac{ld}{L} = 0{,}5 \cdot 10^{-6}$ м.

16.7 В опыте Юнга па пути одного из интерферирующих помещалась тонкая стеклянная пластинка, вследствие чего центральная светлая полоса смещалась в положение, первоначально занятое пятой светлой полосой (не считая центральной). Луч падает перпендикулярно к поверхности пластики. Показатель преломления пластинки $n = 1{,}5$. Длина волны $\lambda = 600$ нм. Какова толщина h пластинки?

Решение

Изменение разности хода лучей в результате внесения пластинки равно $\Delta = nh - h = h(n-1)$. Кроме того, произошло смещение на $k = 5$ полос, т. е. разность хода $\Delta = k\lambda$. Отсюда $h(n-1) = k\lambda$; $h = \dfrac{k\lambda}{n-1} = 6 \cdot 10^{-6}$ м.

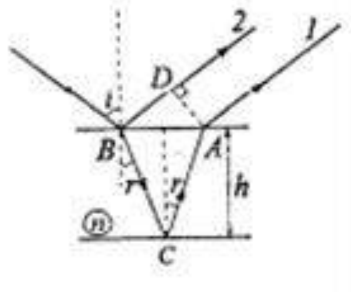
16.8 В опыте Юнга стеклянная пластинка толщиной $h = 12$ см помещается на пути одного из интерферирующих лучей перпендикулярно к лучу. На сколько могут отличаться друг от друга показатели преломления в различных местах пластинки, чтобы изменение разности хода от этой неоднородности не превышало $\Delta = 1$ мкм?

Решение

Для двух различных значений n_1 и n_2 показателя преломления стеклянной пластинки изменение разности хода лучей соответственно равно $\Delta_1 = h(n_1 - 1)$ и $\Delta_2 = h(n_2 - 1)$. По условию $\Delta_1 - \Delta_2 = 10^{-6}$ м, т. е. $h(n_1 - 1) - h(n_2 - 1) = 10^{-6}$, откуда $h\Delta n = 10^{-6}$ м; $\Delta n = \dfrac{10^{-6}}{h} = 5 \cdot 10^{-5}$.

16.9 На мыльную пленку падает белый свет под углом $i = 45°$ к поверхности пленки. При какой наименьшей толщине пленки отраженные лучи будут окрашены в желтый цвет ($\lambda = 600$ нм)? Показатель преломления мыльной воды $n = 1{,}33$.

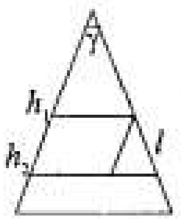
Решение



По условию отраженные лучи окрашены в желтый цвет. Это означает, что максимум отражения наблюдается в желтой части спектра. Максимум отражения наблюдается, когда световые волны, отраженные от обеих поверхностей пластинки (см. рисунок), усиливают друг друга. Для этого оптическая разность хода Δd пучков 1 и 2 должна быть равна целому числу k длин волн: $\Delta d = \dfrac{\lambda}{2} + n(AC + BC) - AD = k\lambda$. Слагаемое $\dfrac{\lambda}{2}$ учитывает, что при отражении пучка 1 от оптически более плотной среды фаза колебаний электромагнитного поля изменяется на противоположную, т. е. возникает такое же изменение фазы, как при прохождении пути $\frac{\lambda}{2}$. Множитель n учитывает уменьшение скорости света в среде — на пути s в среде возникает такое же изменение фазы $\Delta\varphi$, как на пути ns в вакууме: $\Delta\varphi = \frac{\omega s}{v} = \frac{n\omega s}{c}$. Используя соотношения $AC = BC = \frac{h}{\cos r}$, $AD = 2h\sin i \cdot tg r$, а также применяя закон преломления, получаем $\left(k - \frac{1}{2}\right)\lambda = 2h\sqrt{n^2 - \sin^2 i}$, откуда $h = \frac{(k - 1/2)\lambda}{2\sqrt{n^2 - \sin^2 i}}$. При $k = 1$ минимальная толщина пленки $h = 0{,}13 \cdot 10^{-6}$ м.

16.10 Мыльная пленка, расположенная вертикально, образует клин вследствие стекания жидкости. При наблюдении интерференционных полос в отраженном свете ртутной дуги (λ = 546,1 нм) оказалось, что расстояние между пятью полосами l = 2 см. Найти угол γ клина. Свет падает перпендикулярно к поверхности пленки. Показатель преломления мыльной воды n = 1,33.

Решение



При попадании на любую прозрачную пленку свет частично проходит, частично отражается как от нижней, так и от верхней поверхностей. При этом световые пучки приобретают разность хода, зависящую от толщины пленки, ее показателя преломления и угла падения света. По условию свет падает перпендикулярно к поверхности пленки, толщина пленки всюду мала. Это позволяет считать, что интерференционная картина при рассмотрении ее в отраженном свете (сверху) локализована на верхней поверхности клина. Пусть h_1 и h_2 — толщины пленки, соответствующие разным полосам. Тогда $\Delta h = h_2 - h_1 = \frac{\lambda}{2n}$. Поскольку угол γ клина мал, то можно принять $\Delta h = l tg\gamma$. Отсюда $tg\gamma = \frac{k\lambda}{2nl} = 5{,}13 \cdot 10^{-5}$; $\gamma = 11''$.

16.11 Мыльная пленка, расположенная вертикально, образует клин вследствие стекання жидкости. Интерференция наблюдается в отраженном свете через красное стекло (λ_1 = 631 нм). Расстояние между соседними красными полосами при этом l_1 = 3 мм. Затем эта же пленка наблюдается через синее стекло (λ_2 = 400 нм). Найти расстояние l_2 между соседними синими полосами. Считать, что за время измерений форма пленки не изменится и свет падает перпендикулярно к поверхности пленки.

Решение

Пусть угол клина равен γ, тогда $tg\gamma = \frac{k\lambda_1}{2nl_1} = \frac{k\lambda_2}{2nl_2}$ (см. задачу 16.10). Отсюда $l_2 = \frac{l_1\lambda_2}{\lambda_1} = 1{,}9 \cdot 10^{-3}$ м.

16.12 Пучок света (λ = 582 нм) падает перпендикулярно к поверхности стеклянного клина. Угол клина γ = 20″. Какое число k_0 темных интерференционных полос приходится на единицу длины клина? Показатель преломления стекла n = 1,5.

Решение

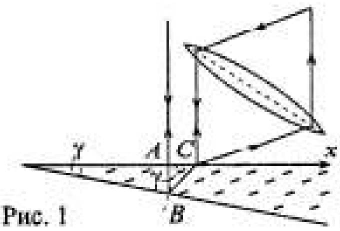


Рис. 1

Для малых углов $AB = BC = h$ (рис.1) и $tg\gamma = \gamma$. Разность хода $\Delta = 2hn + \frac{\lambda}{2}$. Выразим h через длину участка поверхности клина $h = x \cdot tg\gamma$; $h = \gamma x$. Тогда разность хода будет равна $\Delta = 2\gamma x n + \frac{\lambda}{2}$ — (1). Если интенсивность интерферирующих волн одинакова, то результирующая интенсивность в точках, для которых разность фаз равна δ, определяется выражением $I = 2I_0(1 + cos\,\delta)$ — (2), где $\delta = \frac{2\pi}{\lambda}\Delta$ — (3). Подставляя (1) в (3), получим $\delta = \frac{2\pi}{\lambda}\left(2\gamma nx + \frac{\lambda}{2}\right)$. Тогда уравнение (2) примет вид

$$I(x) = 2I_0\left(1 + cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}\left(2\gamma nx + \frac{\lambda}{2}\right)\right)\right);$$

$$I(x) = 2I_0\left(1 + cos\left(\frac{4\pi}{\lambda}\gamma nx + \pi\right)\right) \text{ — (4).}$$

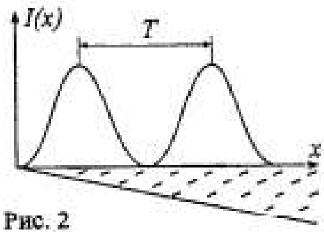
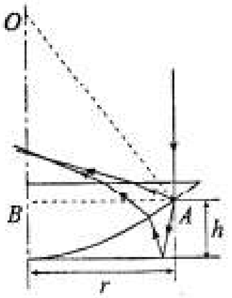


Рис. 2

Найдем период колебаний (рис. 2). Из (4) имеем $\omega = \frac{4\pi\gamma n}{\lambda}$; $T = \frac{2\pi}{\omega}$; $T = \frac{\lambda}{2\gamma n}$. Число темных полос, приходящихся на единицу клина, есть величина обратная периоду $k_0 = \frac{2\gamma n}{\lambda}$. Подставляя числовые данные, получим $k_0 = 5$ см$^{-1}$.

16.13 Установка для получения колец Ньютона освещается монохроматическим светом, падающим по нормали к поверхности пластинки. Наблюдение ведется в отраженном свете. Радиусы двух соседних темных колец равны $r_k = 4{,}0$ мм и $r_{k+1} = 4{,}38$ мм. Радиус кривизны линзы $R = 6{,}4$ м. Найти порядковые номера колец и длину волны λ падающего света.

Решение



Появление колец Ньютона обусловлено интерференцией световых пучков, отраженных от двух поверхностей тонкой воздушной прослойки между линзой и пластинкой. Оптическая разность хода лучей $\Delta d = 2h + \frac{\lambda}{2}$ — (1) (см. задачу 16.9). Из прямоугольного треугольника ABO получим $R - h = \sqrt{R^2 - r^2}$. Поскольку $r << R$, то имеет место равенство: $\sqrt{R^2 - r^2} = R - \frac{r^2}{2R}$. Тогда $R - h = R - \frac{r^2}{2R}$, откуда $h = \frac{r^2}{2R}$ — (2). Запишем условие интерференционного минимума $\Delta d = (2k+1)\frac{\lambda}{2}$ — (3). Приравнивая правые части (1) и (3), получим $2h = k\lambda$ или $h = \frac{k\lambda}{2}$. Тогда из (2) найдем $r_k = \sqrt{2Rh} = \sqrt{k\lambda R}$ — (4). Найдем порядковый номер k кольца. Имеем $\frac{r_{k+1}^2}{r_k^2} = \frac{k+1}{k} = 1 + \frac{1}{k}$, откуда $k = \frac{r_k^2}{r_{k+1}^2 - r_k^2} = 5$; $k + 1 = 6$. Тогда из (4) найдем $\lambda = \frac{r_k^2}{kR} = 0{,}5 \cdot 10^{-6}$ м.

16.14 Установка для получения колец Ньютона освещается монохроматическим светом, падающим по нормали к поверхности пластинки. Радиус кривизны линзы $R = 8{,}6$. Наблюдение ведется в отраженном свете. Измерениями установлено, что радиус четвертого темного кольца (считая центральное темное пятно за нулевое) $r_4 = 4{,}5$ мм. Найти длину волны λ падающего света.

Решение

Имеем $\lambda = \frac{r_k^2}{kR}$ (см. задачу 16.13). Подставляя числовые данные, получим $\lambda = 589 \cdot 10^{-9}$ м.

16.15 Установка для получения колец Ньютона освещается белым светом, падающим по нормали к поверхности пластинки. Радиус кривизны линзы $R = 5$ м. Наблюдение ведется в проходящем свете. Найти радиусы r_c и $r_{кр}$ четвертого синего кольца ($\lambda_c = 400$ нм) и третьего красного кольца ($\lambda_{кр} = 630$ нм).

Решение

Радиус светлого кольца в проходящем свете определяется формулой $r_k = \sqrt{k\lambda R}$. Отсюда $r_c = \sqrt{4\lambda_c R} = 2{,}8$ мм; $r_{кр} = \sqrt{3\lambda_{кр} R} = 3{,}1$ мм.

16.16 Установка для получения колец Ньютона освещается монохроматическим светом, падающим по нормали к поверхности пластинки. Радиус кривизны линзы R = 15 м. Наблюдение ведется в отраженном свете. Расстояние между пятым и двадцать пятым светлыми кольцами Ньютона l = 9 мм. Найти длину волны λ монохроматического света.

Решение

Радиус k-го светлого кольца в отраженном свете определяется соотношением $r_k = \sqrt{(2k-1)R\frac{\lambda}{2}}$. Тогда $l = r_{25} - r_5 = \sqrt{49R\frac{\lambda}{2}} - \sqrt{9R\frac{\lambda}{2}}$; $l = 4\sqrt{R\frac{\lambda}{2}}$. Отсюда $\lambda = \frac{l^2}{8R} = 675 \cdot 10^{-9}$ м.

16.17 Установка для получения колец Ньютона освещается монохроматическим светом, падающим по нормали к поверхности пластинки. Наблюдение идет в отраженном свете. Расстояние между вторым и двадцатым темными кольцами l_1 = 4,8 мм. Найти расстояние l_2 между третьим и шестнадцатым темными кольцами Ньютона.

Решение

Радиус темного кольца в отраженном свете определяется формулой $r_k = \sqrt{k\lambda R}$. Отсюда $l_1 = r_{20} - r_2$ или $l_1 = \sqrt{20\lambda R} - \sqrt{2\lambda R} = \sqrt{\lambda R}\left(\sqrt{20} - \sqrt{2}\right)$ — (1); $l_2 = \sqrt{16\lambda R} - \sqrt{3\lambda R} = \sqrt{\lambda R}\left(4 - \sqrt{3}\right)$ — (2). Из (1) найдем $\sqrt{\lambda R} = \frac{l_1}{\sqrt{20} - \sqrt{2}}$ — (3). Подставляя (3) в (2), получим $l_2 = l_1 \frac{4 - \sqrt{3}}{\sqrt{20} - \sqrt{2}} = 3{,}6 \cdot 10^{-3}$ м.

16.18 Установка для получения колец Ньютона освещается светом от ртутной дуги, падающим по нормали к поверхности пластинки. Наблюдение ведется в проходящем свете. Какое по порядку светлое кольцо, соответствующее линии λ_1 = 579,1 нм, совпадает со следующим светлым кольцом, соответствующим линии λ_2 = 577 нм?

Решение

Радиус k-го светлого кольца, соответствующего линии λ_1, в проходящем свете определяется соотношением $r_k = \sqrt{k\lambda_1 R}$. Радиус следующего светлого кольца, соответствующего линии λ_2, равен $\lambda_{(k+1)} = \sqrt{(k+1)\lambda_2 R}$. По условию $r_k = r_{k+1}$, т. е. $\sqrt{k\lambda_1 R} = \sqrt{(k+1)\lambda_2 R}$, откуда $k = \frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} = 275$.

16.19 Установка для получения колец Ньютона освещается светом с длиной волны λ = 589 нм, падающим по нормали к поверхности пластинки. Радиус кривизны линзы R = 10 м. Пространство между линзой и стеклянной пластинкой заполнено жидкостью. Найти показатель преломления жидкости, если радиус третьего светлого кольца в проходящем свете r_3 = 3,65 мм.

Решение

Результат интерференции зависит от оптической разности хода, которая в случае нормального падения лучей имеет вид $\Delta = 2hn$. Наблюдение ведется в проходящем свете. Установка наиболее прозрачна для света с заданной длиной волны, если разность хода кратна четному числу полуволн: $\Delta = 2k\dfrac{\lambda}{2}$, т. е. условие максимума для наблюдения в проходящем свете выражается соотношением $2hn = k\lambda$ — (1). Радиус k-го светлого кольца $r_k = \sqrt{2hR}$, откуда $h = \dfrac{r_k^2}{2R}$ — (2). Подставляя (2) в (1), получим $\dfrac{nr_k^2}{R} = k\lambda$, откуда $n = \dfrac{k\lambda R}{r_k^2} = 1{,}33$.

16.20 Установка для получения колец Ньютона освещается монохроматическим светом с длиной волны λ = 600 нм, падающим по нормали к поверхности пластинки. Найти толщину h воздушного слоя между линзой и стеклянной пластинкой в том месте, где наблюдается четвертое темное кольцо в отраженном свете.

Решение

Условие минимума в отраженном свете: $2hn = k\lambda$. По условию $k = 4$, $n = 1$, тогда $2h = 4\lambda$, откуда $h = 2\lambda = 1{,}2 \cdot 10^{-6}$ м.

16.21 Установка для получения колец Ньютона освещается монохроматическим светом с длиной волны λ = 500 нм. падающим по нормали к поверхности пластинки. Пространство между линзой и стеклянной пластинкой заполнено водой. Найти толщину h слоя воды между линзой и пластинкой в том месте, где наблюдается третье светлое кольцо в отраженном свете.

Решение

Условие максимума в отраженном свете $2hn = (2k+1)\dfrac{\lambda}{2}$.

По условию $k = 3$, $n = 1{,}33$, тогда $2hn = \dfrac{7\lambda}{2}$, откуда $h = \dfrac{7\lambda}{4n} = 658 \cdot 10^{-9}$ м.

16.22 Установка для получения колец Ньютона освещается монохроматическим светом, падающим по нормали к поверхности пластинки. После того как пространство между линзой и стеклянной пластинкой заполнили жидкостью, радиусы темных колец в отраженном свете уменьшились в 1,25 раза. Найти показатель преломления жидкости.

Решение

Пусть n_1 — показатель преломления воздуха, n_2 — показатель преломления жидкости. Тогда $n_1 = \frac{k\lambda R}{(1{,}25r_k)^2}$; $n_2 = \frac{k\lambda R}{r_k^2}$ (см. задачу 16.19). Найдем отношение $\frac{n_2}{n_1} = 1{,}25^2$, отсюда $n_2 = 1{,}56$.

16.23 В опыте с интерферометром Майкельсона для смещения интерференционной картины на $k = 500$ полос потребовалось переместить зеркало на расстояние $L = 0{,}161$ мм. Найти длину волны λ падающего света.

Решение

Перемещение зеркала на расстояние $\frac{\lambda}{2}$ соответствует изменению разности хода на λ, т. е. смещению интерференционной картины на одну полосу. Таким образом, $L = \frac{k\lambda}{2}$, откуда $\lambda = \frac{2L}{k} = 644 \cdot 10^{-9}$ м.

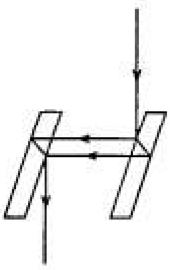
16.24 Для измерения показателя преломления аммиака в одно из плечей интерферометра Майкельсона поместили откачанную трубку длиной $l = 14$ см. Концы трубки закрыли плоскопараллельными стеклами. При заполнении трубки аммиаком интерференционная картина для длины волны $\lambda = 590$ нм сместилась на $k = 180$ полос. Найти показатель преломления n аммиака.

Решение

Луч дважды проходит через трубку с аммиаком, при этом разность хода лучей, проходящих в аммиаке и в вакууме, равна $2(l \cdot n - l) = 2l(n-1) = k\lambda$. Отсюда $n - 1 = \frac{k\lambda}{2l}$; $n = \frac{k\lambda}{2l} + 1 = 1.00038$.

16.25 На пути одного из лучей интерферометра Жамена (см. рисунок) поместили откачанную трубку длиной $l = 10$ см. При заполнении трубки хлором интерференционная картина для длины волны $\lambda = 590$ нм сместилась на $k = 131$ полосу. Найти показатель преломления n хлора.

Решение



В отличие от интерферометра Майкельсона в данном случае луч проходит через трубку с хлором только один раз. Поэтому разность хода лучей, проходящих в хлоре и в вакууме, равна $nl - l = l(n-1) = k\lambda$. Отсюда $n = \frac{k\lambda}{l} + 1 = 1{,}000773$.

16.26 Пучок белого света падает по нормали к поверхности стеклянной пластинки толщиной d = 0,4 мкм. Показатель преломления стекла n = 1,5. Какие длины волн λ, лежащие в пределах видимого спектра (от 400 до 700 нм), усиливаются в отраженном свете?

Решение

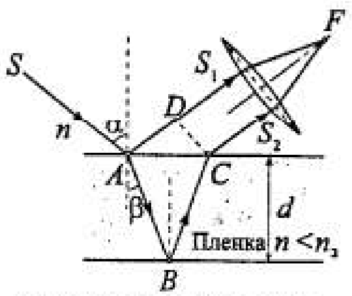
Условие максимума в отраженном свете $2dn = (2k+1)\frac{\lambda}{2}$.

Отсюда $\lambda = \frac{4dn}{2k+1}$. При $k = 1$ получаем $\lambda = 800$ нм, данная волна не лежит в пределах видимого спектра. При $k = 2$ получим $\lambda = 480$ нм, что удовлетворяет условию. При $k = 3$ получим $\lambda = 343$ нм, эта длина волны также не лежит в пределах видимого спектра. Таким образом, искомая длина волны $\lambda = 480$ нм.

16.27 На поверхность стеклянного объектива (n_1 = 1,5) нанесена тонкая пленка, показатель преломления которой n_2 = 1,2 («просветляющая» пленка). При какой наименьшей толщине d этой пленки произойдет максимальное ослабление отраженного света в средней части видимого спектра?

Решение

Из световой волны, падающей на пленку, выделим узкий пучок SA. В точках A и B падающий пучок частично отражается и частично преломляется. Отраженные пучки света AS_1 и BCS_2 падают на собирающую линзу, пересекаются в ее фокусе и интерферируют между собой.



Стеклянная пластинка $n_1 > n_2$

Т. к. показатель преломления воздуха $(n_1 = 1)$ меньше показателя преломления вещества пленки, который, в свою очередь, меньше показателя преломления стекла, то в обоих случаях отражение происходит от среды оптически более плотной, чем та среда, в которой идет падающая волна. Поэтому фаза колебания пучка света AS_1 при отражении в точке A изменяется на π рад и точно так же на π рад изменяется фаза колебаний пучка света BCS_2 при отражении в точке B. Следовательно, результат интерференции этих пучков света при пересечении в фокусе линзы будет такой же, как если бы никакого изменения фазы колебаний ни у того ни у другого пучка не было. Условие максимального ослабления света при интерференции в тонких пленках состоит в том, что оптическая разность хода Δ интерферирующих волн должна быть равна нечетному числу полуволн: $\Delta = (2k+1)\left(\frac{\lambda}{2}\right)$. Как видно из рисунка, оптическая разность хода $\Delta = l_2 n_2 - l_1 n = (|AB| + |BC|) n_2 - |AD| n$. Следовательно, условие минимума интенсивности света примет вид $(|AB| + |BC|) n_2 - |AD| n = (2k+1)\left(\frac{\lambda}{2}\right)$. Если угол падения α будет уменьшаться, стремясь к нулю, то $AD \to 0$ и $|AB| + |BC| \to 2d$, где d — толщина пленки. В пределе при $\alpha = 0$ будем иметь $\Delta = 2dn_2 = (2k+1)\left(\frac{\lambda}{2}\right)$, откуда искомая толщина пленки $d = \frac{(2k+1)\lambda}{4n}$. Минимальное значение d соответствует значению $k = 0$. Подставляя числовые данные, получим $d = 115 \cdot 10^{-9}$ м.

16.28 Свет от монохроматического источника (λ = 600 нм) падает нормально на диафрагму с диаметром отверстия d = 6 мм. За диафрагмой на расстоянии l = 3 м от нее находится экран. Какое число k зон Френеля укладывается в отверстие диафрагмы? Каким будет центр дифракционной картины на экране: темным или светлым?

Решение

Пусть в отверстии диафрагмы укладывается k зон Френеля, тогда радиус k-й зоны равен радиусу диафрагмы $r_k = \frac{d}{2} = \sqrt{bk\lambda}$. Отсюда $k = \frac{d^2}{4b\lambda} = 5$. Поскольку число открытых зон нечетно, то центр дифракционной картинки будет светлым.

16.29 Найти радиусы r_k первых пяти зон Френеля, если расстояние от источника света до волновой поверхности a = 1 м, расстояние от волновой поверхности до точки наблюдения b = 1 м. Длина волны света λ = 500 нм.

Решение

Радиус внешней границы k-й зоны Френеля для сферической волны $r_k = \sqrt{\frac{ab}{a+b} m\lambda}$. Подставляя числовые данные, получим $r_1 = 0{,}5$ мм, $r_2 = 0{,}71$ мм, $r_3 = 0{,}86$ мм, $r_4 = 1{,}0$ мм, $r_5 = 1{,}12$ мм.

16.30 Найти радиусы r_k первых пяти зон Френеля для плоской волны, если расстояние от волновой поверхности до точки наблюдения b = 1 м. Длина волны света λ = 500 нм.

Решение

В случае плоской волны радиус k-й зоны Френеля определяется по формуле $r_k = \sqrt{bk\lambda}$. Подставляя числовые данные, получим $r_1 = 0{,}71$ мм; $r_2 = 1$ мм; $r_3 = 1{,}22$ мм; $r_4 = 1{,}41$ мм; $r_5 = 1{,}58$ мм.

16.31 Дифракционная картина наблюдается на расстоянии l от точечного источника монохроматического света (λ = 600 нм). На расстоянии $a = 0{,}5 \cdot l$ от источника помещена круглая непрозрачная преграда диаметром D = 1 см. Найти расстояние l, если преграда закрывает только центральную зону Френеля.

Решение

Радиус центральной (первой) зоны Френеля $r_1 = \sqrt{\frac{ab}{a+b}\lambda}$.

Кроме того, $r_1 = \frac{d}{2}$. По условию $a + b = l$; $a = b = 0{,}5l$,

тогда $r_1 = \frac{d}{2} = 0{,}5\sqrt{l\lambda}$. Отсюда $l = \frac{d^2}{\lambda} = 167$ м.

16.32 Дифракционная картина наблюдается на расстоянии l = 4 м от точечного источника монохроматического света (λ = 500 нм). Посередине между экраном и источником света помещена диафрагма с круглым отверстием. При каком радиусе R отверстия центр дифракционных колец, наблюдаемых на экране, будет наиболее темным?

Решение

Радиус отверстия соответствует радиусу k-й зоны Френеля при условии, что отверстие пропускает k зон. Т. е. $R = r_k = \sqrt{\frac{ab}{a+b}m\lambda}$. Наименьшая освещенность центра колец соответствует двум зонам ($k = 2$). Подставляя числовые данные, получим $R = 10^{-3}$ м.

16.33 На диафрагму с диаметром отверстия D = 1,96 мм падает нормально параллельный пучок монохроматического света (λ = 600 нм). При каком наибольшем расстоянии l между диафрагмой и экраном в центре дифракционной картины еще будет наблюдаться темное пятно?

Решение

Расстояние, при котором будет видно темное пятно, определяется числом зон Френеля, укладывающихся в отверстии. Если число зон четное, то в центре дифракционной картинки будет темное пятно. Число зон Френеля, помещающихся в отверстии, убывает по мере удаления экрана от отверстия. Наименьшее четное число зон равно двум. Следовательно, максимальное расстояние, при котором еще будет наблюдаться темное пятно в центре экрана, определяется условием, согласно которому в отверстии должны поместиться две зоны Френеля. Радиус диафрагмы должен равняться радиусу второй зоны, т. е. $\frac{d}{2} = r_2 = \sqrt{2l\lambda}$. Отсюда $l = \frac{d^2}{8\lambda} = 0{,}8$ м.

16.34 На щель шириной a = 2 мкм падает нормально параллельный пучок монохроматического света (λ = 589 нм) какими углами φ будут наблюдаться дифракционные минимумы света?

Решение

В соответствии с принципом Гюйгенса щель можно рассматривать как цепочку N источников света S_1, S_2 ... S_N, расстояние между которыми $\Delta x \to 0$, при этом $N\Delta x = a$ (рис. 1). Колебания, создаваемые источниками в точках их расположения, можно представить в виде: $E_i = E_0 \cos \omega t$. В точке наблюдения P, расположенной под углом α к нормали $\vec{n}$, эти источники создадут колебания, которые можно представить в виде:

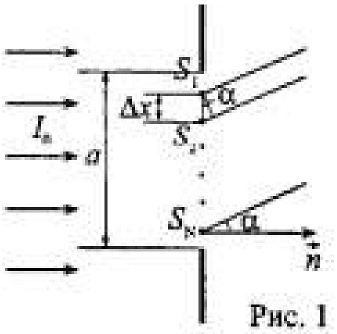


Рис. 1

$$E_1' = E_0 \cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda} n r_1\right); \qquad E_2' = E_0 \cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda} n r_2\right) \quad \ldots$$

$$E_N' = E_0 \cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda} n r_N\right)$$ — (1). Из (1) следует, что разность фаз соседних колебаний равна $\delta = -\frac{2\pi}{\lambda} n (r_2 - r_1) = -\left(\frac{2\pi}{\lambda} \Delta x \sin\alpha\right)$ — (2). Построим векторную диаграмму для точки наблюдения P (рис. 2). Т. к. длины векторов $\vec{E}_1$, $\vec{E}_2$ ... $\vec{E}_N$ и углы между ними равны, то цепочка векторов является частью правильного многоугольника, вокруг которого можно описать окружность радиусом R. Резуль-

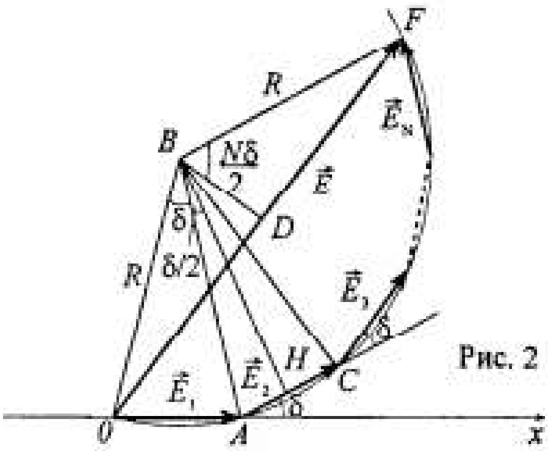


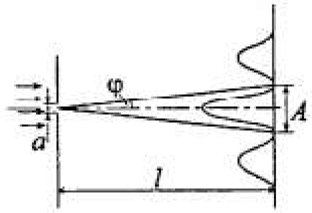
Рис. 2

тирующий вектор $\vec{E}$ является хордой этой окружности, а центральный угол, соответствующий этой хорде, равен $N\delta$. Проведем перпендикуляры из точки B к сторонам AC и OF. Из прямоугольных треугольников ABH и DBF, учитывая, что $\left|\vec{E}_i\right| = E_0$, найдем $\frac{E_0}{2} = R\sin\frac{\delta}{2}$, $\frac{E}{2} = R\sin\frac{N\delta}{2}$, откуда $E = E_0\frac{\sin(N\delta/2)}{\sin(\delta/2)}$. Тогда интенсивность в точке наблюдения P равна $I = I_1\frac{\sin^2(N\delta/2)}{\sin^2(\delta/2)}$ — (3), где I_1 — интенсивность, обусловленная отдельным источником света. При малых δ имеет место равенство $\sin\frac{N\delta}{2} \approx \frac{N\delta}{2}$ и $\sin\frac{\delta}{2} \approx \frac{\delta}{2}$. Тогда из выражения (3) следует, что интенсивность падающего света $I_0 = I_{15}N^2$ — (4). Подставляя (2) в (3), получим $I = I_1\frac{\sin^2(2\pi N\Delta x/(2\lambda)\sin\alpha)}{\sin^2(2\pi\Delta x/(2\lambda)\sin\alpha)}$. Отсюда с учетом того, что $\Delta x \to 0$ и $N\Delta x = a$, получим $I = I_1N^2\frac{\sin^2(\pi a/\lambda\sin\alpha)}{N^2(\pi\Delta x/\lambda\sin\alpha)^2}$, или, с учетом (4), $I = I_0\frac{\sin^2(\pi a/\pi a\sin\alpha)}{(\pi a/\lambda\sin\alpha)^2}$. Минимумы интенсивности будут наблюдаться при $\frac{\pi a}{\lambda}\sin\alpha = k\pi$, где $k = 1, 2, 3...$ Таким образом, при дифракции света на одной щели (в случае нормального падения лучей) условие минимумов интенсивности имеет вид $a\sin\varphi = k\lambda$. Отсюда $\sin\varphi = \frac{k\lambda}{a}$. При $k = 1$ имеем $\sin\varphi_1 = \frac{\lambda}{a} = 0{,}295$; $\varphi \approx 17°$. При $k = 2$ имеем $\sin\varphi_2 = 0{,}589$; $\varphi \approx 36°$. При $k = 3$ имеем

$\sin\varphi_2 = 0{,}884$; $\varphi \approx 62°$. Очевидно, что при $k = 4$ мы получим $\sin\varphi > 1$, что не имеет смысла.

16.35 На щель шириной a = 20 мкм падает нормально параллельный пучок монохроматического света (λ = 500 нм). Найти ширину A изображения щели на экране, удаленном от щели на расстояние l = 1 м. Шириной изображения считать расстояние между первыми дифракционными минимумами, расположенными по обе стороны от главного максимума освещенности.

Решение



Из рисунка видно, что $\frac{A}{2} = l tg\varphi$. Поскольку угол φ мал, то можно принять $tg\varphi = sin\varphi$. Тогда $A = 2l\,sin\varphi$ — (1). Условие максимумов интенсивности света $a\,sin\varphi = k\lambda$, откуда при $k = 1$ $sin\varphi = \frac{\lambda}{a}$ — (2). Подставляя (2) в (1), получим $A = \frac{2l\lambda}{a} = 0{,}05$ м.

16.36 На щель шириной a = 6λ падает нормально параллельный пучок монохроматического света с длиной волны λ. Под каким углом φ будет наблюдаться третий дифракционный минимум света?

Решение

Имеем $a\,sin\varphi = k\lambda$. По условию $a = 6\lambda$, $k = 3$. Отсюда $6\lambda\,sin\varphi = 3\lambda$; $sin\varphi = 0{,}5$; $\varphi = 30°$.

16.37 На дифракционную решетку падает нормально пучок света. Для того чтобы увидеть красную линию (λ = 700 нм) спектре этого порядка, зрительную трубку пришлось установить под углом φ = 30° к оси коллиматора. Найти постоянную дифракционной решетки. Какое число штрихов N_0нанесено единицу длины этой решетки?

Решение

Согласно формуле дифракционной решетки $d\,sin\varphi = k\lambda$ (1). По условию $k = 2$, тогда из (1) найд $d = \frac{2\lambda}{sin\varphi} = 2{,}8\cdot 10^{-6}$ м. Число штрихов N_0, приходящих на единицу длины решетки, связано с периодом решет d соотношением $N_0 = \frac{1}{d}$, откуда $N_0 = 357\cdot 10^{-3}$ м.

16.38 Какое число штрихов N_0 на единицу длины имеет дифракционная решетка, если зеленая линия ртути (λ = 546,1 нм) в спектре первого порядка наблюдается под углом φ = 19°8'?

Решение

Согласно формуле дифракционной решетки $d\,sin\varphi = k$. Поскольку число штрихов N_0, приходящихся на едини длины решетки, связано с периодом решетки d соотнош нием $N_0 = \frac{1}{d}$, то $\frac{sin\varphi}{N_0} = k\lambda$, откуда $N_0 = \frac{sin\varphi}{k\lambda} = 600$ мм$^{-1}$

16.39 На дифракционную решетку нормально падает луч света. Натриевая линия (λ_1 = 589 нм) дает в спектре первого порядка угол дифракции $\varphi_1 = 17°8'$. Некоторая линия дает в спектре второго порядка дифракции $\varphi_2 = 24°12'$. Найти длину волны λ_2 этой линии и число штрихов N_0 на единицу длины решетки.

Решение

По формуле дифракционной решетки для натриевой линии имеем $d\sin\varphi_1 = \lambda_1$ — (1), для неизвестной линии $d\sin\varphi_2 = 2\lambda_2$ — (2). Разделив (1) на (2), получим $\frac{\sin\varphi_1}{\sin\varphi_2} = \frac{\lambda_1}{2\lambda_2}$, откуда $\lambda_2 = \frac{\lambda_1\sin\varphi_2}{2\sin\varphi_1}$. Подставляя числовые данные, получим $\lambda_2 = \frac{589\cdot10^{-9}\cdot0{,}41}{2\cdot0{,}295} = 409\cdot10^{-9}$ м. Число штрихов N_0, приходящихся на единицу длины решетки, связано с периодом решетки d соотношением $N_0 = \frac{1}{d}$. Из (1) найдем $d = \frac{\lambda_1}{\sin\varphi_1}$, тогда $N_0 = \frac{\sin\varphi_1}{\lambda_1} = 500$ мм$^{-1}$.

16.40 На дифракционную решетку нормально падает пучок света от разрядной трубки. Какова должна быть постоянная d дифракционной решетки, чтобы в направлении $\varphi_1 = 41°$ совпадали максимумы линий λ_1 = 656,3 им и λ_2 = 410,2 нм?

Решение

Имеем $\sin\varphi = \frac{k_1\lambda_1}{d} = \frac{k_2\lambda_2}{d}$, следовательно, $k_1\lambda_1 = k_2\lambda_2$. Отсюда $\frac{k_2}{k_1} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} = 1{,}6$ — (1). Поскольку числа k_1 и k_2 должны быть целыми, то из условия (1) найдем $k_1 = 5$ и $k_2 = 8$. Тогда $d = \frac{k_1\lambda_1}{\sin\varphi} = 5\cdot10^{-6}$ м.

16.41 На дифракционную решетку нормально падает пучок света. При повороте трубы гониометра на угол φ в поле зрения видна линия λ_1 = 440 нм в спектре третьего порядка. Будут ли видны под этим же углом φ другие спектральные линии, соответствующие длинам волн в пределах видимого спектра (от 400 до 700нм)?

Решение

Имеем $d\sin\varphi = 3\lambda_1$, откуда $\sin\varphi = \frac{3\lambda_1}{d}$ — (1). Для спектральных линий λ_2 имеем $d\sin\varphi = k\lambda_2$ или, подставляя (1), $3\lambda_1 = k\lambda_2$, откуда $\lambda_2 = \frac{3}{k}\lambda_1$. При $k = 1$ имеем $\lambda_2 = \frac{3}{k}\lambda_1$. При $k = 1$ имеем $\lambda_2 = 3\lambda_1 = 1320$ нм. Эта длина волны не соответствует видимому спектру. При $k = 2$ имеем $\lambda_2 = \frac{3}{2}\lambda_1 = 660$ нм. При $k = 3$ получим $\lambda_2 = \lambda_1$. Таким образом, искомая длина волны $\lambda_2 = 660$ нм в спектре второго порядка.

16.42 На дифракционную решетку нормально падает пучок света от разрядной трубки, наполненной гелием. На какую линию λ_2 в спектре третьего порядка накладывается красная линия гелия (λ_1 = 670 нм) спектра второго порядка?

Решение

Имеем $d\sin\varphi = 2\lambda_1$; $d\sin\varphi = 3\lambda_2$. Отсюда $\lambda_2 = \frac{2}{3}\lambda_1 =$ = 447 нм — синяя линия спектра гелия.

16.43 На дифракционную решетку нормально падает пучок света от разрядной трубки, наполненной гелием. Сначала зрительная труба устанавливается на фиолетовые линии ($\lambda_ф$ = 389 нм) по обе стороны от центральной полосы в спектре первого порядка. Отсчеты по лимбу вправо от нулевого деления дали $\varphi_{ф1}$ = 27º33′ и $\varphi_{ф2}$ = 36°27′. После этого зрительная труба устанавливается на красные линии по обе стороны от центральной полосы в спектре первого порядка. Отсчеты по лимбу вправо от нулевого деления дали $\varphi_{кр1}$ = 23°54′ и $\varphi_{кр2}$ = 40°6′. Найти длину волны $\lambda_{кр}$ красной линии спектра гелия.

Решение

Имеем $d\sin\frac{\varphi_{ф2}-\varphi_{ф1}}{2} = \lambda_ф$; $d\sin\frac{\varphi_{кр2}-\varphi_{кр1}}{2} = \lambda_{кр}$. Отсюда $\lambda_{кр} = \frac{\lambda_ф \sin(\varphi_{кр2}/2-\varphi_{кр1}/2)}{\varphi_{ф2}/2-\varphi_{ф1}/2}$. Подставляя числовые данные, получим $\lambda_{кр} = 706$ нм.

16.44 Найти наибольшим порядок k спектра для желтой линии натрия (λ = 589 нм), если постоянная дифракционной решетки d = 2 мкм.

Решение

Из формулы дифракционной решетки найдем $k = \frac{d\sin\varphi}{\lambda}$.

Поскольку $\sin\varphi \le 1$, то $k \le \frac{d}{\lambda} = 3{,}4$, т. е. $k_{max} = 3$.

16.45 На дифракционную решетку нормально падает пучок монохроматического света. Максимум третьего порядка наблюдается под углом φ = 36°48′ к нормали. Найти постоянную d решетки, выраженную в длинах волн падающего света.

Решение

По формуле дифракционной решетки $d\sin\varphi = 3\lambda$, откуда $\frac{d}{\lambda} = \frac{3}{\sin\varphi} = 5$, т. е. $d = 5\lambda$.

16.46 Какое число максимумов k (не считая центрального) дает дифракционная решетка с постоянной решетки $d = 5\lambda$?

Решение

При $d = 5\lambda$ имеем $5\lambda\sin\varphi = k\lambda$. Отсюда наибольшее число максимумов по одну сторону от центрального равно $k_{max} = 5$. Тогда по обе стороны от центрального максимума $k = 2k_{max} = 10$.

16.47 Зрительная труба гониометра с дифракционном решеткой поставлена под углом $\varphi = 20°$ к оси коллиматора. При этом в поле зрения трубы видна красная линия спектра гелия ($\lambda_{кр} = 668$ нм). Какова постоянная d дифракционной решетки если под тем же углом видна и синяя линия ($\lambda_c = 447$ нм) более высокого порядка? Наибольший порядок спектра, которым можно наблюдать при помощи решетки, $k = 5$. Свет падает на решетку нормально.

Решение

Имеем $d\sin\varphi = k_1\lambda_{кр}$; $d\sin\varphi = k_2\lambda_c$, откуда $\frac{k_2}{k_1} = \frac{\lambda_{кр}}{\lambda_c} = 1{,}5$. Поскольку значения k_1 и k_2 должны быть целыми числами, то очевидно, что $k_1 = 2$; $k_2 = 3$. Тогда $d = \frac{k_1\lambda_{кр}}{\sin\varphi} = 3{,}9\cdot10^{-6}$ м.

16.48 Какова должна быть постоянная d дифракционной решетки чтобы в первом порядке были разрешены линия спектра калия $\lambda_1 = 404{,}4$ и $\lambda_2 = 404{,}7$ нм? Ширина решетки $a = 3$ см.

Решение

Разрешающая способность дифракционной решетки определяется формулой $\frac{\lambda_1}{\Delta\lambda} = kN$. По условию $k = 1$, тогда $\frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} = N = \frac{a}{d}$, откуда $d = \frac{a(\lambda_2 - \lambda_1)}{\lambda_1} = 22\cdot10^{-6}$ м.

16.49 Какова должна быть постоянная d дифракционной решетки, чтобы в первом порядке был разрешен дублет натрия $\lambda_1 = 589$ нм и $\lambda_2 = 589{,}6$ нм? Ширина решетки $a = 2{,}5$ см.

Решение

Имеем $d = \frac{a(\lambda_2 - \lambda_1)}{\lambda_1}$ (см. задачу 16.48). Подставляя числовые данные, получим $d = 25{,}5\cdot10^{-6}$ м.

16.50 Постоянная дифракционной решетки $d = 2$ мкм. Какую разность длин волн $\Delta\lambda$ может разрешить эта решетка в области желтых лучей ($\lambda = 600$ нм) в спектре второго порядка? Ширина решетки $a = 2{,}5$ см.

Решение

Имеем $\frac{\lambda}{\Delta\lambda} = k\frac{a}{d}$ (см. задачу 16.48), откуда $\Delta\lambda = \frac{\lambda d}{ka} = 24\cdot10^{-12}$ м.

16.51 Постоянная дифракционной решетки $d = 2{,}5$ мкм. Найти угловую дисперсию $d\varphi/d\lambda$ решетки для $\lambda = 589$ нм в спектре первого порядка.

Решение

Имеем $d\sin\varphi = k\lambda$. Дифференцируя, получим $d\cos\varphi d\varphi = kd\lambda$ или $\frac{d\varphi}{d\lambda} = \frac{k}{d\cos\varphi}$. Подставляя числовые данные, получим $\sin\varphi = 0{,}236$, откуда $\varphi \approx 13{,}5°$. Тогда $\cos\varphi = 0{,}972$ и $\frac{d\varphi}{d\lambda} = 4{,}1\cdot10^5$ рад/м.

16.52 Угловая дисперсия дифракционной решетки для λ = 668 нм в спектре первого порядка $d\varphi/d\lambda$ = 2,02·10^5 рад/м. Найти период d дифракционной решетки.

Решение

По формуле дифракционной решетки $d\sin\alpha=\lambda$ — (1). Кроме того, $\frac{d\varphi}{d\lambda}=\frac{1}{d\cos\varphi}$ — (2) (см. задачу 16.51). Из (1) найдем $\sin\varphi=\frac{\lambda}{d}$ или $\cos\varphi=\sqrt{1-\frac{\lambda^2}{d^2}}$ — (3). Подставляя (3) в (2), получим $\frac{d\varphi}{d\lambda}=\frac{1}{d\sqrt{1-\lambda^2/d^2}}=\frac{1}{\sqrt{d^2-\lambda^2}}$. Отсюда $d=\sqrt{\frac{1}{(d\varphi/d\lambda)^2}+\lambda^2}=5\cdot10^{-6}$ м.

16.53 Найти линейную дисперсию D дифракционной решетки в условиях предыдущей задачи, если фокусное расстояние линзы, проектирующей спектр на экран, равно F = 40 см.

Решение

Линейная дисперсия D дифракционной решетки определяется по формуле $D=F\frac{d\varphi}{d\lambda}$. Подставляя числовые данные, получим D = 81 мкм/(Н·м).

16.54 На каком расстоянии l друг от друга будут находиться на экране две линии ртутной дуги (λ_1 = 577 нм и λ_2 = 579,1 нм) в спектре первого порядка, полученном при помощи дифракционной решетки? Фокусное расстояние линзы проектируещей спектр на экран, F = 0,6 м. Постоянная решетки d = 2 мкл.

Решение

Согласно условию главных максимумов дифракционной решетки $d\sin\varphi=k\lambda$ — (1). В нашем случае $k=1$, поэтому для первой и второй линии ртутной дуги из формулы (1) соответственно имеем $d\sin\varphi_1=\lambda_1$ и $d\sin\varphi_2=\lambda_2$, откуда $\sin\varphi_1=\frac{\lambda_1}{d}$ — (2) и $\sin\varphi_2=\frac{\lambda_2}{d}$ — (3). Поскольку расстояние от линзы до решетки $f<<F$, где F — фокусное расстояние линзы, то $\frac{l_1}{F}=tg\varphi_1$ и $\frac{l_2}{F}=tg\varphi_2$, откуда $l_1=Ftg\varphi_1$ — (4) и $l_2=Ftg\varphi_2$ — (5). Расстояние между двумя линиями ртутной дуги на экране равно $l=l_2-l_1$ — (6). Подставляя (4) и (5) в (6), получаем $l=F(tg\varphi_2-tg\varphi_1)$ — (7). По определению $tg\varphi=\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}$ — (8) и, согласно основному тригонометрическому тождеству, $\sin^2\varphi+\cos^2\varphi=1$, откуда $\cos\varphi=\sqrt{1-\sin^2\varphi}$ — (9). Подставляя (9) в (8), получаем $tg\varphi=\frac{\sin\varphi}{\sqrt{1-\sin^2\varphi}}$ — (10), затем, подставляя (2) и (3) в (10), находим $tg\varphi_1=\frac{\lambda_1}{\sqrt{d^2-\lambda_1^2}}$ — (11) и $tg\varphi_2=\frac{\lambda_2}{\sqrt{d^2-\lambda_2^2}}$ — (12). Подставляя (11) и (12) в (7), окончательно получаем $l=F\left(\frac{\lambda_2}{\sqrt{d^2-\lambda_2^2}}-\frac{\lambda_1}{\sqrt{d^2-\lambda_1^2}}\right)=0{,}68$ мм.

16.55 На дифракционную решетку нормально падает пучок света. Красная линия (λ_1 = 630 нм) видна в спектре третьего порядка под углом φ = 60°. Какая спектральная линия λ_2 видна под этим же углом в спектре четвертого порядка? Какое число штрихов N_0 на единицу длины имеет дифракционная решетка? Найти угловую дисперсию $d\varphi/d\lambda$ этой решетки для длины волны λ_1 = 630 нм в спектре третьего порядка.

Решение

Из условия главных максимумов дифракционной решетки $d\sin\varphi = k\lambda$ — (1) имеем: $d\sin\varphi = k_1\lambda_1$ — (2) и $d\sin\varphi = k_2\lambda_2$ — (3), где $k_1 = 3$ и $k_2 = 4$. Приравнивая правые части уравнений (2) и (3), получаем $k_1\lambda_1 = k_2\lambda_2$, откуда $\lambda_2 = \frac{k_1\lambda_1}{k_2} = 472{,}5$ м. По определению число штрихов на единицу длины $N_0 = \frac{1}{d}$, откуда $d = \frac{1}{N_0}$ — (4). Подставляя (4) в (1), получаем $\frac{\sin\varphi}{N_0} = k\lambda$, откуда $N_0 = \frac{\sin\varphi}{k\lambda} = 458$ мм$^{-1}$. Дифференцируя уравнение (1), получаем $d\cos d\varphi = kd\lambda$, откуда угловая дисперсия дифракционной решетки $\frac{d\varphi}{d\lambda} = \frac{k}{d\cos\varphi}$ — (5). Подставляя (4) в (5), получаем $\frac{d\varphi}{d\lambda} = \frac{kN_0}{\cos\varphi} = 2{,}75\cdot10^4$ рад/см.

16.56 Для какой длины волны λ дифракционная решетка имеет угловую дисперсию $d\varphi/d\lambda = 6{,}3\cdot10^5$ рад/м в спектре треного порядка? Постоянная решетки d = 5 мкм.

Решение

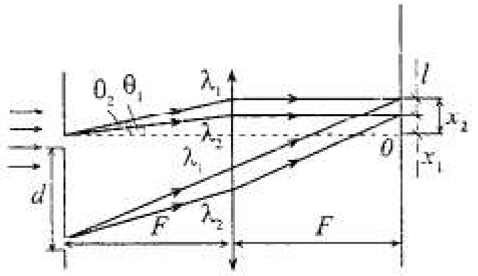
Угловая дисперсия дифракционной решетки (см. задачу 16.55) $\frac{d\varphi}{d\lambda} = \frac{k}{d\cos\varphi}$, откуда $\cos\varphi = \frac{k}{d}\frac{d\lambda}{d\varphi}$ — (1). Из основного тригонометрического тождества (см. задачу 16.54) $\cos\varphi = \sqrt{1-\sin^2\varphi}$ — (2). Приравнивая правые части уравнений (1) и (2), получаем $\frac{k}{d}\frac{d\lambda}{d\varphi} = \sqrt{1-\sin^2\varphi}$, откуда

$$\sin\varphi = \sqrt{1-\left(\frac{k}{d}\right)^2\left(\frac{d\lambda}{d\varphi}\right)^2}$$

— (3). Из условия главных максимумов дифракционной решетки $d\sin\varphi = k\lambda$ длина волны $\lambda = \frac{d}{k}\sin\varphi$ — (4). Подставляя (3) в (4), окончательно получаем $\lambda = \sqrt{\frac{d^2}{k^2} - \left(\frac{d\lambda}{d\varphi}\right)^2} = 508$ нм.

16.57 Какое фокусное расстояние F должна иметь линза, проектирующая па экран спектр, полученный при помощи дифракционной решетки, чтобы расстояние между двумя линиями калия λ_1 = 404,4 нм и λ_2 = 404,7 нм в спектре первого порядка было равным l = 0,1 мм? Постоянная решетки d = 2 мкм.

Решение



Расстояние от решетки до линзы равно расстоянию от линзы до экрана и равно фокусному расстоянию линзы F. Из рисунка видно, что расстояние $x_1 = Ftg\theta_1$, а $x_2 = Ftg\theta_2$. Поскольку $x_2 - x_1 = l$, то можно записать $l = F(tg\theta_2 - tg\theta_1)$ — (1). Т. к. $tg\theta_2 - tg\theta_1$ есть приращение функции $f(\theta) = tg\theta$, то можно принять $tg\theta_2 - tg\theta_1 = (tg\theta)' \cdot \Delta\theta$ — (2). Кроме того, $\Delta\theta = \frac{sin\,\theta_2 - sin\,\theta_1}{(sin\,\theta)'}$ — (3). Подставив (3) в (2) и вычислив производные, найдем $tg\theta_2 - tg\theta_1 = \frac{sin\theta_2 - sin\theta_1}{cos^3\theta_1}$ — (4). По формуле дифракционной решетки $d\,sin\theta_1 = \lambda_1$; $d\,sin\theta_2 = \lambda_2$, откуда $sin\theta_1 = \frac{\lambda_1}{d}$ и $sin\theta_2 = \frac{\lambda_2}{d}$. Тогда уравнение (4) можно записать в виде $tg\theta_2 - tg\theta_1 = \frac{\lambda_2/d - \lambda_1/d}{cos^3\theta_1} = \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{d\,cos^3\theta_1}$ — (5). Подставив (5) в (1), получим $l = \frac{F(\lambda_2 - \lambda_1)}{d\,cos^3\theta_1}$, откуда $F = \frac{dl\,cos^3\theta}{\lambda_2 - \lambda_1}$ — (6). Величину $cos\theta_1$ найдем из соотношения $cos\theta_1 = \sqrt{1 - sin^2\theta_1} = \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda_1}{d}\right)^2}$; $cos\theta_1 = 0{,}9793$. Подставляя числовые данные в (6), получим $F = 0{,}65$ м.

16.58 Найти угол $i_Б$ полной поляризации при отражении света от стекла, показатель преломления которого n = 1,57.

Решение

Согласно закону Брюстера свет, отраженный от диэлектрика, полностью поляризован в том случае, если тангенс угла падения $tgi_Б = \frac{n_2}{n_1}$, где $n_1 = 1$ — показатель преломления воздуха, $n_2 = 1{,}57$ — показатель преломления стекла. Отсюда $i_Б = arctgn_2 = 57{,}5°$.

16.59 Предельный угол полного внутреннего отражения для некоторого вещества i = 45°. Найти для этого вещества угол $i_Б$ полной поляризации.

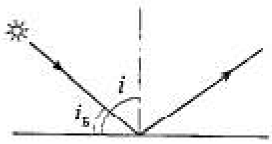
Решение

Предельный угол полного внутреннего отражения для границы раздела вещество — воздух определяется соотношением $sin\,i = \frac{1}{n}$. По условию $i = 45°$, отсюда $n = \frac{2}{\sqrt{2}} = 1{,}4$.

По закону Брюстера $tg i_Б = n$, откуда $i_Б = arctg(n) = 54{,}7°$.

16.60 Под каким углом $i_Б$ к горизонту должно находиться Солнце, чтобы его лучи, отраженные от поверхности озера, были наиболее полно поляризованы?

Решение



Пусть i — угол падения солнечных лучей, $i_Б$ — угол между направлением на Солнце и горизонтом. По закону Брюстера $tg i_Б = n$, где $n = 1{,}33$ — показатель преломления воды. Тогда $i = arctg(n) = 53°$. Отсюда $i_Б = 90° - i = 37°$.

16.61 Найти показатель преломления n стекла, если при отражении от него света отраженный луч будет полностью поляризован при угле преломления β = 30°.

Решение

По закону Брюстера $tg i_Б = n$. В связи с обратимостью хода лучей можно записать $tg\beta = \frac{1}{n}$, откуда $n = \frac{1}{tg\beta} = 1{,}73$.

16.62 Луч света проходит через жидкость, налитую в стеклянный (n = 1,5) сосуд, и отражается от дна. Отраженный луч полностью поляризован при падения его на дно сосуда под углом $i_Б$ = 42°37′. Найти показатель преломления жидкости. Под каким углом i должен падать на дно сосуда луч света, идущий в этой жидкости, чтобы наступило полное внутреннее отражение?

Решение

По закону Брюстера $tg(i_Б) = \frac{n_2}{n_1}$ — (1), где $n_2 = 1{,}5$ — показатель преломления стекла, n_1 — показатель преломления жидкости. Из (1) найдем $n_1 = \frac{n_2}{tg(i_Б)} = 1{,}63$. Полное внутреннее отражение наступает при условии $sin\,i = \frac{n_2}{n_1} = 0{,}92$, откуда угол падения $i \approx 67°$.

16.63 Пучок поляризованного света (λ = 589 нм) падает на пластинку исландского шпата перпендикулярно к его оптической оси. Найти длины волн λ_0 и λ_e обыкновенного и необыкновенного лучей в кристалле, если показатели преломления исландского шпата для обыкновенного и для необыкновенного лучей равны n_0 = 1,66 и n_e = 1,49.

Решение

Имеем $\lambda_0 = \dfrac{\lambda}{n_0} = 355$ нм, $\lambda_e = \dfrac{\lambda}{n_e} = 395$ нм.

16.64 Найти угол φ между главными плоскостями поляризатора и анализатора, если интенсивность естественного света проходящего через поляризатор и анализатор, уменьшается в 4 раза.

Решение

После прохождения через поляризатор луч имеет интенсивность $I_1 = 0.5 I_0$, где I_0 — интенсивность естественного света. После прохождения через анализатор луч имеет интенсивность $I_2 = I_1 \cos^2\varphi = 0.5 I_0 \cos^2\varphi$. По условию $\dfrac{I_2}{I_0} = 0.25$, тогда $\cos^2\varphi = 0,5$ и $\varphi = 45°$.

16.65 Естественный свет проходит через поляризатор и анализатор, поставленные так, что угол между их главными плоскостями равен φ. Как поляризатор, так и анализатор поглощают и отражают 8% падающего на них света. Оказалось, что интенсивность луча, вышедшего из анализатора, равна 9% интенсивности естественного света, падающего на поляризатор. Найти угол φ.

Решение

Согласно закону Малюса интенсивность света, прошедшего через поляризатор и анализатор, $I = I_0'' \cos^2\varphi$ — (1), где I_0'' — интенсивность естественного света с учетом поглощения и отражения поляризатора и анализатора. Интенсивность света, прошедшего через поляризатор, равна $I_0' = (1 - 0{,}08) I_0 = 0{,}92 I_0$ — (2). Интенсивность света, прошедшего через анализатор с учетом (2), равна $I_0'' = 0{,}92 I_0' = 0{,}8464 I_0$ — (3). По условию интенсивность света, вышедшего из анализатора, $I = 0{,}09 I_0$ — (4). Из формулы (1) имеем: $\cos\varphi = \sqrt{\dfrac{I}{I_0''}}$, откуда угол между главными плоскостями поляризатора и анализатора $\varphi = \arccos\sqrt{\dfrac{I}{I_0''}}$ — (5). Подставляя (3) и (4) в (5), получаем $\varphi = 70°54'$.

16.66 Найти коэффициент отражения ρ естественного света, падающего на стекло (n = 1,54) под углом $i_Б$ полной поляризации. Найти степень поляризации P лучей прошедших в стекло.

Решение

Коэффициент отражения падающего света $\rho = \frac{I}{I_0}$, где $I = I_\perp + I$, причем $I_\perp = 0{,}5I_0 \frac{sin^2(i-\beta)}{sin^2(i+\beta)}$, $I = 0{,}5I_0 \times \frac{tg^2(i-\beta)}{tg^2(i+\beta)}$. В нашем случае при падении под углом полной поляризации $tg(i_Б) = n = 1{,}54$; следовательно, $i_Б = 57°$. Т. к. $i_Б + \beta = 90°$, то угол преломления $\beta = 33°$ и $i_Б - \beta = 24°$. Поэтому $I_\perp = 0{,}5I_0 \frac{sin^2 24°}{sin^2 90°} = 0{,}083I_0$, $I = 0.5I_0 \frac{tg^2 24°}{tg^2 90°} = 0$, т. е. в отраженном свете при угле падения, равном углу полной поляризации, колебания происходят только в плоскости, перпендикулярной к плоскости падения. При этом $\rho = \frac{I}{I_0} = \frac{I_\perp + I}{I_0} = 0{,}083$, т. е. отражается от стекла только 8,3% энергии падающих естественных лучей. Следовательно, энергия колебаний, перпендикулярных к плоскости падения и прошедших во вторую среду, будет составлять 41,7% от общей энергии лучей, упавших на границу раздела. а энергия колебаний, лежащих в плоскости падения, равна 50%. Степень поляризации лучей, прошедших во вторую среду, $P = \frac{I - I_\perp}{I + I_\perp} = \frac{0{,}083}{0{,}917} = 0{,}091 = 9{,}1\%$.

16.67 Лучи естественного света проходят сквозь плоскопараллельную стеклянную пластинку (n = 1,54), падая на пол под углом $i_Б$ полной поляризации. Найти степень поляризации P лучей, прошедших сквозь пластинку.

Решение

При падении естественного луча на стеклянную пластинку под углом полной поляризации преломленный луч имеет интенсивность $I_1 = 0{,}917I_0$ (см. задачу 16.66). В этом преломленном луче $0{,}417I_0$ составляют колебания, перпендикулярные к плоскости падения, и $0{,}5I_{\parallel}$ — колебания, параллельные плоскости падения. Интенсивность луча, отразившегося от второй грани пластинки, $I_2 = 0{,}083 \cdot 0{,}0917I_0 = 0{,}076I_0$. Интенсивность луча, вышедшего из пластинки в воздух, будет $I_3 = 0{,}917I_0 - 0{,}076I_0$, причем $0{,}5I_0$ составляют лучи с колебаниями, параллельными плоскости падения, и $0.341I_0$ — с колебаниями, перпендикулярными к плоскости падения. Тогда степень поляризации $P = \frac{I_\parallel - I_\perp}{I_\parallel + I_\perp} = \frac{0.159}{0.841} = 18{,}9\%$, т. е. степень поляризации увеличилась. На этом основании в качестве поляризатора употребляется «стопа» плоскопараллельных стеклянных пластинок («стопа Столетова»).

16.68 Найти коэффициент отражения ρ и степень поляризации P_1 отраженных лучей при падении естественного света на стекло (n = 1,5) под углом i = 45°. Какова степень поляризации P_2 преломленных лучей?

Решение

Коэффициент отражения падающего света $\rho = \frac{I}{I_0}$ — (1), где $I = I_\perp + I$ — (2), причем $I_\perp = \frac{I_0}{2}\left[\frac{\sin(i-\beta)}{\sin(i+\beta)}\right]^2$ — (3) и $I = \frac{I_0}{2}\left[\frac{tg(i-\beta)}{tg(i+\beta)}\right]^2$ — (4). Показатель преломления среды $n = \frac{\sin i}{\sin\beta}$, откуда $\sin\beta = \frac{\sin i}{n}$ или $\beta = \arcsin\left(\frac{\sin i}{n}\right)$ — (5). Подставляя (5) в (3) и (4), получаем

$$I_\perp = \frac{I_0}{2}\left[\frac{\sin(i-\arcsin(\sin(i)/n))}{\sin(i+\arcsin(\sin(i)/n))}\right]^2$$ — (6) и

$$I = \frac{I_0}{2}\left[\frac{tg(i-\arcsin(\sin(i)/n))}{tg(i+\arcsin(\sin(i)/n))}\right]^2$$ — (7). Подставляя (6) и (7) в (2), получаем

$$I = \frac{I_0}{2}\left\{\left[\frac{\sin(i-\arcsin(\sin(i)/n))}{\sin(i+\arcsin(\sin(i)/n))}\right]^2 + \left[\frac{tg(i-\arcsin(\sin(i)/n))}{tg(i+\arcsin(\sin(i)/n))}\right]^2\right\}$$ — (8). Подставляя (8) в (1), окончательно получаем

$$\rho = \frac{1}{2}\left\{\left[\frac{\sin(i-\arcsin(\sin(i)/n))}{\sin(i+\arcsin(\sin(i)/n))}\right]^2 + \left[\frac{tg(i-\arcsin(\sin(i)/n))}{tg(i+\arcsin(\sin(i)/n))}\right]^2\right\};$$ $\rho = 0{,}0503\cdot 100\% = 5{,}03\%$.

Степень поляризации отраженных лучей $P_1 = \frac{I_\perp - I}{I_\perp + I}$ — (9). Подставляя (6) и (7) в (9), получаем

$$P_1 = \frac{\left[\frac{\sin(i-\arcsin(\sin(i)/n))}{\sin(i+\arcsin(\sin(i)/n))}\right]^2 - \left[\frac{tg(i-\arcsin(\sin(i)/n))}{tg(i+\arcsin(\sin(i)/n))}\right]^2}{\left[\frac{\sin(i-\arcsin(\sin(i)/n))}{\sin(i+\arcsin(\sin(i)/n))}\right]^2 + \left[\frac{tg(i-\arcsin(\sin(i)/n))}{tg(i+\arcsin(\sin(i)/n))}\right]^2};$$

$P_1 = 0{,}84\cdot 100\% = 84\%$. Степень поляризации преломленных лучей $P_2 = \rho P_1 = 0{,}0422\cdot 100\% = 4{,}22\%$.

§ 17. Элементы теории относительности

17.1 При какой относительной скорости v движения релятивистское сокращение длины движущегося тела составляет 25%?

Решение

Имеем $l = l_0\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$ — (1). По условию $\frac{l_0 - l}{l_0} = 1 - \frac{l}{l_0} = 0{,}25$, отсюда $l = 0{,}75 l_0$ — (2). Подставляя (2) в (1), получим $\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} = 0{,}75$; $1-\frac{v^2}{c^2} = 0{,}5625$; $v = \sqrt{c^2(1-0{,}5625)} = $ $= 1{,}98 \cdot 10^8$ м/с.

17.2 Какую скорость v должно иметь движущееся тело, чтобы его предельные размеры уменьшились в 2 раза?

Решение

Пусть тело движется с постоянной скоростью v относительно инерциальной системы K'. Поскольку в системе K' длина тела $l = l_0\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}$, а по условию задачи $l_0 = 2l$, то $l = 2l\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}$. Отсюда $\frac{1}{4} = 1-\frac{v^2}{c^2}$, следовательно, $v = c\sqrt{1-\frac{1}{4}} = 2{,}6 \cdot 10^8$ м/с.

17.3 Мезоны космических лучей достигают поверхности Земли с самыми разнообразными скоростями. Найти релятивистское сокращение размеров мезона, скорость которого равна 95% скорости света.

Решение

Т. к. поперечные размеры тела при его движении не меняются, то изменение объема тела определяется лоренцовым сокращением продольного размера, определяемого формулой $l = l_0\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}$. Следовательно, объем тела сокращается по аналогичной формуле $V = V_0\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}$. Подставляя числовые данные, получим $V = 0{,}312V_0$. Тогда относительное изменение объема $\delta = \frac{V_0 - V}{V_0} \cdot 100\% = 68{,}8\%$.

17.4 Во сколько раз увеличивается продолжительность существования нестабильной частицы по часам неподвижного наблюдателя, если она начинает двигаться со скоростью, составляющей 99% скорости света?

Решение

Промежуток времени $\Delta\tau$ в системе, движущейся со скоростью v по отношению к наблюдателю, связан с промежутком времени $\Delta\tau_0$ в неподвижной для наблюдателя системе соотношением $\Delta\tau = \frac{\Delta\tau_0}{\sqrt{1-\beta^2}}$ — (1), где $\beta = \frac{v}{c}$ — (2) — относительная скорость, c — скорость света. По условию $\beta = 99\% = 0{,}99$. Из формулы (1) получаем $\frac{\Delta\tau}{\Delta\tau_0} = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = 7{,}08$ раза.

17.5 Мезон, входящий в состав космических лучей, движется со скоростью, составляющей 95% скорости света. Какой промежуток времени $\Delta\tau$ по часам неподвижного наблюдателя соответствует одной секунде «собственного времени» мезона?

Решение

Промежуток времени по часам неподвижного наблюдателя (см. задачу 17.4) составляет $\Delta\tau = \frac{\Delta\tau_0}{\sqrt{1-\beta^2}}$ — (1), где $\Delta\tau_0 = 1$ с — «собственное время» мезона, $\beta = 95\% = 0{,}95$. Подставляя числовые данные, получим $\Delta\tau = 3{,}2$ с.

17.6 На сколько увеличится масса α-частицы при ускорении ее от начальной скорости, равной нулю, до скорости, равной 0,9 скорости света?

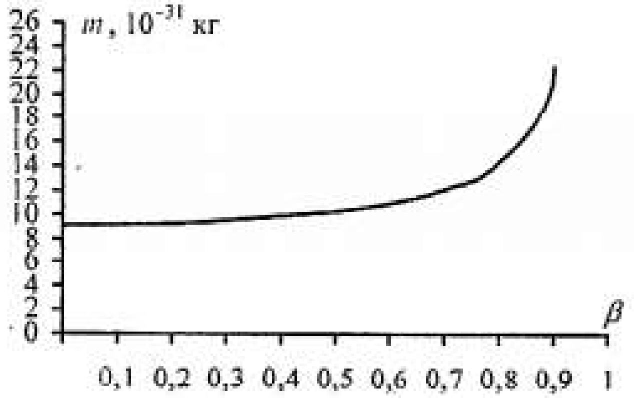
Решение

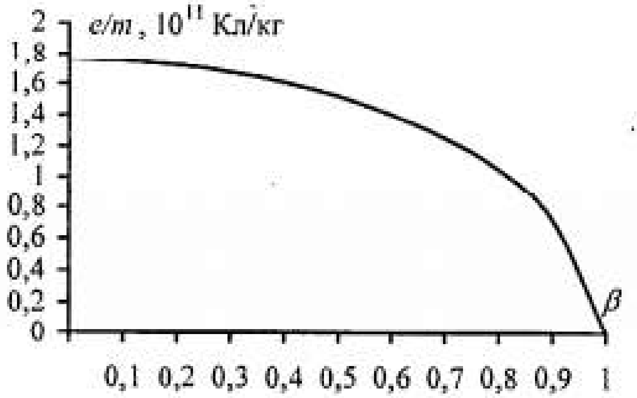
Зависимость массы m тела от скорости его движения дается уравнением $m = \frac{m_0}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$, где $m_0 = 6{,}6\cdot10^{-27}$ кг — масса покоя α-частицы. По условию $v = 0{,}9\cdot c$, тогда $m = \frac{m_0}{\sqrt{1-0{,}81c^2/c^2}} = 2{,}3m_0$. Отсюда $\Delta m = 2{,}3m_0 - m_0 = 1{,}3m_0 = 8{,}6\cdot10^{-27}$ кг.

17.7 Найти отношение e/m заряда электрона к его массе для скоростей: а) $v << c$; б) $v = 2\cdot10^8$ м/с; В) $v = 2{,}2\cdot10^8$ м/с; г) $v = 2{,}4\cdot10^8$ м/с; д) $v = 2{,}6\cdot10^8$ м/с; е) $v = 2{,}8\cdot10^8$ м/с. Составить таблицу и построить графики зависимостей m и e/m от величины $\beta = v/c$ для указанных скоростей.

Решение

Зависимость массы электрона m от скорости его движения v дается уравнением $m = \dfrac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}}$ — (1), где $m_0 = 9{,}11\times$





$\times10^{-31}$ кг — масса покоя электрона, $\beta = \dfrac{v}{c}$ — (2) — относительная скорость.

Элементарный заряд электрона $e = 1{,}6\cdot10^{-19}$ Кл. Составим таблицу и построим графики зависимостей m и $\dfrac{e}{m}$ от величины β для указанных скоростей.

v, 10^8 м/с	v<<c	2	2,2	2,4	2,6	2,8
β	0	0,67	0,73	0,8	0,87	0,93
m, 10^{-31} кг	9,11	12,22	13,4	15,18	18,26	25,38
e/m, 10^{11} Кл/кг	1,76	1,31	1,19	1,05	0,876	0,631

17.8 При какой скорости v масса движущегося электрона вдвое больше его массы покоя?

Решение

Масса движущегося электрона (см. задачу 17.7) дается уравнением $m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}}$ — (1), где $\beta = \frac{v}{c}$ — (2) — относительная скорость. Из (1) имеем $\frac{m_0}{m} = \sqrt{1-\beta^2}$ — (3). Подставляя (2) в (3), получаем $\frac{m_0}{m} = \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$ — (4). По условию $\frac{m_0}{m} = \frac{1}{2}$ — (5). Приравнивая правые части соотношений (4) и (5), получаем $\frac{1}{2} = \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$, откуда находим искомую скорость электрона $v = \frac{c\sqrt{3}}{2} = 2{,}6 \cdot 10^8$ м/с.

17.9 До какой энергии $W_к$ можно ускорить частицы в циклотроне, если относительное увеличение массы частицы не должно превышать 5%? Задачи решить для: а) электронов; б) протонов; в) дейтонов.

Решение

Имеем $W_к = m_0c^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} - 1\right) = c^2\left(\frac{m_0}{\sqrt{1-v^2/c^2}} - m_0\right)$; $W_к = c^2(m - m_0)$, откуда $\frac{W_к}{m_0} = c^2\frac{m-m_0}{m_0}$ — (1). По условию $\frac{m-m_0}{m_0} = 0{,}05$, тогда из (1) получим $W_к = 0{,}05m_0c^2$. Подставляя числовые данные, получим: а) $W_к = 25{,}6 \cdot 10^3$ эВ; б) $W_к = 47 \cdot 10^6$ эВ; в) $W_к = 94 \cdot 10^6$ эВ.

17.10 Какую ускоряющую разность потенциалов U должен пройти электрон, чтобы его скорость составляла 95% скорости света?

Решение

Согласно закону сохранения энергии $mc^2 + eU = \frac{mc^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$ или $eU = mc^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} - 1\right)$ — (1). Подставляя в (1) значение $v = 0{,}95 \cdot c$, получим $eU = 2{,}2mc^2$, откуда $U = \frac{2{,}2mc^2}{e} = 1{,}1 \cdot 10^6$ В.

17.11 Какую ускоряющую разность потенциалов U должен пройти протон, чтобы его продольные размеры стали меньше в 2 раза?

Решение

Потенциальная энергия протона, прошедшего ускоряющую разность потенциалов U, равна $W_п = eU$. Зависимость кинетической энергии протона от скорости его движения v дается уравнением $W_к = m_0c^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}-1\right)$, где $m_0 = 1{,}67\cdot10^{-27}$ — масса покоя протона, $\beta = \frac{v}{c}$ — относительная скорость. Работа, совершенная полем при перемещении протона, равна приобретенной им кинетической энергии, т. е. $eU = W_к = m_0c^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}-1\right)$ или $U = \frac{m_0c^2}{e}\times$ $\times\left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}-1\right)$ — (1). Продольные размеры протона l, движущегося со скоростью v относительно некоторой системы отсчета, связаны с продольными размерами протона l_0, неподвижного в этой системе, соотношением $l = l_0\sqrt{1-\beta^2}$, откуда $\frac{l}{l_0} = \sqrt{1-\beta^2}$ — (2). Подставляя (2) в (1), окончательно получаем $U = \frac{m_0c^2}{e}\left(\frac{l_0}{l}-1\right) = 940\,\text{МВ}$.

17.12 Найти скорость v мезона, если его полная энергия в 10 раз больше энергии покоя.

Решение

Полная энергия мезона W складывается из его кинетической энергии $W_к$ и энергии покоя W_0. Поскольку $W_к = m_0c^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}-1\right)$, а $W_0 = m_0c^2$, то $W = W_к + W_0 =$ $= \frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\beta^2}}$. По условию $\frac{W}{W_0} = 10$, т. е. $\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = 10$. Отсюда $\beta = \frac{v}{c} = 0{,}995$; $v = \beta c = 2{,}985\cdot10^8$ м/с.

17.13 Какую долю β скорости света должна составлять скорость частицы, чтобы ее кинетическая энергия была равна ее энергии покоя?

Решение

Кинетическая энергия частицы $W = mc^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}-1\right)$, где $\beta = \frac{v}{c}$ и есть искомая величина. По условию $W = W_0 = mc^2$.

Тогда $mc^2 = mc^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}-1\right)$, откуда $\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = 2$; $\beta = 0{,}866 \cdot 100\% = 86{,}6\%$.

17.14 Синхрофазотрон дает пучок протонов с кинетической энергией $W_к$ = 10 ГэВ. Какую долю β скорости света составляет скорость протонов в этом пучке?

Решение

Зависимость кинетической энергии протонов от скорости их движения дается уравнением $W_к = m_0c^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}-1\right)$. Отсюда доля скорости протонов от скорости света $\beta = \sqrt{1-\frac{m_0^2c^4}{\left(W_к + m_0c^2\right)^2}} = 0{,}996 \cdot 100\% = 99{,}6\%$.

17.15 Найти релятивистское сокращение размеров протонов в условиях предыдущей задачи.

Решение

Диаметр протона d, движущегося со скоростью v относительно некоторой системы отсчета, связан с диаметром протона d_0, неподвижного в этой системе, соотношением $d = d_0\sqrt{1-\beta^2}$ — (1). Из задачи 17.14 доля скорости протонов от скорости света $\beta = 99{,}6\% = 0{,}996$. Релятивистское сокращение размеров протона из формулы (1) равно $\frac{d_0 - d}{d_0} = 1-\sqrt{1-\beta^2} = 0{,}911 \cdot 100\% = 91{,}1\%$.

17.16 Циклотрон дает пучок электронов с электрической энергией $W_к$ = 0,67 МэВ. Какую долю β скорости света составляет скорость электронов в этом пучке?

Решение

Доля скорости электронов от скорости света (см. задачу 17.14) равна $\beta = \sqrt{1-\frac{m_0^2c^4}{\left(W_к + m_0c^2\right)^2}} = 0{,}899 \cdot 100\% = 89{,}9\%$.

17.17 Составить для электронов и протонов таблицу зависимости их кинетической энергии $W_к$ от скорости v (в долях скоростей света) для значений β, равных: 0,1; 0,5; 0,6; 0,7; 0,8; 0,9; 0,95; 0,999.

Решение

Зависимость кинетической энергии электронов и протонов от скорости их движения дается уравнением $W_к = m_0c^2 \times \times \left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1\right)$ — (1), где масса покоя электрона $m_{0(e)} = 9{,}11 \times \times 10^{-31}$ кг, масса покоя протона $m_{0(p)} = 1{,}67 \cdot 10^{-27}$ кг. Подставляя в уравнение (1) значения β, заполняем таблицу:

β	0,1	0,5	0,6	0,7
$W_{к(e)}$, Дж	$9{,}2 \cdot 10^{-17}$	$1{,}26 \cdot 10^{-16}$	$2{,}04 \cdot 10^{-16}$	$3{,}28 \cdot 10^{-16}$
$W_{к(p)}$, Дж	$1{,}5 \cdot 10^{-12}$	$1{,}74 \cdot 10^{-11}$	$3{,}76 \cdot 10^{-11}$	$6{,}01 \cdot 10^{-11}$

Продолжение

β	0,8	0,9	0,95	0,999
$W_{к(e)}$, Дж	$5{,}46 \cdot 10^{-16}$	$1{,}06 \cdot 10^{-15}$	$1{,}81 \cdot 10^{-15}$	$1{,}75 \cdot 10^{-14}$
$W_{к(p)}$, Дж	$1{,}01 \cdot 10^{-10}$	$1{,}95 \cdot 10^{-10}$	$3{,}31 \cdot 10^{-10}$	$3{,}21 \cdot 10^{-9}$

17.18 Масса движущегося электрона вдвое больше его массы покоя. Найти кинетическую энергию $W_к$ электрона.

Решение

Масса движущегося электрона (см. задачу 17.7) дается уравнением $m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}}$ — (1), где $m_0 = 9{,}11 \cdot 10^{-31}$ кг — его масса покоя. Кинетическая энергия движущегося электрона $W_к = m_0c^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1\right)$ — (2). Из уравнения (1) имеем $\frac{m}{m_0} = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$ — (3). Подставляя (3) в (2), получаем

$$W_к = m_0c^2\left(\frac{m}{m_0} - 1\right) = 8{,}2 \cdot 10^{-14} \text{ Дж}.$$

17.19 Какому изменению массы Δm соответствует изменение энергии иа $\Delta W = 4{,}19$ Дж?

Решение

Зависимость кинетической энергии тела от скорости его движения дается уравнением $W_к = m_0c^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}-1\right)$ — (1), а зависимость массы тела от скорости его движения — $m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}}$ — (2). Изменение массы тела в процессе его движения $\Delta m = m - m_0$ — (3). Подставляя (2) в (3), получаем $\Delta m = m_0\left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}-1\right)$ — (4). Поскольку кинетическая энергия покоя равна нулю, то изменение кинетической энергии $\Delta W_к = W_к$ — (5). Подставляя (1) в (5) с учетом (4), получаем $\Delta W_к = \Delta mc^2$, откуда изменение массы тела $\Delta m = \frac{\Delta W_к}{c^2} = 4{,}6\cdot10^{-17}$ кг.

17.20 Найти изменение энергии ΔW, соответствующее изменению массы на $\Delta m = 1$ а.е.м.

Решение

Изменение кинетической энергии тела в процессе его движения (см. задачу 17.19) определяется соотношением $\Delta W_к = \Delta mc^2 = 934$ МэВ.

17.21 Найти изменение энергии ΔW, соответствующее изменению массы на $\Delta m = \Delta m_e$.

Решение

Изменение кинетической энергии тела в процессе его движения (см. задачу 17.19) определяется соотношением $\Delta W_к = \Delta mc^2$. По условию $\Delta m = m_e = 9{,}11\cdot10^{-31}$ кг, тогда $\Delta W_к = 8{,}2\cdot10^{-14}$ Дж.

17.22 Найти изменение массы Δm_μ, происходящее при образовании $\nu = 1$ моль воды, если реакция образования воды такова: $2H_2+O_2 = 2H_2O + 5{,}75\cdot10^5$ Дж.

Решение

Имеем $\Delta m_\mu = \frac{\Delta W}{c^2}$ — (1). При образовании двух молей воды освобождается энергия $\Delta W' = 5{,}75\cdot10^5$ Дж, тогда $\Delta W = \frac{\Delta W'}{2} = 2{,}875\cdot10^5$ Дж — (2). Подставляя (2) в (1), получаем $\Delta m_\mu = 3{,}2\cdot10^{-9}$ г/моль.

17.23 При делении ядра урана $^{215}_{92}U$ освобождается энергия W = 200 МэВ. Найти изменение массы Δm_μ при делении 1 моль урана.

Решение

Изменение массы тела в процессе его движения (см. задачу 17.19) определяется соотношением $\Delta m = \frac{\Delta W_к}{c^2}$ — (1). При делении ν молей урана освобождается энергия $\Delta W = W \nu N_A$ — (2), где W — энергия, освобождаемая при делении одного ядра. Подставляя (2) в (1), получаем $\Delta m_\mu = \frac{W \nu N_A}{c^2} = 0{,}214$ г/моль.

17.24 Солнце излучает поток энергии $P = 3{,}9 \cdot 10^{26}$ Вт. За какое время τ масса Солнца уменьшится в 2 раза? Излучение Солнца считать постоянным.

Решение

Поток энергии, излучаемый Солнцем, определяется соотношением $P = \frac{\Delta W_к}{\tau}$ — (1). Изменение энергии Солнца в процессе излучения (см. задачу 17.19) $\Delta W_к = \Delta mc^2$ — (2). По условию $\Delta m = \frac{1}{2} m_0$ — (3), где $m_0 = 1{,}989 \cdot 10^{30}$ — начальная масса Солнца. Подставляя (2) в (1), с учетом (3), получаем $P = \frac{m_0 c^2}{2\tau}$, откуда время, за которое масса Солнца уменьшится в 2 раза, равно $\tau = \frac{m_0 c^2}{2P} = 7{,}2 \cdot 10^{12}$ лет.

§ 18. Тепловое излучение

18.1 Найти температуру T печи, если известно, что излучение из отверстия в ней площадью $S = 6{,}1$ см^2 имеет мощность $N = 34{,}6$ Вт. Излучение считать близким к излучению абсолютно черного тела.

Решение

Мощность излучения из отверстия печи определяется соотношением $N = R_э S$ — (1). Поскольку по условию излучение близко к излучению абсолютно черного тела, то по закону Стефана — Больцмана $R_э = \sigma T^4$ — (2), где $\sigma = 5{,}67 \cdot 10^{-8}$ Вт/(м^2·К^4) — постоянная Стефана — Больцмана. Подставляя (2) в (1), получаем $N = \sigma T^4 S$, откуда температура печи $T = \left(\dfrac{N}{\sigma S}\right)^{\frac{1}{4}} = 1000$ К.

18.2 Какую мощность N излучения имеет Солнце? Излучение Солнца считать близким к излучению абсолютно черного тела. Температура поверхности Солнца $T = 5800$ К.

Решение

Поскольку по условию излучение близко к излучению абсолютно черного тела, то мощность излучения Солнца (см. задачу 18.1) выражается соотношением $N = \sigma T^4 S$ — (1), где $S = 4\pi R_С^2$ — (2) — площадь поверхности Солнца, $R_С = 6{,}96 \cdot 10^8$ м — радиус Солнца. Подставляя (2) в (1), получаем $N = 4\pi\sigma T^4 R_С^2 = 3{,}9 \cdot 10^{26}$ Вт.

18.3 Какую энергетическую светимость $R'_э$ имеет затвердевший свинги? Отношение энергетических светимостей свинца и абсолютно черного тела для данной температуры $k = 0{,}6$.

Решение

Затвердевающий свинец ведет себя как серое тело. По закону Стефана — Больцмана для серого тела $R'_э = k\sigma T^4$, где k — отношение энергетических светимостей абсолютно черного и серого тел при данной температуре, или коэффициент черноты, $T = 600$ К — температура плавления свинца. Подставляя числовые данные, получим $R_э = 4{,}4$ кВт/м^2.

18.4 Мощность излучения абсолютно черного тела $N = 34$ кВт. Найти температуру T этого тела, если известно, что его поверхность $S = 0{,}6$ м^2.

Решение

Мощность излучения абсолютно черного тела (см. задачу 18.1) выражается соотношением $N = \sigma T^4 S = 1000$ К.

18.5 Мощность излучения раскаленной металлической поверхности $N' = 0{,}67$ кВт. Температура поверхности $T = 2500$ K ее площадь $S = 10$ см^2. Какую мощность излучения N имела бы эта поверхность, если бы она была абсолютно черной? Найти отношение k энергетических светимостей этой поверхности и абсолютно черного тела при данной температуре.

Решение

Если бы поверхность была абсолютно черной, то ее мощность излучения (см. задачу 18.1) была равна $N = \sigma T^4 S = 2{,}22$ кВт. Отношение энергетических светимостей поверхности и абсолютно черного тела при данной температуре равно $k = \dfrac{N'}{N} = 0{,}3$.

18.6 Диаметр вольфрамовой спирали в электрической лампочке $d = 0{,}3$ мм, длина спирали $l = 5$ см. При включении лампочки в сеть напряжением $U = 127$ В через лампочку течет ток $I = 0{,}31$ А. Найти температуру Т спирали. Считать, что по установлении равновесия все выделяющееся в нити тепло теряется в результате излучения. Отношение энергетических светимостей вольфрама и абсолютно черного тела для данной температуры $k = 0{,}31$.

Решение

Поскольку вольфрамовая спираль излучает как серое тело, то ее мощность излучения $N' = R'_э S$ — (1), где по закону Стефана — Больцмана $R'_э = k\sigma T^4$ — (2) — энергетическая светимость серого тела, $S = 2\pi dl$ — (3) — площадь поверхности вольфрамовой спирали. Подставляя (2) и (3) в (1), получаем $N' = 2\pi k\sigma T^4 dl$ — (4). С другой стороны, мощность тока $N' = IU$ — (5), получаем $IU = 2\pi k\sigma T^4 dl$, откуда температура спирали $T = \left(\dfrac{IU}{2\pi k\sigma dl}\right)^{\frac{1}{4}} = 2208$ К.

18.7 Температура вольфрамовой спирали в 25-ваттной электрической лампочке $T = 2450$ К. Отношение ее энергетической светимости к энергетической светимости абсолютно черного тела при данной температуре $k = 0{,}3$. Найти площадь S излучающей поверхности спирали.

Решение

Мощность излучения вольфрамовой спирали (см. задачу 18.6) $N' = k\sigma T^4 S$. Отсюда площадь излучающей поверхности спирали $S = \dfrac{N'}{k\sigma T^4} = 0{,}4$ см^2.

18.8 Найти солнечную постоянную *K*, т. е. количество лучистой энергии, посылаемой Солнцем в единицу времени через единичную площадку, перпендикулярную к солнечным лучам и находящуюся на таком же расстоянии от него, как и Земля. Температура поверхности Солнца T = 5800К. Излучение считать близким к излучению абсолютно черного тела.

Решение

Поскольку по условию излучение Солнца близко к излучению абсолютно черного тела, то по закону Стефана — Больцмана его энергетическая светимость $R_э = \sigma T^4$ — (1). Мощность излучения Солнца $N = R_э S_1$ — (2), где $S_1 = 4\pi R_C^2$ — (3) — площадь поверхности Солнца. Подставляя (1) и (3) в (2), получаем $N = 4\pi\sigma T^4 R_C^2$ — (4). Мощность, излучаемая Солнцем, падает на внутреннюю поверхность сферы, радиус которой равен среднему расстоянию от Солнца до Земли $\langle r_3 \rangle = 1{,}496 \cdot 10^{11}$ м. Площадь поверхности такой сферы равна $S_2 = 4\pi r_3^2$ — (5). По определению солнечной постоянной $K = \dfrac{N}{S_2}$ — (6). Подставляя (4) и (5) в (6), окончательно получаем $K = \dfrac{\sigma T^4 R_C^2}{\langle r_3 \rangle^2} = 1{,}38$ кВт/м^2.

18.9 Считая, что атмосфера поглощает 10% лучистой инергии, посылаемой Солнцем, найти мощность излучения *N*, получаемую от Солнца горизонтальным участком Земли площадью S = 0,5 га. Высота Солнца над горизонтом φ = 30°. Излучение Солнца считать близким к излучению абсолютного черного тела.

Решение

Мощность излучения $N_0 = KS\cos\alpha$, где $\alpha = \dfrac{\pi}{2} - \varphi$ — угол падения солнечных лучей, K — солнечная постоянная (см. задачу 18:8). По условию мощность излучения N, получаемая горизонтальным участком Земли, равна $0{,}9 N_0$, т. е. $N = 0{,}9KS\cos\left(\dfrac{\pi}{2} - \varphi\right)$. Подставляя числовые данные, получим $N = 3.1 \cdot 10^6$ Вт.

18.10 Зная значение солнечной постоянной для Земли, найти значение солнечной постоянной для Марса.

Решение

Значение солнечной постоянной для Земли (см. задачу 18.8) определяется соотношением $K_з = \frac{\sigma T^4 R_C^2}{\langle r_з \rangle^2}$ — (1). Аналогично можно определить солнечную постоянную для Марса $K_М = \frac{\sigma T^4 R_C^2}{\langle r_М \rangle^2}$ — (2), где $\langle r_М \rangle = 2{,}279 \cdot 10^{11}$ м — среднее расстояние от Солнца до Марса. Разделив (2) на (1), получим $\frac{K_М}{K_з} = \frac{\langle r_з \rangle^2}{\langle r_М \rangle^2}$, откуда солнечная постоянная для Марса $K_М = K_з \left(\frac{\langle r_з \rangle}{\langle r_М \rangle} \right)^2 = 0{,}59$ кВт/м^2.

18.11 Какую энергетическую светимость $R_э$ имеет абсолютно черное тело, если максимум спектральной плотности его энергетической светимости приходится на длину волны $\lambda = 484$ нм?

Решение

Согласно первому закону Вина $\lambda_m T = C_1$ — (1), где $C_1 = 2{,}9 \cdot 10^{-3}$ м·К. По закону Стефана — Больцмана для абсолютно черного тела энергетическая светимость $R_э = \sigma T^4$ — (2). Из формулы (1) абсолютная температура $T = \frac{C_1}{\lambda_m}$ — (3). Подставляя (3) в (2), окончательно получим $R_э = \sigma \left(\frac{C_1}{\lambda_m} \right)^4 = 73{,}08$ МВт/м^2.

18.12 Мощность излучения абсолютно черного тела $N = 10$ кВт. Найти площадь S излучающей поверхности тела, если максимум спектральной плотности его энергетической светимости приходится на длину волны $\lambda = 700$ нм.

Решение

Мощность излучения абсолютно черного тела (см. задачу 18.1) равна $N = \sigma T^4 S$ — (1). Из первого закона Вина (см. задачу 18.11) абсолютная температура равна $T = \frac{C_1}{\lambda_m}$ — (2). Подставляя (2) в (1), получаем $N = \sigma S \left(\frac{C_1}{\lambda_m} \right)^4$, откуда площадь излучающей поверхности тела $S = \frac{N}{\sigma} \times \left(\frac{\lambda_m}{C_1} \right)^4 = 6$ см^2.

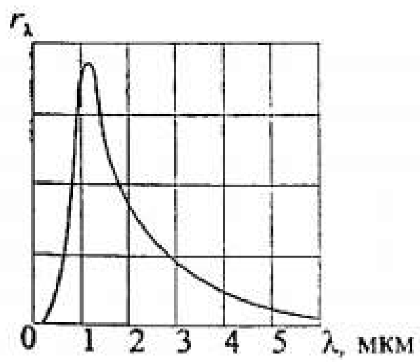
18.13 В каких областях спектра лежат длины волн, соответствующие максимуму спектральной плотности энергетический светимости, если источником света служит: а) спираль электрической лампочки (T = 3000 К); б) поверхность Солнца (T = 6000 К); в) атомная бомба, в которой в момент взрыва развивается температура $T \approx 10^7$ К? Излучение считать близким к излучению абсолютно черного тела.

Решение

По первому закону Вина $\lambda_m T = C_1$, откуда $\lambda_m = \frac{C_1}{T}$, где $C_1 = 2{,}9 \cdot 10^{-3}$ м·К. а) Для спирали электрической лампочки, при $T_1 = 3000$ К, $\lambda_1 = 1{,}03$ мкм — инфракрасная область. б) Для поверхности Солнца, при $T_2 = 6000$ К, $\lambda_2 = 483$ нм — область видимого света. в) Для атомной бомбы в момент взрыва, при $T_3 = 10^7$ К, $\lambda_3 = 290$ пм — область рентгеновских лучей.

18.14 На рисунке дана кривая зависимости спектральной плотности энергетической светимости абсолютно черного тела r_λ от длины волны λ при некоторой температуре. К какой температуре T относится эта кривая? Какой процент излучаемой энергии приходится на долю видимого спектра при этой температуре?

Решение



По графику найдем длину волны, на которую приходится максимальная спектральная плотность энергетической светимости тела: $\lambda_{max} \approx 1{,}2 \cdot 10^{-6}$ м. Согласно закону Вина $\lambda_{max} T = 2{,}9 \cdot 10^{-3}$ м·К, отсюда $T = \frac{2{,}9 \cdot 10^{-3}}{1{,}2 \cdot 10^{-6}} = 2400$ К. Процент излучаемой энергии, приходящейся на долю видимого спектра, определяется той долей площади, ограниченной кривой $r_\lambda = f(\lambda)$, которая отсекается ординатами, восстановленными по краям интересующего нас интервала. Пределы видимого спектра приблизительно от 400 до 750 нм. При данной температуре на долю видимого излучения приходится около 3—5% всего излучения.

18.15 При нагревании абсолютно черного тела длина волны на которую приходится максимум спектральной плотности энергетической светимости, изменилась от 690 до 500 нм. Во сколько раз увеличилась при этом энергетическая светимость тела?

Решение

Из первого закона Вина $\lambda_m T = C_1$ имеем: $\lambda_1 T_1 = C_1$ — (1) и $\lambda_2 T_2 = C_1$ — (2). Приравнивая левые части уравнений (1) и (2), получаем $\lambda_1 T_1 = \lambda_2 T_2$ или $\frac{T_1}{T_2} = \frac{\lambda_2}{\lambda_1}$ — (3). По закону Стефана — Больцмана для абсолютно черного тела энергетическая светимость $R_э = \sigma T^4$ — (4). Из формулы (4) имеем: $\frac{R_{э1}}{R_{э2}} = \left(\frac{T_1}{T_2}\right)^4$ — (5). Подставляя (3) в (5), окончательно получаем $\frac{R_{э1}}{R_{э2}} = \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^4 = 3{,}63$.

18.16 На какую длину волны λ приходится максимум спектральной плотности энергетической светимости абсолютно черного тела, имеющего температуру, равную температуре t = 37° человеческого тела, т. е. T = 310 К?

Решение

Из первого закона Вина $\lambda_m T = C_1$ имеем: $\lambda_m = \frac{C_1}{T} =$ $= 9{,}35$ мкм.

18.17 Температура T абсолютно черного тела изменилась при нагревании от 1000 до 3000 К. Во сколько раз увеличилась при этом его энергетическая светимость $R_э$? На сколько изменилась длина волны λ, на которую приходится максимум спектральной плотности энергетической светимости? Во сколько раз увеличилась его максимальная спектральная плотность энергетической светимости r_λ?

Решение

По закону Стефана — Больцмана для абсолютно черного тела (см. задачу 18.15) $\frac{R_{э1}}{R_{э2}} = \left(\frac{T_1}{T_2}\right)^4 = \frac{1}{81}$ или $\frac{R_{э2}}{R_{э1}} = 81$. Из первого закона Вина (см. задачу 18.16) $\lambda_1 = \frac{C_1}{T_1} = 2{,}9$ мкм и $\lambda_2 = \frac{C_1}{T_2} = 0{,}97$ мкм. Согласно второму закону Вина максимальная спектральная плотность энергетической светимости возрастает пропорционально пятой степени абсолютной температуры $r_{\lambda\,max} - C_2 T^5$ — (1), где $C_2 = 1{,}29 \cdot 10^{-5}$ Вт/м^{3}К^5. Из формулы (1) имеем $r_1 = C_2 T_1^5$ — (2) и $r_2 = C_2 T_2^5$ — (3). Разделив (3) на (2), получаем $\frac{r_2}{r_1} = \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^5 = 243$.

18.18 Абсолютно черное тело имеет температуру T_1 = 2900 К. В результате остывания тела длина волны, на которую приходится максимум спектральной плотности энергетической светимости, изменилась на $\Delta\lambda$ = 9 мкм. До какой температуры T_2 охладилось тело?

Решение

Из первого закона Вина (см. задачу 18.16) $\lambda_1 = \frac{C_1}{T_1}$ — (1) и $\lambda_2 = \frac{C_2}{\lambda_2}$ — (2). Изменение длины волны, на которую приходится максимум спектральной плотности энергетической светимости, $\Delta\lambda = \lambda_2 - \lambda_1$ — (3). Подставляя (1) и (2) в (3), получаем $\Delta\lambda = \frac{C_1}{T_2} - \frac{C_1}{T_1}$, откуда $T_2 = \frac{T_1 C_1}{T_1 \Delta\lambda + C_1} =$ $= 290$ К.

18.19 Поверхность тела нагрета до температуры T = 1000 K Затем одна половина этой поверхности нагревается на ΔT = 100 К, другая охлаждается на ΔT = 100 К. Во сколько раз изменится энергетическая светимость $R_э$ поверхности этого тела?

Решение

По закону Стефана — Больцмана для серого тела $R'_э = k\sigma T^4$ — (1). После нагревания и охлаждения энергетическая светимость первой и второй половины будет соответственно равна $R'_{э1} = k\sigma (T + \Delta T)^4$ — (2) и $R'_{э2} = k\sigma (T - \Delta T)^4$ — (3). При этом средняя энергетическая светимость станет равной $\langle R'_э \rangle = \frac{R'_{э1} + R'_{э2}}{2}$ — (4). Подставляя (2) и (3) в (4), получаем $\langle R'_э \rangle = \frac{k\sigma\left[(T + \Delta T)^4 + (T - \Delta T)^4\right]}{2}$ — (5). Разделив (5) на (1), находим $\frac{\langle R'_э \rangle}{R'_э} = \frac{(T + \Delta T)^4 + (T - \Delta T)^4}{2T} = 1{,}06$.

18.20 Какую мощность N надо подводить к зачерненному металлическому шарику радиусом r = 2 см, чтобы поддержав его температуру на ΔT = 27 К выше температуры окружающей среды? Температура окружающей среды T = 293 К. Считать, что тепло теряется только вследствие излучения.

Решение

Мощность, необходимая для поддержания температуры, равна $N = R_э S$ — (1), где $R_э$ — энергетическая светимость шарика, $S = 4\pi r^2$ — (2) — площадь его поверхности. Поскольку по условию шарик зачерненный, то по закону Стефана — Больцмана $R_э = \sigma(T + \Delta T)^4$ — (3). Подставляя (2) и (3) в (1), получаем $N = 4\pi r^2\sigma(T + \Delta T)^4 = 3$ Вт.

18.21 Зачерненный шарик остывает от температуры T_1 = 300 К до T_2 = 293 К. На сколько изменилась длина волны λ, соответствующая максимуму спектральной плотности его энергетической светимости.

Решение

Изменение длины волны, соответствующей максимуму спектральной плотности энергетической светимости (см. задачу 18.18), равно $\Delta\lambda = \dfrac{C_1}{T_2} - \dfrac{C_1}{T_1} = 0{,}24$ мкм.

18.22 На сколько уменьшится масса Солнца за год вследствие излучения? За какое время τ масса Солнца уменьшится вдвое? Температура поверхности Солнца T = 5800 К. Излучение Солнца считать постоянным.

Решение

Мощность, излучаемая Солнцем, равна $N = R_э S$ — (1), где $R_э$ — энергетическая светимость Солнца, $S = 4\pi R_C^2$ — (2) — площадь его поверхности, $R_C = 6{,}96 \cdot 10^8$ м — радиус Солнца. По закону Стефана — Больцмана $R_э = \sigma T^4$ — (3). Подставляя (2) и (3) в (1), получаем $N = 4\pi R_C^2 \sigma T^4$ — (4). Изменение энергии Солнца за счет излучения $\Delta W = N\tau$ — (5). С другой стороны, $\Delta W = c^2 \Delta m$ — (6), где $c = 3 \cdot 10^8$ м/с — скорость света, Δm — изменение массы Солнца. Приравнивая правые части уравнений (5) и (6), получаем $N\tau = c^2\Delta m$, откуда изменение массы Солнца $\Delta m = \dfrac{N\tau}{c^2}$ — (7). Подставляя (4) в (7), получаем $\Delta m = \dfrac{4\pi R_C^2 \sigma T^4 \tau}{c^2} = 1{,}37 \cdot 10^{17}$ кг. Если $\Delta m = \dfrac{1}{2} M_C$, где $M_C = 1{,}989 \cdot 10^{30}$ кг — масса Солнца, то $\tau = \dfrac{M_C c^2}{8\pi R_C^2 \sigma T^4} = 7{,}06 \cdot 10^{12}$ лет.

Глава VI. Физика атома и атомного ядра

§ 19. Квантовая природа света и волновые свойства частиц

19.1 Найти массу m фотона: а) красных лучей света (λ = 700 нм); б) рентгеновски лучей (λ = 25 нм); в) гамма-лучей (λ = 1,24 нм).

Решение

Энергия фотона $E = h\nu$ — (1), где $h = 6{,}62 \cdot 10^{-34}$ Дж·с — постоянная Планка, $\nu = \frac{c}{\lambda}$ — частота колебания. Здесь $c = 3 \cdot 10^8$ м/с — скорость света. Т. е. уравнение (1) можно записать $E = h\frac{c}{\lambda}$ — (2). С другой стороны, согласно формуле Эйнштейна $E = mc^2$ — (3). Приравнивая (2) и (3), получаем $h\frac{c}{\lambda} = mc^2$, откуда $m = \frac{h}{c\lambda}$. Подставляя числовые данные, получим: а) $m = 3{,}2 \cdot 10^{-36}$ кг; б) $m = 8{,}8 \cdot 10^{-32}$ кг; в) $m = 1{,}8 \cdot 10^{-30}$ кг.

19.2 Найти энергию ε, массу m и импульс p фотона, если соответствующая ему длина волны λ = 1,6 нм.

Решение

Имеем $E = h\frac{c}{\lambda}$; $m = \frac{h}{c\lambda}$ (см. задачу 19.1). Импульс фотона $p = mc = \frac{h}{\lambda}$. Подставляя числовые данные, получим $E = 1{,}15 \cdot 10^{-13}$ Дж; $m = 1{,}38 \cdot 10^{-30}$ кг; $p = 4{,}1 \cdot 10^{-22}$ кг·м/с.

19.3 Ртутная дуга имеет мощность N = 125 Вт. Какое число фотонов испускается в единицу времени в излучении с длинами волн λ, равными: 612,1; 579,1; 546,1; 404,7; 365,5; 253,7 нм. Интенсивности этих линий составляют соответственно 2; 4; 4; 2,9; 2,5; 4% интенсивности ртутной дуги. Считать, что 80% мощности дуги идет на излучение.

Решение

Энергия излучения ртутной дуги $E = \eta N t$, по условию $t = 1$ с. Энергия одного кванта света $E_0 = h\nu = h\dfrac{c}{\lambda}$. Пусть I — интенсивность линии (в процентах), тогда количество квантов можно определить по формуле: $n = \dfrac{IE}{E_0} = \dfrac{I\eta N t \lambda}{hc}$.

Подставляя числовые данные, получим:

1) $n = \dfrac{0{,}02 \cdot 0{,}8 \cdot 125 \cdot 1 \cdot 6123 \cdot 10^{-10}}{6{,}62 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^8} = 6{,}2 \cdot 10^{18}$; 2) $n = 1{,}2 \cdot 10^{19}$;

3) $n = 1{,}1 \cdot 10^{19}$; 4) $n = 5{,}9 \cdot 10^{18}$; 5) $n = 4{,}6 \cdot 10^{18}$;

6) $n = 5{,}1 \cdot 10^{18}$.

19.4 С какой скоростью v должен двигаться электрон, чтобы его кинетическая энергия была равна энергии фотона с длиной волны λ = 520 нм?

Решение

Кинетическая энергия электрона $E = \dfrac{mv^2}{2}$ — (1). Энергия фотона $E = h\nu = h\dfrac{c}{\lambda}$ — (2). Приравнивая правые части уравнений (1) и (2), получим $\dfrac{mv^2}{2} = h\dfrac{c}{\lambda}$, откуда $v = \sqrt{\dfrac{2hc}{m\lambda}}$.

Подставляя числовые данные, получим $v = 9{,}2 \cdot 10^5$ м/с.

19.5 С какой скоростью v должен двигаться электрон, чтобы его импульс был равен импульсу фотона с длиной волны λ = 520 нм?

Решение

Импульс электрона $p_e = m_e v$ — (1). Импульс фотона $p = \dfrac{h}{\lambda}$ — (2) (см. задачу 19.2). Приравнивая правые части уравнений (1) и (2), получим $m_e v = \dfrac{h}{\lambda}$, откуда $v = \dfrac{h}{\lambda m_e}$.

Подставляя числовые данные, получим $v = 1{,}4 \cdot 10^3$ м/с.

19.6 Какую энергию ε должен иметь фотон, чтобы его масса была равна массе покоя электрона?

Решение

Энергия фотона $E = mc^2$. Подставляя в эту формулу значения массы покоя электрона, получим $E = 81 \cdot 10^{-15}$ Дж или $E = 510 \cdot 10^3$ эВ.

19.7 Импульс, переносимый монохроматическим пучком фотонов через площадку S = 2 см^2 за время t = 0,5 мин, равен $p = 3 \cdot 10^{-9}$ кг·м/с. Найти для этого пучка энергию E , падающую на единицу площади за единицу времени.

Решение

Энергия и импульс фотона связаны соотношением $E = pc$. За единицу времени на единицу площади будет падать энергия $E_1 = \dfrac{pc}{St} = 150$ Дж/(с·м^2).

19.8 При какой температуре T кинетическая энергия молекулы двухатомного газа будет равна энергии фотона с длиной волны λ = 589 нм?

Решение

Кинетическая энергия молекулы двухатомного газа $W = \dfrac{5}{2}kT$. Кинетическая энергия фотона $\varepsilon = h\nu = h\dfrac{c}{\lambda}$. По условию $W = \varepsilon$ или $\dfrac{5}{2}kT = h\dfrac{c}{\lambda}$, откуда $T = \dfrac{2hc}{5k\lambda} = 9800$ К.

19.9 При высоких энергиях трудно осуществить условия для изменения экспозиционной дозы рентгеновского и гамма-излучений в рентгенах, поэтому допускается применение рентгена как единицы дозы для излучений с энергией квантов до ε = 3 МэВ. До какой предельной длины волны λ рентгеновского излучения можно употреблять рентген?

Решение

Энергия квантов определяется соотношением $E = h\nu = h\dfrac{c}{\lambda}$. Отсюда предельная длина волны равна $\lambda = \dfrac{hc}{E} = 0{,}41 \cdot 10^{-12}$ м.

19.10 Найти массу m фотона, импульс которого равен импульсу молекулы водорода при температуре t = 20 °С. Скорость молекулы считать равной средней квадратичной скорости.

Решение

Импульс фотона $p_1 = m_1 c$, где m_1 — масса фотона, c — скорость света в вакууме. Импульс молекулы водорода

$p_2 = m_2\sqrt{\overline{v^2}}$, где m_2 — масса молекулы водорода, $\sqrt{\overline{v^2}} = \sqrt{\dfrac{3kT}{m_2}}$ — средняя квадратичная скорость молекулы водорода. По условию $p_1 = p_2$ или $m_1 c = m_2\sqrt{\dfrac{3kT}{m_2}}$ — (1). Массу молекулы водорода можно определить из соотношения $m_2 = \dfrac{\mu}{N_A}$ — (2), где μ — молярная масса водорода, N_A — число Авогадро. Подставляя (2) в (1), найдем $m_1 c = \sqrt{\dfrac{3kT\mu}{N_A}}$, откуда $m_1 = \sqrt{\dfrac{3kT\mu}{c^2 N_A}}$. Подставляя числовые данные, получим $m_1 = 2.1\cdot10^{-32}$ кг.

19.11 В работе Л. Г. Столетова «Актино-электрические исследования» (1888 г.) впервые были установлены основные законы фотоэффекта. Один из результатов его опытов был сформулирован так: «Разряжающим действием обладают лучи самой высокой преломляемости с длиной волны менее 295 нм». Найти работу выхода *A* электрона из металла, с которым работал А. Г. Столетов.

Решение

Согласно закону сохранения энергии $h\nu = A + \dfrac{mv^2}{2}$. Условие возникновения фотоэффекта: $h\nu = A$ или $\nu = \dfrac{A}{h}$ — (1). Поскольку $\nu = \dfrac{c}{\lambda}$, то из (1) получим $A = \dfrac{hc}{\lambda}$ — (2). По условию $\lambda = 295\cdot10^{-9}$ м, тогда из (2) найдем $A = 4.2$ эВ.

19.12 Найти длину волны λ_0 света, соответствующую красной границе фотоэффекта, для лития, натрия, калия и цезия.

Решение

Работа выхода электрона из металла, если его скорость $v = 0$, равна $A = h\nu_0 = h\dfrac{c}{\lambda_0}$, где λ_0 — красная граница фотоэффекта. Таким образом, $\lambda_0 = \dfrac{hc}{A} = 5.17\cdot10^{-7}$ м.

19.13 Длина волны света, соответствующая красной границе фотоэффекта, для некоторого металла λ_0 = 275 нм. Найти минимальную энергию фотона, вызывающего фотоэффект.

Решение

Минимальная энергия фотона должна быть равна работе выхода электрона, т. е. $E_{min} = A = \frac{hc}{\lambda_0}$. Подставляя числовые данные, получим $E_{min} = 7{,}2\cdot10^{-19}$ Дж или $E_{min} = 4{,}5$ эВ.

19.14 Длина волны света, соответствующая красной границе фотоэффекта, для некоторого металла λ_0 = 275 нм. Найти работу выхода A электрона из металла, максимальную скорость v электронов, вырываемых из металла светом с длиной волны λ = 180 нм, и максимальную кинетическую энергию W_{max} электронов.

Решение

Работа выхода электрона $A = \frac{hc}{\lambda_0} = 7{,}2\cdot10^{-19}$ Дж. Уравнение Эйнштейна для фотоэффекта: $h\nu = A + \frac{mv_{max}^2}{2}$ — (1), где $\frac{mv_{max}^2}{2}$ — максимальная кинетическая энергия вылетающего электрона. Из (1) имеем $\frac{hc}{\lambda} - A = \frac{mv_{max}^2}{2}$, откуда максимальная скорость электронов $v_{max} = \sqrt{\frac{2(hc/\lambda - A)}{m}}$. Подставляя числовые данные, получим $v_{max} = 9\cdot10^5$ м/с. Максимальная кинетическая энергия электронов равна $W_{max} = \frac{mv^2}{2} = 3{,}7\cdot10^{-19}$ Дж.

19.15 Найти частоту ν света, вырывающего из металла электроны, которые полностью задерживаются разностью потенциалов U = 3 В. Фотоэффект сжимается при частоте света $\nu_0 = 6\cdot10^{14}$ Гц. Найти работу выхода A электрона из металла.

Решение

Работа выхода электрона $A = h\nu_0 = h\frac{c}{\lambda_0} = 2{,}48$ эВ. Согласно уравнению Эйнштейна для внешнего фотоэффекта $h\nu = A + \frac{mv^2}{2}$. Если электроны полностью задерживаются разностью потенциалов U, то по закону сохранения энергии $eU = \frac{mv^2}{2}$. Тогда $h\nu = A + eU$, откуда $\nu = \frac{A + eU}{h} = 13{,}2\cdot10^{14}$ Гц.

19.16 Найти задерживающую разность потенциалов U для электронов, вырываемых при освещении калия светом с длиной волны $\lambda = 330$ нм.

Решение

Имеем $h\nu = A + eU$ (см. задачу 19.15) или $h\frac{c}{\lambda} = A + eU$ — (1). Работа выхода электрона из калия $A = 2$ эВ $= 3.2 \cdot 10^{-19}$ Дж (см. таблицу 17). Из (1) найдем $U = \frac{hc/\lambda - A}{e} = 1.75$ В.

19.17 При фотоэффекте с платиновой поверхности электроны полностью задерживаются разностью потенциалов $U = 0{,}8$ В. Найти длину волны λ применяемого облучения и предельную длину волны λ_0, при которой еще возможен фотоэффект.

Решение

Имеем $h\frac{c}{\lambda} = A + eU$, откуда $\lambda = \frac{hc}{A + eU} = 204$ нм. Предельную длину волны λ_0, при которой еще возможен фотоэффект, найдем из соотношения $A = h\nu_0 = h\frac{c}{\lambda_0}$, откуда $\lambda_0 = \frac{hc}{A} = 234$ нм.

19.18 Фотоны с энергией $\varepsilon = 4{,}9$ эВ вырывают электроны из металла с работой выхода $A = 4{,}5$ эВ. Найти максимальный импульс p_{max}, передаваемый поверхности металла при вылете каждого электрона.

Решение

Согласно закону сохранения энергии $\varepsilon = A + \frac{mv^2}{2} = A + \frac{p^2}{2m}$, откуда $p = \sqrt{2m(\varepsilon - A)} = 3.4 \cdot 10^{-25}$ кг·м/с.

19.19 Найти постоянную Планка h, если известно, что электроны, вырываемые из металла светом с частотой $\nu_1 = 2{,}2 \cdot 10^5$ Гц, полностью задерживаются разностью потенциалов $U_1 = 6{,}6$ В, а вырываемые светом с частотой $\nu_2 = 4{,}6 \cdot 10^{15}$ Гц — разностью потенциалов $U_2 = 16{,}5$ В.

Решение

Имеем $h\nu_1 = A + eU_1$ — (1); $h\nu_2 = A + eU_2$ — (2). Вычитая (1) из (2), получим $h(\nu_2 - \nu_1) = e(U_2 - U_1)$, откуда $h = \frac{U_2 - U_1}{\nu_2 - \nu_1} = 6{,}6 \cdot 10^{-34}$ Дж·с.

19.20 Вакуумный фотоэлемент состоит из центрального катода (вольфрамового шарика) и анода (внутренней поверхности посеребренной изнутри колбы). Контактная разность потенциалов между электродами $U_0 = 0{,}6$ В ускоряет вылетающие электроны. Фотоэлемент освещается светом с длиной волны $\lambda = 230$ нм. Какую задерживающую разность потенциалов U надо приложить между электроламп, чтобы фототок упал до нуля? Какую скорость v получат электроны, когда они долетят до анода, если не прикладывать между катодом и анодом разности потенциалов?

Решение

Согласно закону сохранения энергии $eU = h\dfrac{c}{\lambda} - A + eU_0$ (см. задачу 19.15), откуда $U = \dfrac{hc/\lambda - A}{e} + U_0$. Подставляя числовые данные, получим $U = 1{,}5$ В. Чтобы фототок упал до нуля, задерживающая разность потенциалов должна удовлетворять условию $eU = \dfrac{mv^2}{2}$, откуда $v = \sqrt{\dfrac{2eU}{m}} = \approx 7{,}3 \cdot 10^5$ м/с.

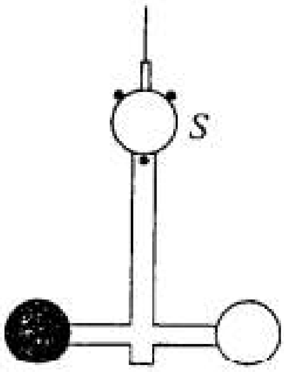
19.21 Между электродами фотоэлемента предыдущей задачи приложена задерживающая разность потенциалов $U = 1$ В. При какой предельной длине волны λ_0 падающего на катод света начинается фотоэффект?

Решение

Имеем $U_e = h\dfrac{c}{\lambda_0} - A$, откуда $\lambda_0 = \dfrac{hc}{eU + A}$. Подставляя числовые данные, получим $\lambda_0 = 226$ нм.

19.22 На рисунке показана часть прибора, с которым П. Н. Лебедев производил свои опыты по измерению светового давления. Стеклянная крестовина, подвешенная на тонкой нити заключена в откачанный сосуд и имеет на концах два легких кружка из платиновой фольги. Один кружок зачернен, другой оставлен блестящим. Направляя свет на один из кружков и измеряя угол поворота нити (для зеркального отсчета служит зеркальце S), можно определить световое давление. Найти световое давление P и световую энергию E , падающую от дуговой лампы в единицу времени на единицу площади кружков. При освещении блестящего кружка отклонение зайчика a = 76 мм по шкале, удаленной от зеркальца на расстояние b = 1200 мм. Диаметр кружков d = 5 мм. Расстояние от центра кружка до оси вращения l = 9,2 мм. Коэффициент отражения света от блестящего кружка ρ = 0,5. Постоянная момента кручения нити ($M = k\alpha$) $k = 2{,}2\cdot10^{-11}$ Н·м/рад.

Решение



Имеем $P=\frac{F}{S}$ — (1), где F — сила светового давления на кружок площадью S. Но $F=\frac{M}{l}=\frac{k\alpha}{l}$ — (2), где M — момент кручения нити, l — расстояние от центра кружка до оси вращения, α — угол поворота кружка. Зная, что при повороте зеркальца на угол α отраженный луч повернется на угол 2α,

найдем: $tg2\alpha=\frac{a}{b}$. Для малых углов $tg2\alpha\approx 2\alpha=\frac{a}{b}$. Отсюда $\alpha=\frac{a}{2b}$ — (3). Решая совместно уравнения (1) — (3), получим $P=\frac{ka}{2lbS}=3{,}85\cdot10^{-6}$ Па. Световая энергия $\mathbf{E}=\frac{Pc}{1+\rho}= \ =770$ Дж/(с·м^2).

19.23 В одном из опытов П. Н. Лебедева при падении света на зачерненный кружок (ρ = 0) угол поворота нити был равен α = 10′. Найти световое давление P и мощность N падающего света. Данные прибора взять из условия задачи 19.22.

Решение

Имеем $p=\frac{k\alpha}{lS}=\frac{4k\alpha}{l\pi d^2}$ (см. задачу 19.22). Подставляя числовые данные, получим $p=3{,}6\cdot10^{-7}$ Н/м^2. С другой стороны, световое давление $p=\frac{E}{c}(1+\rho)$. По условию коэффициент отражения света $\rho=0$, тогда $p=\frac{E}{c}$ — (1), где E — количество энергии, падающей на единицу поверхности в единицу времени. Тогда мощность N света, падающего на площадь S кружка, найдем из соотношения $N=E\cdot S$. Из (1) имеем $E=pc$, кроме того, $S=\frac{\pi d^2}{4}$, отсюда $N=\frac{pc\cdot\pi d^2}{4}=2{,}1\cdot10^{-3}$ Вт.

19.24 В одном из опытов П. Н. Лебедева мощность падающего на кружки монохроматического света (λ = 560 нм) была равна N = 8,33 мВт. Найти число фотонов I , падающих в единицу времени на единицу площади кружков, и импульс силы $F\Delta\tau$, сообщенный единице площади кружков за единицу времени, для значений ρ, равных: 0; 0,5; 1. Данные прибора взять из условия задачи 19.22.

Решение

Найдем концентрацию фотонов в пучке света, падающем на кружок, из соотношения $n=\frac{\omega}{\varepsilon}$ — (1), где ω — объемная плотность энергии, ε — энергия одного фотона. Поскольку $\omega=\frac{E}{c}=\frac{N}{Sc}$, а $\varepsilon=h\frac{c}{\lambda}$, то выражение (1) примет вид $n=\frac{N\lambda}{Sc^2h}$ — (2). Площадь кружка $S=\frac{\pi d^2}{4}=$ $=19{,}6\cdot10^{6}$ м^2. Число I фотонов, падающих за единицу времени на единицу площади, найдем из соотношения $I=\frac{N}{St}$, где N — число фотонов, падающих за время t на поверхность площадью S. Но $N=ncSt$, следовательно, $I=\frac{ncSt}{St}=$ $=nc$. С учетом (2) получим $I=\frac{N\lambda}{Sch}=1{,}2\cdot10^{21}$ с$^{-1}\cdot$м$^{-2}$. Импульс силы $F\Delta\tau$, сообщенный единице площади кружков за единицу времени, будет численно равен световому давлению p, т. е. $F\Delta\tau=p=\frac{N}{Sc}(1+\rho)$. Подставляя числовые данные, получим: а) $F_1\Delta\tau=1{,}4\cdot10^{-6}$ Н·с/м^2; б) $F_2\Delta\tau=2{,}13\times$ $\times10^{-6}$ Н·с/м^2; в) $F_3\Delta\tau=2{,}84\cdot10^{-6}$ Н·с/м^2.

19.25 Русский астроном Ф. А. Бредихин объяснил форму кометных хвостов световым давлением солнечных лучей. Найти световое давление P солнечных лучей на абсолютно черное тело, помешенное на таком же расстоянии от Солнца, как и Земля. Какую массу m должна иметь частица в кометном хвосте, помещенная на этом расстоянии, чтобы сила светового давления на нее уравновешивалась силой притяжения частицы Солнцем? Площадь частицы, отражающую все падающие на нее лучи, считать равной $S = 0{,}5\cdot10^{-12}$ м^2. Солнечная постоянная $K = 1{,}37$ кВт/м^2.

Решение

Световое давление $P = \frac{E}{c}(1+\rho)$. В условиях данной задачи $E = K$; $\rho = 0$. Тогда $P = \frac{K}{c} = 4{,}6\cdot10^{-6}$ Па. Сила светового давления $F_1 = PS$, сила притяжения частицы Солнцем $F_2 = G\frac{mM}{R^2}$, где M — масса Солнца. По условию $F_1 = F_2$, т. е. $PS = G\frac{mM}{R^2}$, откуда масса частицы $m = \frac{PSR^2}{GM}$. Подставляя числовые данные, получим $m = 3{,}9\cdot10^{-16}$ кг.

19.26 Найти световое давление P на стенки электрической 100-ваттной лампы. Колба лампы представляет собой сферический сосуд радиусом r = 5 см. Стенки лампы отражают 4% и пропускают 6% падающего на них света. Считать, что вся потребляемая мощность идет на излучение.

Решение

По определению светового давления $P = \frac{E}{c}(1+\rho)$ — (1), где $E = \frac{N}{S}$ — (2) — энергия, падающая на единицу поверхности за единицу времени, N — мощность лампы, $S = 4\pi r^2$ — (3) — площадь поверхности колбы, ρ — коэффициент отражения света. Подставляя (3) в (2), получаем $E = \frac{N}{4\pi r^2}$ — (4), затем, подставляя (4) в (1), окончательно находим $P = \frac{N(1+\rho)}{4\pi r^2 c} = 11{,}03$ мкПа.

19.27 На поверхность площадью S = 0,01 м^2 в единицу времени падает световая энергия E = 1,05 Дж/с. Найти световое давление P в случаях, когда поверхность полностью отражает и полностью поглощает падающие на нее лучи.

Решение

Полностью поглощает лучи черная поверхность, а полностью отражает — зеркальная. При падении на черную поверхность фотон с энергией E_0 поглощается, передавая поверхности импульс $\frac{E_0}{c}$. За время Δt поверхность площадью S поглотит излучение с энергией $E = IS\Delta t$ — (1), содержащее $\frac{E}{E_0}$ фотонов. Переданный поверхности импульс $\frac{E}{E_0}\frac{E_0}{c} = \frac{IS\Delta t}{c}$; с другой стороны, он равен $F\Delta t = P_1 S\Delta t$. Отсюда $P_1 = \frac{I}{c}$. Из (1) найдем, учитывая, что по условию $\Delta t = 1$ с, $I = \frac{E}{S}$, тогда $P_1 = \frac{E}{Sc} = 0{,}35 \cdot 10^{-6}$ Па. При отражении от зеркальной поверхности фотоны изменяют свой импульс на противоположный. При этом каждый фотон передает поверхности импульс $\frac{2E_0}{c}$; таким образом, давление света на зеркальную поверхность вдвое больше, чем на черную. Т. е. $P_2 = 2\frac{E}{Sc} = 0{,}7 \cdot 10^{-6}$ Па.

19.28 Монохроматический пучок света (λ = 490 нм), падая по нормали к поверхности, производит световое давление P = 4,9 мкПа. Какое число фотонов I падает в единицу времени на единицу площади этой поверхности? Коэффициент отражения света ρ = 0,25.

Решение

Воспользуемся формулой из задачи 19.24, выражающей число фотонов, падающих в единицу времени на площадь S: $I = \frac{N\lambda}{Sch}$. Здесь $\frac{N}{S}$ — мощность света, падающего на единицу площади, причем $\frac{N}{S} = E = \frac{Pc}{1+\rho}$ (см. задачу 19.23). Отсюда $I = \frac{P\lambda}{h(1+\rho)} = 2{,}9 \cdot 10^{21}$ с$^{-1}$·м$^{-2}$.

19.29 Рентгеновские лучи с длиной волны $\lambda_0 = 70{,}8$ пм испытывают комптоновское рассеяние на парафине. Найти длину волны λ рентгеновских лучей, рассеянных в направлениях: а) $\varphi = \pi/2$; б) $\varphi = \pi$.

Решение

Изменение длины волны рентгеновских лучей при комптоновском рассеянии определяется формулой $\Delta\lambda = \frac{h}{mc}(1 - cos\,\varphi)$, где φ — угол рассеяния, m — масса электрона. Отсюда $\lambda = \lambda_0 + \Delta\lambda = \lambda_0 + \frac{h}{mc}(1 - cos\,\varphi)$. Подставляя числовые данные, получим: а) $\lambda = 73{,}22 \cdot 10^{-12}$ м; б) $\lambda = 75{,}6 \cdot 10^{-12}$ м.

19.30 Какова была длина волны λ_0 рентгеновского излучения, если при комптоновском рассеянии этого излучения графитом под углом $\varphi = 60°$ длина волны рассеянного излучения оказалась равной $\lambda = 25{,}4$ пм?

Решение

Имеем $\lambda = \lambda_0 + \frac{h}{mc}(1 - cos\,\varphi)$ (см. задачу 19.29), отсюда $\lambda_0 = \lambda - \frac{h}{mc}(1 - cos\,\varphi)$. Подставляя числовые данные, получим $\lambda_0 = 24{,}2 \cdot 10^{-12}$ м.

19.31 Рентгеновские лучи с длиной волны $\lambda_0 = 20$ пм испытывают комптоновское рассеяние под углом $\varphi = 90°$. Найти изменение $\Delta\lambda$ длины волны рентгеновских лучей при рассеянии, а также энергию W_e и импульс электрона отдачи.

Решение

Кинетическая энергия электрона равна энергии, потерянной фотоном: $W_e = \frac{hc}{\lambda_0} - \frac{hc}{\lambda_0 + \Delta\lambda} = \frac{hc\Delta\lambda}{\lambda_0(\lambda_0 + \Delta\lambda)}$. Подставляя числовые данные, получим $W_e = 10{,}56 \cdot 10^{-16}$ Дж $= 6{,}6 \cdot 10^3$ эВ. Импульс и кинетическая энергия электрона связаны соотношением $W = \frac{p^2}{2m}$, откуда $p = \sqrt{2mW} = 4{,}4 \cdot 10^{-23}$ кг·м/с.

19.32 При комптоновском рассеянии энергия падающего фотона распределяется поровну между рассеянным фотоном и электроном отдачи. Угол рассеяния $\varphi = \pi/2$. Найти энергию W и импульс p рассеянного фотона.

Решение

Энергия падающего фотона $W_0 = \frac{hc}{\lambda_0}$. Энергия рассеянного фотона $W = \frac{hc}{\lambda_0 + \Delta\lambda}$. Кинетическая энергия электрона отдачи $W_e = \frac{hc}{\lambda_0} - \frac{hc}{\lambda_0 + \Delta\lambda} = \frac{hc\Delta\lambda}{\lambda_0(\lambda_0 + \Delta\lambda)}$. По условию $W_e = \frac{W_0}{2}$, т. е. $\frac{hc\Delta\lambda}{\lambda_0(\lambda_0 + \Delta\lambda)} = \frac{hc}{2\lambda_0}$. Отсюда $\frac{hc}{\lambda_0 + \Delta\lambda} = W = \frac{hc}{2\Delta\lambda}$, где $\Delta\lambda = \frac{h}{mc}(1 - cos\,\varphi) = \frac{h}{mc}$. Окончательно имеем $W = \frac{mc^2}{2}$, т. е. энергия рассеянного фотона равна половине энергии покоя электрона. Подставляя числовые данные, получим $W = 41 \cdot 10^{-15}$ Дж $= 0.26 \cdot 10^6$ эВ. Импульс фотона $p = \frac{W}{c} =$ $= 13{,}7 \cdot 10^{-23}$ кг·м/с.

19.33 Энергия рентгеновских лучей ε = 0,6 МэВ. Найти энергию W_e электрона отдачи, если длина волны рентгеновских лучей после комптоновского рассеяния изменилась на 20%.

Решение

Кинетическая энергия электрона отдачи $W_e = \frac{hc\Delta\lambda}{\lambda_0(\lambda_0 + \Delta\lambda)}$ (см. задачу 19.31). Энергия рентгеновских лучей $\varepsilon = \frac{hc}{\lambda_0}$, т. е. можно записать, что $W_e = \varepsilon\frac{\Delta\lambda}{\lambda_0 + \Delta\lambda}$ — (1). По условию $\Delta\lambda = 0{,}2\lambda_0$; $\lambda_0 + \Delta\lambda = 1{,}2\lambda_0$, тогда из (1) получим $W = 0{,}17\varepsilon = 0{,}1$ МэВ.

19.34 Найти длину волны де Бройля λ для электронов, прошедших разность потенциалов U_1 = 1 В и U_2 = 100 В.

Решение

Пучок элементарных частиц обладает свойством плоской волны, распространяющейся в направлении перемещения этих частиц. Длина волны λ, соответствующая этому пучку, определяется соотношением де Бройля $\lambda = \frac{h}{mv} = \frac{h}{\sqrt{2Wm}}$, где v — скорость частиц, m — масса частиц, W — их кинетическая энергия. Если скорость v частиц соизмерима со скоростью света c, то эта формула принимает вид $\lambda = \frac{h}{m_0 v}\sqrt{1-\beta^2} = \frac{h}{\sqrt{2Wm_0 + W^2/c^2}}$, где $\beta = \frac{v}{c}$, m_0 — масса покоя частицы. Пройдя разность потенциалов U, электрон приобретает кинетическую энергию, причем $eU = \frac{mv^2}{2}$. Отсюда $v = \sqrt{\frac{2eU}{m}}$ — (3). При $U_1 = 1$ В получим $v_1 = 6\cdot10^5$ м/с, при $U_2 = 100$ В получим $v_2 = 6\cdot10^6$ м/с. В первом случае для нахождения длины волны де Бройля можно применить уравнение (1), во втором случае лучше использовать уравнение (2). Подставляя числовые данные, получим $\lambda_1 = 1{,}22\cdot10^{-9}$ м; $\lambda_2 = 0{,}122\cdot10^{-9}$ м.

19.35 Найти длину волны де Бройля λ для пучка протонов, прошедших разность потенциалов $U_1 = 1$ В и $U_2 = 100$ В.

Решение

Найдем скорость протонов, прошедших разность потенциалов U_1 и U_2. По формуле (3) из предыдущей задачи получим $v_1 = 1{,}38\cdot10^4$ м/с; $v_2 = 1{,}38\cdot10^5$ м/с. Следовательно, в обоих случаях можно использовать формулу $\lambda = \frac{h}{mv}$. Подставляя числовые данные, получим $\lambda_1 = 29\cdot10^{-12}$ м; $\lambda_2 = 2{,}9\cdot10^{-12}$ м.

19.36 Найти длину волны де Бройля λ для: *а*) электрона, движущегося со скоростью $v = 10^6$ м/с; б) атома водорода, движущегося со средней квадратичной скоростью при температуре $T = 300$ К; в) шарика массой $m = 1$ г, движущегося со скоростью $v = 1$ см/с.

Решение

Длина волны де Бройля определяется соотношением $\lambda = \frac{h}{mv}$ — (1) для $v << c$ или соотношением $\lambda = \frac{h}{m_0 v}\sqrt{1-\beta^2}$ — (2) для скоростей v, соизмеримых со скоростью света c. а) Воспользовавшись уравнением (2), найдем $\lambda = 730 \cdot 10^{-12}$ м. б) Скорость атома водорода $\sqrt{\overline{v^2}} = \sqrt{\frac{3RT}{\mu}} = 2735$ м/с, т. е. $v << c$. По формуле (1) найдем $\lambda = \frac{h}{mv} = \frac{hN_A}{\mu v} = 145 \cdot 10^{-12}$ м. в) Поскольку скорость шарика $v << c$, то по формуле (1) найдем $\lambda = 6{,}6 \cdot 10^{-29}$ м, т. е. волновые свойства шарика обнаружить невозможно.

19.37 Найти длину волны де Бройля λ для электрона, имеющего кинетическую энергию: а) $W_1 = 10$ кэВ; б) $W_2 = 1$ МэВ.

Решение

Имеем $\lambda = \frac{h}{\sqrt{2Wm_0 + W^2/c^2}}$ (см. задачу 19.34). Подставляя числовые данные, получим: а) $\lambda = 12{,}3 \cdot 10^{-12}$ м; б) $\lambda = 0{,}87 \cdot 10^{-12}$ м.

19.38 Заряженная частица, ускоренная разностью потенциалов $U = 200$ В. имеет длину волны де Бройля $\lambda = 2{,}02$ пм. Найти массу m частицы, если ее заряд численно равен заряду электрона.

Решение

Длина волны де Бройля определяется соотношением $\lambda = \frac{h}{\sqrt{2Wm_0 + W^2/c^2}}$ — (1), где $W = eU$ — (2) — энергия частицы, m_0 — масса покоя частицы. Из (2) найдем $W = 3{,}2 \cdot 10^{-17}$ Дж. Поскольку $W << c$, величиной $\frac{W^2}{c^2}$ в уравнении (1) можно пренебречь и оно примет вид $\lambda = \frac{h}{\sqrt{2Wm}}$, откуда $m = \frac{h^2}{2W\lambda^2} = 1{,}67 \cdot 10^{-27}$ кг.

19.39 Составить таблицу значений длин волн де Бройля для электрона, движущегося со скоростью v, равной: $2 \cdot 10^8$; $2{,}2 \cdot 10^8$; $2{,}4 \cdot 10^8$; $2{,}6 \cdot 10^8$; $2{,}8 \cdot 10^8$ м/с.

Решение

Воспользовавшись формулой для нахождения длины волны де Бройля $\lambda = \frac{h}{m_0 v}\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$, составим таблицу.

v, 10^8 м/с	2,0	2,2	2,4	2,6	2,8
λ, пм	2,7	2,25	1,82	1,39	0,92[illegible]

19.40 α-частица движется по окружности радиусом r = 8,3 мм в однородном магнитном поле, напряженность которого H = 18,9 кА/м. Найти длину волны де Бройля λ для α-частицы.

Решение

На α-частицу, движущуюся в однородном магнитном поле, действует сила Лоренца $F_л = qvB$ — (1), которая является центростремительной силой и сообщает частице нормальное ускорение $a_n = \frac{v^2}{r}$ — (2). По второму закону Ньютона $F_л = \frac{mv^2}{r}$ — (4). Приравнивая правые части уравнений (1) и (4), получаем $qvB = \frac{mv^2}{r}$, откуда скорость α-частицы $v = \frac{qBr}{m}$ — (5). Магнитная индукция связана с напряженностью магнитного поля соотношением $B = \mu\mu_0 H$ — (6), причем для воздуха магнитная проницаемость $\mu = 1$. Подставляя (6) в (5), получаем $v = \frac{q\mu_0 Hr}{m}$ — (7). Длина волны де Бройля $\lambda = \frac{h}{mv}$ — (8). Подставляя (7) в (8), окончательно находим $\lambda = \frac{h}{q\mu_0 Hr} = 13{,}11$ пм.

19.41 Найти длину волны де Бройля λ для атома водорода, движущегося при температуре T = 293 К с наиболее вероятной скоростью.

Решение

Наиболее вероятная скорость движения атома водорода $v_в = \sqrt{\frac{2kT}{m}}$ — (1), где $k = 1{,}38 \cdot 10^{-23}$ Дж/К — постоянная Больцмана. Длина волны де Бройля $\lambda = \frac{h}{mv_в}$ — (2). Подставляя (1) в (2), получаем $\lambda = \frac{h}{\sqrt{2kT/m}} = 180$ пм.

§ 20. Атом Бора. Рентгеновские лучи

20.1 Найти радиусы r_k трех первых боровских электродных орбит в атоме водорода и скорости v_k электрона на них.

Решение

На электрон, движущийся в атоме водорода по k-й боровской орбите, действует кулоновская сила $F = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r_k^2}$ — (1), где e — заряд электрона. Эта сила является центростремительной и сообщает электрону нормальное ускорение $a_n = \frac{v_k^2}{r_k}$ — (2), где v_k — скорость электрона на k-й орбите. По второму закону Ньютона $F = ma_n$ — (3). Подставляя (1) и (2) в (3), получим $\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r_k^2} = \frac{mv_k^2}{r_k}$, откуда $r_k = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 mv_k^2}$ — (4). Согласно первому постулату Бора движение электрона вокруг ядра возможно только по определенным орбитам, радиусы которых удовлетворяют соотношению $mv_k r_k = k\frac{h}{2\pi}$ — (5). Решая совместно уравнения (4) и (5), найдем $v_k = \frac{e^2}{2\varepsilon_0 kh}$ и $r_k = \frac{\varepsilon_0 k^2 h^2}{\pi me^2}$. По результатам вычислений составим таблицу.

k	1	2	3
v, 10^6 м/с	2,18	1,08	0,73
r, 10^{-12} м	52,9	211,6	476,1

20.2 Найти кинетическую W_k, потенциальную W_n и полную W энергии электрона на первой боровской орбите.

Решение

Скорость движения электрона по k-й орбите $v_k = \frac{e^2}{2\varepsilon_0 kh}$ — (1) (см. задачу 20.1). Кинетическая энергия электрона на k-й орбите $W_{\text{к}(k)} = \frac{mv_k^2}{2}$ — (2). Подставляя (1) в (2), получим $W_{\text{к}(k)} = \frac{me^4}{8\varepsilon_0^2 h^2 k^2}$. По условию $k = 1$. Подставляя числовые данные, получим $W_{\text{к}(1)} = 21{,}78 \cdot 10^{-19}$ Дж $= 13{,}6$ эВ. Потенциальная энергия электрона $W_{\text{п}(1)} = -2W_{\text{к}(1)} = -27{,}2$ эВ. Полная энергия электрона $W_1 = W_{\text{к}(1)} + W_{\text{п}(1)} = -13{,}6$ эВ.

20.3 Найти кинетическую энергию W_k электрона, находящегося на k-й орбите атома водорода, для $k = 1$, 2, 3 и ∞.

Решение

Кинетическая энергия электрона на k-й орбите $W_{\text{к}(k)} = \frac{mv_k^2}{2}$ (см. задачу 20.2). Если $k = 1$, то $W_{\text{к}(1)} = 13{,}6$ эВ. Если $k = 2$, то $W_{\text{к}(1)} = 3{,}4$ эВ. Если $k = 3$, то $W_{\text{к}(1)} = 1{,}51$ эВ. Если $k = \infty$, то $W_{\text{к}(1)} = 0$.

20.4 Найти период T обращения электрона на первой боровской орбите атома водорода и его угловую скорость ω.

Решение

Радиус k-й боровской орбиты электрона в атоме водорода и скорость движения электрона по k-й орбите соответственно равны $r_k = \frac{\varepsilon_0 k^2 h^2}{\pi m e^2}$ — (1) и $v_k = \frac{e^2}{2\varepsilon_0 kh}$ — (2) (см. задачу 20.1). Период обращения электрона $T_k = \frac{2\pi r_k}{v_k}$ — (3). Подставляя (1) и (2) в (3), получим $T_k = \frac{4\varepsilon_0^2 k^3 h^3}{me^4}$ — (4). Для $k = 1$ найдем $T_1 = 1{,}52 \cdot 10^{-16}$ с. Угловая скорость движения электрона по k-й орбите $\omega_k = \frac{2\pi}{T_k}$ — (5). Подставляя (4) в (5), получим $\omega_k = \frac{\pi me^4}{2\varepsilon_0^2 k^3 h^3}$. Для $k = 1$ найдем $\omega_1 = 4{,}13 \cdot 10^{16}$ рад/с.

20.5 Найти наименьшую λ_{min} и наибольшую λ_{max} длины волн спектральных линий водорода в видимой области спектра.

Решение

Длины волн спектральных линий водорода всех серий определяются формулой $\frac{1}{\lambda} = R\left(\frac{1}{k^2} - \frac{1}{n^2}\right)$ — (1).

k	n	Серия	Область
1	2,3,4 ...	Лаймана	Ультрафиолетовая
2	3,4,5 ...	Бальмера	видимая
3	4,5,6 ...	Пашена	инфракрасная
4	5,6,7 ...	Брэккета	инфракрасная
5	6,7,8 ...	Пфунда	инфракрасная

Таким образом, видимая область спектра соответствует значениям $k = 2$ и $n = 3, 4, 5$ ... Очевидно, наименьшая длина волны спектральных линий этой серии будет при $n = \infty$. Тогда из (1) имеем $\frac{1}{\lambda_{min}} = \frac{R}{4}$ или $\lambda_{min} = \frac{4}{R} = 365$ нм (с точностью до третьей значащей цифры). Наибольшая длина волны соответствует $n = 3$, при этом $\lambda_{max} = 656$ нм.

20.6 Найти наибольшую длину волны λ_{max} в ультрафиолетовой области спектра водорода. Какую наименьшую скорость v_{min} должны иметь электроны, чтобы при возбуждении атомов водорода ударами электронов появилась эта линия?

Решение

Длины волн спектральных линий водорода всех серий определяются формулой $\frac{1}{\lambda} = R\left(\frac{1}{k^2} - \frac{1}{n^2}\right)$ — (1). В ультрафиолетовой области $k = 1$, $n = 2, 3, 4$ ... — серия Лаймана. Наибольшая длина волны соответствует $n = 2$, тогда из (1) имеем $\frac{1}{\lambda_{max}} = \frac{3R}{4}$ или $\lambda_{max} = \frac{4}{3R}$, где $R = 1{,}1 \cdot 10^7$ м$^{-1}$ — постоянная Ридберга. Подставляя числовые данные, получим $\lambda_{max} = 121$ нм. С другой стороны, из соотношения де Бройля для релятивистских частиц $\lambda_{max} = \frac{h}{mv_{min}}\sqrt{1 - \frac{v_{min}^2}{c^2}}$ — (3). Приравнивая правые части соотношений (2) и (3), получим $\frac{4}{3R} = \frac{h}{mv_{min}}\sqrt{1 - \frac{v_{min}^2}{c^2}}$, откуда наименьшая скорость, необходимая для появления данной спектральной линии, равна $v_{min} = \frac{3Rhc}{\sqrt{16m^2c^2 + 9R^2h^2}} = 1{,}88 \cdot 10^6$ м/с.

20.7 Найти потенциал ионизации U_1 атома водорода.

Решение

Потенциал ионизации U_i атома определяется соотношением $eU_i = A_i$, где A_i — работа по удалению электрона с нормальной орбиты на бесконечность. Для атома водорода $A_i = h\nu = hRc\left(\frac{1}{k^2} - \frac{1}{n^2}\right)$. При $k = 1$ и $n = \infty$ имеем $A_i = hRc$, потенциал ионизации $U_i = \frac{A_i}{e} = \frac{hRc}{e} = 13{,}6$ В.

20.8 Найти первый потенциал возбуждения U_1 атома водорода.

Решение

Первый потенциал возбуждения атома водорода определяется из закона сохранения энергии $W_{п(1)} = W_{к(1)} - W_{к(2)}$, где $W_{п(1)} = eU_1$ — (2) — потенциальная энергия электрона, необходимая для возбуждения. $W_{K(k)} = \frac{me^4}{8\varepsilon_0^2 h^2 k^2}$ — (3) (см. задачу 20.2) — кинетическая энергия электрона на k-й орбите. Подставляя (2) и (3) в (1), получим $eU_1 = \frac{me^4}{8\varepsilon_0^2 h^2}\left(\frac{1}{k_1^2} - \frac{1}{k_2^2}\right)$, откуда, учитывая, что $k_1 = 1$ и $k_2 = 2$, найдем $U_1 = \frac{3me^3}{32\varepsilon_0^2 h^2} = 10.2$ В.

20.9 Какую наименьшую энергию W_{min} (в электроволнах) должны иметь электроны, чтобы при возбуждении атомов водорода ударами этих электронов появились все линии всех серий спектра водорода? Какую наименьшую скорость v_{min} должны иметь эти электроны?

Решение

Все линии всех серий спектра водорода появятся при ионизации атома водорода. Следовательно, наименьшая энергия $W_{min} = eU_i = \frac{mv_{min}^2}{2}$ — (1). Поскольку $W_{min} = 13.6$ эВ (см v задачу 20.7), то из (1) найдем $v_{min} = \sqrt{\frac{2eU_i}{m}} = 2{,}2 \cdot 10^6$ м/с.

20.10 В каких пределах должна лежать энергия бомбардирующих электронов, чтобы при возбуждении атома водорода ударами этих электронов спектр водорода имел только одну спектральную линию?

Решение

Энергия, необходимая для перевода атома в первое возбужденное состояние, $W_1 = 10{,}2$ эВ (см. задачу 20.8). Энергия, необходимая для перевода атома во второе возбужденное состояние $(k = 1,\ n = 3)$, $W_2 = 12{,}1$ эВ. Таким образом, спектр водорода будет иметь только одну спектральную линию, если энергия бомбардирующих электронов лежит в интервале $10{,}2 \le W \le 12{,}1$ эВ.

20.11 Какую наименьшую энергию W_{min} (в электронвольтах) должны иметь электроны, чтобы при возбуждении атомов водорода ударами этих электронов спектр водорода имел три спектральные линии? Найти длины волн λ этих линий.

Решение

Длины волн спектральных линий водорода для всех серий определяются формулой $\frac{1}{\lambda} = R\left(\frac{1}{k^2} - \frac{1}{n^2}\right)$ — (1). Для серий Лаймона первые две линии будут иметь следующие длины волн: 1) Если $k = 1$ и $n = 2$, то $\lambda_1 = 121$ нм. 2) Если $k = 1$ и $n = 3$, то $\lambda_2 = 102{.}6$ нм. Кроме того, первая линия в серии Бальмера при $k = 2$ и $n = 3$ будет иметь длину волны $\lambda_3 = 656{.}3$ нм. Наименьшая энергия бомбардирующих электронов, необходимая для возникновения данных спектральных линий, W_{min} по закону сохранения энергии будет равна энергии, необходимой для перевода атома из основного во второе возбужденное состояние, т. е. $W_{min} = W_{k(1)} - W_{k(3)} = 12{.}03$ эВ.

20.12 В каких пределах должны лежать длины волн λ монохроматического света, чтобы при возбуждении атома водорода квантами этого света наблюдались три спектральные линии?

Решение

Для наблюдения трех спектральных линий необходимо, чтобы мог осуществляться переход электронов в атоме водорода с первого электрического уровня на третий. В этом случае будут наблюдаться две линии серии Лаймана и одна линия серии Бальмера. Формула, позволяющая найти длины волн, соответствующие линиям водородного спектра, имеет вид $\frac{1}{\lambda} = R\left(\frac{1}{k^2} - \frac{1}{n^2}\right)$, где k и n — номера орбит, $R = 1{,}097 \cdot 10^7$ м$^{-1}$ — постоянная Ридберга. Тогда $\lambda = \frac{k^2 n^2}{R(n^2 - k^2)}$. Для минимальной длины волны $k = 1$ и $n = 3$, следовательно, $\lambda_{min} = \frac{9}{8R} = 102{,}6$ нм. Для максимальной длины волны $k = 1$ и $n = 3$, следовательно, $\lambda_{min} = \frac{9}{8R} = 102{,}6$ нм. Для максимальной длины волны $k = 1$ и $n = 2$, следовательно, $\lambda_{max} = \frac{4}{3R} = 121{,}5$ нм. Таким образом, $102{,}6 \le \lambda \le 121{,}5$ нм.

20.13 На сколько изменилась кинетическая энергия электрона в атоме водорода при излучении атомом фотона с длиной волны $\lambda = 486$ нм?

Решение

Согласно второму постулату Бора частота излучения, соответствующая переходу электрона с одной орбиты на другую, определяется формулой $h\nu = \Delta W$ или $\nu = \frac{\Delta W}{h}$ — (1). С другой стороны, $\nu = \frac{c}{\lambda}$ — (2), где $c = 3 \cdot 10^8$ м/с — скорость света, λ — длина волны излученного атомом фотона. Приравнивая правые части уравнений (1) и (2), получаем $\frac{\Delta W}{h} = \frac{c}{\lambda}$, откуда изменение кинетической энергии электрона $\Delta W = \frac{ch}{\lambda} = 2{,}55$ эВ.

20.14 В каких пределах должны лежать длины волн λ монохроматического света, чтобы при возбуждении атомов водорода квантами этого света радиус орбиты r_k электрона увеличился в 9 раз?

Решение

Радиусы орбит, по которым возможно движение электронов в атоме водорода, согласно первому постулату Бора удовлетворяют соотношению $mv_k r_k = k\frac{h}{2\pi}$ — (1), где m — масса электрона, v_k — его скорость на k-й орбите, r_k — радиус этой орбиты, $h = 6{,}62\cdot10^{-34}$ Дж·с — постоянная Планка. На электроны действует кулоновская сила $F_K = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r_k^2}$ — (2), которая является центростремительной

и сообщает электронам нормальное ускорение $a_n = \frac{vk^2}{r_k}$ — (3). По второму закону Ньютона $F_K = ma_n$ — (4). Подставляя (2) и (3) в (4), получаем $\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r_k^2} = m\frac{v_k^2}{r_k}$ — (5), где $e = 1{,}6\cdot10^{-19}$ Кл — элементарный заряд, $\varepsilon_0 = 8{,}85\cdot10^{-12}$ Ф/м. Решая совместно уравнения (1) и (5), находим $r_k = \frac{\varepsilon_0 k^2 h^2}{\pi m e^2}$ — (6). По условию $\frac{r_n}{r_k} = 9$, тогда из формулы (6) следует, что $\frac{n}{k} = 3$. Поскольку $n = 3k$, то переход электронов осуществляется между первым и третьим энергетическими уровнями, тогда (см. задачу 20.12) длины волн $102{,}6 \le \lambda \le 121{,}5$ нм.

20.15 На дифракционную решетку нормально падает пучок света от разрядной трубки, наполненной атомарным водородом. Постоянная решетки $d = 5$ мкм. Какому переходу электрона соответствует спектральная линия, наблюдаемая при помощи этой решетки в спектре пятого порядка под углом $\varphi = 41°$?

Решение

Согласно условию главных максимумов для дифракционной решетки $d\sin\varphi = k\lambda$ — (1). В нашем случае $k = 5$, тогда из формулы (1) имеем $\lambda = \frac{d\sin\varphi}{k}$ — (2). Изменение кинетической энергии электрона при переходе с одной орбиты на другую (см. задачу 20.13) определяется соотношением $\Delta W = \frac{ch}{\lambda}$ — (3). Подставляя (2) в (3), получаем $\Delta W = \frac{chk}{d\sin\varphi} = 1{,}89$ эВ. Подбором находим, что такой переход возможен с $n = 3$ на $k = 2$ в серии Бальмера.

20.16 Найти длину волны де Бройля λ для электрона, движущегося по первой боровской орбите атома водорода.

Решение

Длина волны де Бройля для электрона (см. задачу 20.6) определяется соотношением $\lambda = \frac{h}{mv_k}\sqrt{1-\frac{v_k^2}{c^2}}$ — (1), где $v_k = \frac{l^2}{2\varepsilon_0 kh}$ — (2) (см. задачу 20.1) — скорость электрона на k-й орбите. Подставляя (2) в (1), получаем $\lambda = \frac{2\varepsilon_0 kh^2}{ml^2}\sqrt{1-\frac{l^4}{4\varepsilon_0 k^2 h^2 c^2}} = 0{,}33$ нм.

20.17 Найти радиус r_1 первой боровской электронной орбиты для однократно ионизированного гелия и скорость v_1 электрона на ней.

Решение

В однократно ионизированном гелии на электрон, движущийся по первой боровской орбите, будет действовать сила Кулона $F_K = \frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 r_1^2}$ — (1), где Z — порядковый номер элемента в таблице Менделеева, $e = 1{,}6\cdot10^{-19}$ Кл — заряд электрона, r_1 — радиус первой боровской орбиты. Эта сила является центростремительной и сообщает электрону нормальное ускорение $a_n = \frac{v_1^2}{r_1}$ — (2), где v_1 — скорость электрона на первой боровской орбите. По второму закону Ньютона $F_K = ma_n$ — (3). Подставляя (1) и (2) в (3), получаем $\frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 r_1^2} = \frac{mv_1^2}{r_1}$ — (4). Согласно первому постулату Бора движение электрона вокруг ядра возможно только по определенным орбитам, радиусы которых удовлетворяют соотношению $mv_k r_k = k\frac{h}{2\pi}$, где k — номер орбиты. В нашем случае $k = 1$, поэтому $mv_1 r_1 = \frac{h}{2\pi}$ — (5), где $h = 6{,}62\cdot10^{-34}$ Дж·с — постоянная Планка. Решая совместно уравнения (4) и (5), находим радиус первой боровской орбиты r_1 и скорость электрона на ней, которые соответственно равны $r_1 = \frac{\varepsilon_0 h^2}{\pi m Z e^2} = 26{,}47$ пм и $v_1 = \frac{Ze^2}{2\varepsilon_0 h} = 4{,}37\cdot10^6$ м/с.

20.18 Найти первый потенциал возбуждения U_1: а) однократно ионизированного гелия: б) двукратно ионизированного лития.

Решение

Согласно второму постулату Бора частота излучения, соответствующая переходу электрона с одной орбиты на другую, определяется формулой $h\nu = W_n - W_k$ — (1), где k и n — номера орбит, причем $n > k$. В нашем случае $n = 2$ и $k = 1$. В водородоподобных ионах частоты определяются из соотношения $\nu = RcZ^2\left(\frac{1}{k^2} - \frac{1}{n^2}\right)$, где $R = 1{,}097 \cdot 10^7$ м$^{-1}$ — постоянная Ридберга. Подставляя значения k и n для нашего случая, получаем $\nu = \frac{3RcZ^2}{4}$ — (2). Подставляя (2) в (1), получаем $\nu = \frac{3RcZ^2h}{4} = W_n - W_k$ — (3). Для возбуждения водородоподобных ионов электроны должны обладать энергией $W = eU_1$, тогда по закону сохранения энергии $eU_1 = W_n - W_k$ — (4). Приравнивая левые части уравнений (3) и (4), получаем $eU_1 = \frac{3RcZ^2h}{4}$, откуда первый потенциал возбуждения водородоподобного иона $U_1 = \frac{3RcZ^2h}{4e}$. а) Для однократно ионизированного гелия $Z = 2$, поэтому $U_1 = 40{,}8$ В. б) Для двукратно ионизированного лития $Z = 3$, поэтому $U_2 = 91{,}8$ В.

20.19 Найти потенциал ионизации U_1: а) однократно ионизированного гелия: б) двукратно ионизированного лития.

Решение

Потенциал ионизации водородоподобного иона U_i определяется уравнением $eU_i = A_i$ — (1), где A_i — работа удаления электрона с нормальной орбиты в бесконечность. Для водородоподобных ионов $A_i = h\nu$ — (2), где $\nu = RcZ^2\left(\frac{1}{k^2} - \frac{1}{n^2}\right)$ — (3). Подставляя (3) в (2), получаем $A_i = hRcZ^2\left(\frac{1}{k^2} - \frac{1}{n^2}\right)$ — (4). При $k = 1$ и $n = \infty$ формула (4) примет вид $A_i = hRcZ^2$ — (5). Подставляя (5) в (1), получаем $eU_i = hRcZ^2$, откуда потенциал ионизации $U_i = \frac{hRcZ^2}{e}$.

а) Для однократно ионизированного гелия $Z = 2$, поэтому $U_i = 54{,}5$ В. б) Для двукратно ионизированного лития $Z = 3$, поэтому $U_i = 122{,}8$ В.

20.20 Найти длину волны λ фотона, соответствующего переходу электрона со второй боровской орбиты па первую в однократно ионизированном атоме гелия.

Решение

Частота излучения фотона водородоподобным ионом (см. задачу 20.18) при переходе электрона со второй боровской орбиты на первую равна $\nu = \frac{3RcZ^2}{4}$ — (1). С другой стороны, $\nu = \frac{c}{\lambda}$ — (2), где λ — длина волны фотона. Приравнивая правые части уравнений (1) и (2), получаем $\frac{c}{\lambda} = \frac{2RcZ^2}{4}$ или $\frac{1}{\lambda} = \frac{3RZ^2}{4}$, откуда длина волны $\lambda = \frac{4}{3RZ^2}$. Для однократно ионизированного гелия $Z = 2$, поэтому $\lambda = 30.4$ нм.

20.21 Найти длину волны λ фотона, соответствующего переходу электрона со второй боровской орбиты па первую в двукратно ионизированного атома лития.

Решение

Длина волны фотона, соответствующего переходу электрона со второй боровской орбиты на первую (см. задачу 20.20), равна $\lambda = \frac{4}{3RZ^2}$. Для двукратно ионизированного лития $Z = 3$, поэтому $\lambda = 13.5$ нм.

20.22 D-линия натрия излучается в результате такого перехода с одной орбиты атома на другую, при котором энергия атома уменьшается на $\Delta W = 3{,}37 \cdot 10^{-19}$ Дж. Найти длину волны λ D-линии натрия.

Решение

Изменение кинетической энергии электрона при переходе с одной орбиты атома на другую (см. задачу 20.13) равно $\Delta W = \frac{ch}{\lambda}$, откуда длина волны D-линии натрия $\lambda = \frac{ch}{\Delta W} = 589$ нм.

20.23 На рисунке изображена схема прибора для определения резонансного потенциала натрия. Трубка содержит пары натрия. Электроды *G* и *A* имеют одинаковый потенциал. При какой наименьшей ускоряющей разности потенциалов *U* между катодом *K* и сеткой *G* наблюдается спектральная линия с длиной волны $\lambda = 589$ нм?

Решение

По закону сохранения энергии потенциальная энергия электрического поля между катодом и анодом $W_п = eU$ — (1) идет на изменение кинетической энергии электронов при переходе с одной орбиты на другую, которое (см задачу 20.13) равно $\Delta W = \frac{ch}{\lambda}$ — (2), т. е. $W_п = \Delta W$ — (3). Подставляя (1) и (2) в (3), получаем $eU = \frac{ch}{\lambda}$, откуда ускоряющая разность потенциалов $U = \frac{ch}{e\lambda} = 2{,}1$ В.

20.24 Электрон, пройдя разность потенциалов $U = 4{,}9$ В, сталкивается с атомом ртути и переводит его в первое возбужденное состояние. Какую длину волны λ имеет фотон, соответствующий переходу атома ртути в нормальное состояние?

Решение

Ускоряющая разность потенциалов (см. задачу 20.23) равна $U = \frac{ch}{e\lambda}$. Отсюда длина волны фотона, соответствующего переходу атома ртути в нормальное состояние, $\lambda = \frac{ch}{eU} = 533$ нм.

20.25 На рисунке изображена установка для наблюдения дифракции рентгеновских лучей. При вращении кристалла С только тот луч будет отражаться на фотографическую пластинку В, длина волны которого удовлетворяет уравнению Вулфа Брэма. При каком наименьшем угле φ между мощностью кристалла и пучком рентгеновских лучей были отражены рентгеновские лучи с длиной волны $\lambda = 20$ пм? Постоянная решетками кристалла $d = 303$ пм.

Решение

Наименьший угол соответствует спектру первого порядка, т. е. $\lambda = 2d\sin\varphi$, откуда $\sin\varphi = \frac{\lambda}{2d} = 0{,}033$; $\varphi \approx 2°$.

20.26 Найти постоянную решетки d каменной соли. Зная молярную массу μ = 0.058 кг/моль каменной соли и ее плотность $\rho = 2{,}2\cdot10^3$ кг/м^3. Кристаллы каменной соли обладают простой кубической структурой.

Решение

Молярный объем каменной соли $V = \frac{\mu}{\rho}$. Количество ионов в молярном объеме равно $2N_A$. Объем, приходящийся на один ион, $V_1 = \frac{\mu}{2\rho N_A}$, отсюда расстояние между ионами, или постоянная решетки, $d = \sqrt[3]{V_1} = \sqrt[3]{\frac{\mu}{2\rho N_A}} = 281\cdot10^{-12}$ м.

20.27 При экспериментальном определении постоянной Планка h при помощи рентгеновских лучей кристалл устанавливается под некоторым углом φ, а разность потенциалов U, приложенная к электродам рентгеновской трубки, увеличивается до тех пор, пока не появится линия, соответствующая этому углу. Найти постоянную Планка h из следующих данных: кристалл каменной соли установлен под углом φ = 14°, разность потенциалов, при которой впервые появилась линия, соответствующая этому углу, U = 9,1 кВ: постоянная решетки кристалла d = 281 пм.

Решение

При увеличении разности потенциалов U, приложенной к электродам рентгеновской трубки, появляется спектральная линия в спектре первого порядка, длина волны которой λ удовлетворяет уравнению $eU = h\nu = \frac{hc}{\lambda}$ — (1). Но по формуле Вульфа — Брэгга $\lambda = 2d\sin\varphi$ — (2). Из (1) и (2) находим $h = \frac{eU\lambda}{c} = \frac{eU\cdot 2d}{c}\sin\varphi = 6{,}6\cdot10^{-34}$ Дж·с.

20.28 К электродам рентгеновской трубки приложена разность потенциалов U = 60 кB. Наименьшая длина волны рентгеновских лучей, получаемых от этой трубки λ = 20,6 нм. Найти из этих данных постоянную h Планка.

Решение

Частота $\nu_0 = \frac{c}{\lambda_{min}}$ — (1), соответствующая коротковолновой границе сплошного рентгеновского спектра, где λ_{min} — наименьшая длина волны рентгеновских лучей, получаемых от этой трубки, может быть найдена из соотношения $h\nu_0 = eU$ — (2). Подставляя (1) в (2), получаем $\frac{hc}{\lambda_{min}} = eU$, откуда постоянная Планка $h = \frac{eU\lambda_{min}}{c} = 6.62\cdot10^{-34}$ Дж·с.

20.29 Найти длину волны λ, определяющую коротковолновую границу непрерывного рентгеновского спектра для случаев, когда к рентгеновской трубке приложена разность потенциалов U, равная: 30, 40, 50 кВ.

Решение

Частота $\nu_1 = \frac{c}{\lambda}$ — (1), соответствующая коротковолновой границе сплошного рентгеновского спектра (см. задачу 20.28), может быть найдена из соотношения $h\nu_1 = eU$ — (2). Подставляя (1) в (2), получаем $\frac{hc}{\lambda} = eU$, откуда длина волны, определяющая коротковолновую границу непрерывного рентгеновского спектра, $\lambda = \frac{hc}{eU}$. Если $U_1 = 30$ кВ, то $\lambda_1 = 43.1$ пм. Если $U_2 = 40$ кВ, то $\lambda_2 = 31$ пм. Если $U_3 = 50$ кВ, то $\lambda_3 = 24.8$ пм.

20.30 Найти длину волны λ, определяющую коротковолновую границу непрерывного рентгеновского спектра, если известно, что уменьшение приложенного к рентгеновской трубке напряжения на ΔU = 23 кВ увеличивает искомую длину волны в 2 раза.

Решение

Длина волны, определяющая коротковолновую границу непрерывного рентгеновского спектра (см. задачу 20.29), равна $\lambda = \frac{hc}{eU}$ — (1). По условию $2\lambda = \frac{hc}{e(U - \Delta U)}$ — (2). Разделив (2) на (1), получаем $\frac{U}{U - \Delta U} = 2$, откуда $U = 2\Delta U$ — (3). Подставляя (3) в (1), получаем $\lambda = \frac{hc}{2e\Delta U} = 27$ пм.

20.31 Длина волны гамма-излучения радия λ = 1,6 пм. Какую разность потенциалов U надо приложить к рентгеновской трубке, чтобы получить рентгеновские лучи с этой длиной волны?

Решение

Длина волны гамма-излучения радия (см. задачу 20.29) равна $\lambda = \frac{hc}{eU}$. Отсюда разность потенциалов, которую необходимо приложить к рентгеновской трубке, $U = \frac{hc}{e\lambda} = 775$ кВ.

20.32 Какую наименьшую разность потенциалов U надо приложить к рентгеновской трубке, чтобы получить все линии K-серии, если в качестве материала антикатода взять: а) медь; б) серебро; в) вольфрам; г) платину?

Решение

Все линии K-серии (а также линии остальных серий) появятся одновременно, как только будет удален электрон с K-орбиты атома. Для этого надо приложить разность потенциалов U, удовлетворяющую соотношению $eU = h\nu = \frac{hc}{\lambda}$, где λ — длина волны, соответствующая переходу бесконечно удаленного электрона на K-орбиту, т. е. длина волны, определяющая границу K-серии. Для нашего случая длина волны λ равна (см. таблицу 19): а) 138пм; б) 48,4пм; в) 17,8пм; г) 15,8пм. Искомая разность потенциалов найдется по формуле $U = \frac{hc}{e\lambda}$. Подставляя числовые данные, получим следующие значения для разности потенциалов U: а) 9 кВ; б) 25,3 кВ; в) 69 кВ; г) 79 кВ.

20.33 Считая, что формула Мозли с достаточной степенью точности дает связь между длиной волны λ характеристических рентгеновских лучей и порядковым номером элемента Z из которого сделан антикатод, найти наибольшую длину волновых линий K-серии рентгеновских лучей, даваемых трубкой с антикатодом из: а) железа: б) меди; в) молибдена; г) серебра д) тантала; с) вольфрама; ж) платины. Для K-серии постепенная экранирования b = 1.

Решение

Имеем $\frac{1}{\lambda} = R(Z-b)^2\left(\frac{1}{k^2} - \frac{1}{n^2}\right)$ — (1). Наибольшая длина волны K-серии соответствует линии K_α. При этом в формуле (1) мы должны положить $b = 1$, $k = 1$, $n = 2$. Решая уравнение (1) относительно λ и подставляя числовые данные, получим значения λ, равные: а) 194пм; б) 15[illegible]пм; в) 72пм; г) 57,4пм; д) 23,4пм; е) 22,8пм; ж) 20,5пм. Экспериментально найденные значения длин волн λ линии K_α следующие: а) 194пм; б) 154пм; в) 71.2пм; г) 56.3пм; д) 22пм; е) 21.4пм; ж) 19пм.

20.34 Найти постоянную экранирования b для B-серии рентгеновских лучей, если известно, что при переходе электрона в атоме вольфрама с M - на L - слой испускаются рентгеновские лучи с длиной волны λ = 143 пм.

Решение

Переход электрона с M- на L-слой соответствует значениям $k = 2$ и $n = 3$. Порядковый номер вольфрама в таблице Менделеева $Z = 74$. Из формулы Мозли найдем $b = Z - \dfrac{1}{\sqrt{\lambda R\left(1/k^2 - 1/n^2\right)}}$. Подставляя числовые данные, получим $b = 5{,}5$.

20.35 При переходе электрона в атоме с L - на K - слой испускаются рентгеновские лучи с длиной волны λ = 78,8 пм Какой это атом? Для K - серии постоянная экранирования b = 1.

Решение

Длина волны рентгеновских характеристических лучей может быть найдена по формуле Мозли $\dfrac{1}{\lambda} = R(Z-b)^2 \times \left(\dfrac{1}{k^2} - \dfrac{1}{n^2}\right)$ — (1), где Z — порядковый номер элемента, b — постоянная экранирования. При этом для K-серии $k = 1$ и $n = 2$. Из формулы (1) находим $Z = \dfrac{kn}{\sqrt{\lambda R\left(n^2 - k^2\right)}} + b = 40$. По таблице Менделеева находим, что элемент с порядковым номером $Z = 40$ — цирконий.

20.36 Воздух в некотором объеме V облучается рентгеновскими лучами. Экспозиционная доза излучения D_0 = 4,5 Р. Какая доля атомов, находящихся в данном объеме, будет ионизирована этим излучением?

Решение

По определению экспозиционной дозы излучения $D_x = \dfrac{\Delta Q}{\Delta m}$ — (1), где $\Delta Q = N_x e$ — (2) — суммарный электрический заряд всех ионов одного знака, созданных электронами, освобожденными в облученном воздухе при условии полного использования ионизирующей способности электронов. $\Delta m = \dfrac{N}{N_A}\mu$ — (3) — масса воздуха. Подставляя (2) и (3) в (1), получаем $D_x = \dfrac{N_x N_A e}{N\mu}$, откуда доля атомов, ионизированных излучением, $\dfrac{N_x}{N} = \dfrac{\mu D_x}{N_A e}$. Воздух в первом приближении можно считать азотом с молярной массой $\mu = 0{,}028$ кг/моль. Подставляя числовые данные, получим $\frac{N_0}{N} = 3{,}42 \cdot 10^{-10}$.

20.37 Рентгеновская трубка создаст на некотором расстоянии мощность экспозиционной дозы $P_э$ = 2,58·10^{-5} А/кг. Какое число N пар ионов в единицу времени создает эта трубка на единицу массы воздуха при данном расстоянии?

Решение

По определению мощности экспозиционной дозы излучения $P_э = \frac{D_э}{\Delta t}$ — (1), где $D_э = \frac{\Delta Q}{\Delta m}$ — (2) — экспозиционная доза излучения, Δt — интервал времени, за которое получена эта доза, Δm — масса ионизированного вещества, $\Delta Q = Ne$ — (3) — суммарный электрический заряд всех ионов одного знака. Подставляя (2) и (3) в (1), получаем $P_э = \frac{Ne}{\Delta t \Delta m}$, откуда число пар ионов $N = \frac{P_э \Delta t \Delta m}{e}$. По условию $\Delta t = 1$ с и $\Delta m = 1$ кг, тогда, подставляя значения, находим $N = 1{,}61 \cdot 10^{14}$ с$^{-1}$·кг$^{-1}$.

20.38 Воздух, находящийся при нормальных условиях в ионизационной камере объемом V = 6 см^3, облучается рентгеновскими лучами. Мощность экспозиционной дозы рентгеновских лучей $P_э$ = 0,48 мР/ч. Найти ионизационный ток насыщения $I_н$.

Решение

По определению мощности экспозиционной дозы излучения $P_э = \frac{D_э}{\Delta t}$ — (1), где $D_э = \frac{\Delta Q}{\Delta m}$ — (2) — экспозиционная доза излучения, Δt — интервал времени, за которое получена эта доза. Подставляя (2) в (1), получаем $P_э = \frac{\Delta Q}{\Delta m \Delta t}$ — (3). Ионизационный ток насыщения $I_н = \frac{\Delta Q}{\Delta t}$, откуда суммарный электрический заряд всех ионов одного знака $\Delta Q = I_н \Delta t$ — (4). Подставляя (4) в (3), получаем $P_э = \frac{I_н}{\Delta m}$, откуда ионизационный ток насыщения $I_н = P_э \Delta m$ — (5). Из уравнения Менделеева — Клапейрона $pV = \frac{\Delta m}{\mu} RT$, учитывая, что молярная масса воздуха $\mu = 0{,}029$ кг/моль, получаем $\Delta m = \frac{pV\mu}{RT}$ — (6). Подставляя (6) в (5), окончательно находим $I_н = \frac{P_э pV\mu}{RT}$ или

$$I_н = \frac{0{,}48 \cdot 10^{-3} \cdot 1{,}013 \cdot 10^5 \cdot 6 \cdot 10^{-6} \cdot 29 \cdot 10^{-3}}{3{,}6 \cdot 10^3 \cdot 8{,}31 \cdot 273} = 10^{-12}\ А^*.$$

20.39 Найти для алюминия толщину $x_{1/2}$ слоя половинного ослабления для рентгеновских лучей некоторой длины волны. Массовый коэффициент поглощения алюминия для этой длины волны $\mu_м = 5{,}3$ м^2/кг.

Решение

Интенсивность пучка рентгеновских лучей, прошедших сквозь пластинку толщиной x, определяется формулой $I = I_0 e^{-\mu x}$ — (1), где I_0 — интенсивность пучка, падающего на пластинку, μ — линейный коэффициент поглощения. Массовый коэффициент поглощения $\mu_м$ связан с линейным коэффициентом поглощения μ соотношением $\mu_м = \frac{\mu}{\rho}$, откуда $\mu = \mu_м \rho$ — (2). Подставляя (2) в (1), получаем $I = I_0 e^{-\mu_м \rho x}$ — (3). Пройдя поглощающий слой толщиной, равной толщине слоя половинного ослабления $x_{1/2}$, рентгеновские лучи будут иметь интенсивность $I = \frac{I_0}{2}$ — (4). Подставляя (4) в (3), получаем $\frac{1}{2} = exp(-\mu_м \rho x_{1/2})$ — (5). Прологарифмировав выражение (5), получим искомое значение толщины слоя половинного ослабления. $x_{1/2} = \frac{ln 2}{\mu_м \rho} = 0{,}5$ мм.

20.40 Во сколько раз уменьшится интенсивность рентгеновских лучей с длиной волны $\lambda = 20$ пм при прохождении слоя железа толщиной $d = 0{,}15$ мм? Массовый коэффициент поглощения железа для этой длины волны $\mu_м = 1{,}1$ м^2/кг.

Решение

Интенсивность пучка рентгеновских лучей, прошедших сквозь пластинку толщиной d (см. задачу 20.39), равна $I = I_0 exp(-\mu_м \rho d)$, откуда $\frac{I_0}{I} = exp(\mu_м \rho d) = 3{,}68$.

20.41 Найти толщину $x_{1/2}$ слоя половинного ослабления для железа в условиях предыдущей задачи.

Решение

Толщина слоя половинного ослабления (см. задачу 20.39) $x_{1/2} = \frac{ln 2}{\mu_м \rho} = 79{,}76$ мкм.

20.42 В нижеследующей таблице приведены для некоторых материалов значения толщины слоя $x_{1/2}$ половинного ослабления рентгеновских лучей, энергия которых W = 1 МэВ. Найти линейный μ и массовый $\mu_м$ коэффициенты поглощения этих материалов для данной энергии рентгеновских лучей. Для какой длины волны λ рентгеновских лучей получены эти данные?

Решение

Толщина слоя половинного ослабления (см. задачу 20.39) $x_{1/2} = \frac{\ln 2}{\mu_м \rho}$, откуда массовый коэффициент поглощения $\mu_м = \frac{\ln 2}{x_{1/2}\rho}$ — (1). С другой стороны, $\mu_м = \frac{\mu}{\rho}$ — (2). Приравнивая правые части уравнений (1) и (2), получаем $\mu = \frac{\ln 2}{x_{1/2}}$ — (3). Подставляя числовые данные в формулы (1) и (3), заполняем таблицу.

Вещество	Вода	Алюминий	Железо	Свинец
$x_{1/2}$, см	10,2	4,5	1,56	0,87
ρ, кг/м^3	1000	2600	7900	11300
μ, м$^{-1}$	6,7	16	44	77
$\mu_м$, 10^{-3} м^2/кг	6,7	6,2	5,6	6,8

Энергия рентгеновских лучей равна $W = h\nu = h\frac{c}{\lambda}$, откуда длина волны $\lambda = \frac{hc}{W} = 1{,}24$ пм.

20.43 Сколько слоев половинного ослабления необходимо для уменьшения интенсивности рентгеновских лучей в 80 раз?

Решение

Интенсивность пучка рентгеновских лучей, прошедших сквозь пластинку толщиной d (см. задачу 20.39), равна $I = I_0 \exp(-\mu_м \rho d)$, откуда $\frac{I_0}{I} = \exp(\mu_м \rho d)$ — (1). По условию $\frac{I_0}{I} = 80$ — (2). Подставляя (2) в (1) и логарифмируя полученное уравнение, находим $\ln 80 = \mu_м \rho d$, откуда толщина слоя, необходимого для уменьшения интенсивности рентгеновских лучей в 80 раз, равна $d = \frac{\ln 80}{\mu_м \rho}$ — (3). Толщина слоя половинного ослабления интенсивности рентгеновских лучей равна $x_{1/2} = \frac{\ln 2}{\mu_м \rho}$ — (4). Количество слоев, необходимое для уменьшения интенсивности в 80 раз, равно $n = \frac{d}{x_{1/2}}$ — (5). Подставляя (3) и (4) в (5), получаем $n = \frac{\ln 80}{\ln 2} = 6{,}32$.

§ 21. Радиоактивность

21.1 Сколько атомов полония распадается за время $\Delta t = 1$ сут из $N = 10^6$ атомов?

Решение

За время Δt распадается число атомов $|\Delta N| = \lambda N \Delta t$ — (1). Эта формула применима при $\Delta t << T_{1/2}$, где $T_{1/2}$ — период полураспада. Период полураспада полония $T_{1/2} = 138$ сут (таблица 22), следовательно, для $\Delta t = 1$ сут число распадающихся атомов можно определить по формуле (1). Подставляя числовые данные, получим $|\Delta N| = \frac{\ln 2}{T_{1/2}} N \Delta t = 5025$ сут$^{-1}$.

21.2 Сколько атомов радона распадается за время $\Delta t = 1$ сут из $N = 10^6$ атомов?

Решение

Период полураспада радона $T_{1/2} = 3{,}82$ сут, следовательно, мы не можем использовать формулу из предыдущей задачи. Необходимо воспользоваться формулой $N = N_0 e^{-\lambda t}$, тогда искомое количество атомов $\Delta N = N_0 - N = N_0\left(1 - e^{-\lambda t}\right)$. Подставляя числовые данные, получим $\Delta N = 1{,}67 \cdot 10^5$ сут$^{-1}$.

21.3 Найти активность a массы $m = 1$ г радия.

Решение

Активностью радиоактивного вещества называется число распадов, которое происходит в нем в единицу времени $a = \frac{dN}{dt} = -\lambda N$ — (1), где λ — постоянная распада, N — число атомов радиоактивного вещества. Период полураспада и постоянная распада связаны между собой соотношением $T_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda}$, откуда $\lambda = \frac{\ln 2}{T_{1/2}}$ — (2). Число распадающихся атомов радия равно $N = \frac{m}{\mu} N_A$ — (3), где $\mu = 226$ г/моль — молярная масса радия, $N_A = 6{,}022 \times 10^{23}$ моль$^{-1}$ — постоянная Авогадро. Подставляя (2) и (3) в (1), получаем $a = \frac{m N_A \ln 2}{\mu T_{1/2}} = 3{,}68 \cdot 10^{10}$ Бк.

21.4 Найти массу m радона, активность которого $a = 3{,}7\cdot10^{10}$ Бк.

Решение

Активность радиоактивного вещества (см. задачу 21 равна $a = \frac{mN_A \ln 2}{\mu T_{1/2}}$. Отсюда масса радиоактивного веще ва равна $m = \frac{a\mu T_{1/2}}{N_A \ln 2} = 6{,}49\cdot10^{-9}$ кг.

21.5 Найти массу m полония $^{210}_{84}Po$, активность которого $a = 3{,}7\cdot10^{10}$ Бк.

Решение

Масса радиоактивного вещества (см. задачу 21.4) равна $m = \frac{a\mu T_{1/2}}{N_A \ln 2} = 0{,}22$ мг.

21.6 Найти постоянную распада λ радона, если известно, что число атомов радона уменьшается за время $t = 1$ сут на 18,2%.

Решение

Число атомов радиоактивного вещества dN, распадающихся за время dt, пропорционально числу имеющихся атомов и определяется соотношением $\frac{dN}{dt} = -\lambda N$, откуда, разделив переменные, получим $\frac{dN}{N} = -\lambda dt$. Интегрируя полученное выражение, получаем $\ln\left(\frac{N}{N_0}\right) = -\lambda t$, откуда постоянная распада $\lambda = -\frac{\ln(N/N_0)}{t}$ — (1). По условию задачи $N = (1-x)N_0$ — (2), где N_0 — число атомов по истечении времени t, $x = 0{,}182$ — доля атомов, распавшихся за время t. Подставляя (2) в (1), окончательно получаем $\lambda = -\frac{\lambda \ln(1-x)}{t} = 2{,}33\cdot10^{-6}$ с$^{-1}$.

21.7 Найти удельную активность a_m: а) урана ${}^{235}_{92}U$; б) радона ${}^{222}_{86}Rn$.

Решение

Удельной активностью радиоактивного вещества называется активность его единицы массы $a_m = \frac{a}{m}$ — (1). Поскольку активность радиоактивного вещества (см. зада 21.3) равна $a = \frac{mN_A \ln 2}{\mu T_{1/2}}$ — (2), то, подставляя (2) в (1) получаем $a_m = \frac{N_A \ln 2}{\mu T_{1/2}}$. а) Для урана ${}^{235}_{92}U$ $\mu = 235$ г/моль $T_{1/2} = 7{,}1 \cdot 10^8$ лет, следовательно, $a_m = 7{,}93 \cdot 1^7$ Бк/к б) Для радона ${}^{222}_{86}Rn$ $\mu = 222$ г/моль и $T_{1/2} = 3{,}82$ су следовательно, $a_m = 5{,}69 \cdot 10^{18}$ Бк/кг.

21.8 Ионизационные счетчики Гейгера — Мюллера имеют в отсутствие радиоактивного препарата определенный фон. Присутствие фона может быть вызвано космическим излучение или радиоактивными загрязнениями. Какой массе радона соответствует фон, дающий 1 отброс счетчика за время $t = 5$ с?

Решение

Число атомов радиоактивного вещества, распадающихся время Δt, определяется формулой $|\Delta N| = \frac{\ln 2}{T_{1/2}} N \Delta t$ (с задачу 21.1). Исходное число атомов $N = \frac{m}{\mu} N_A$. условию $\Delta N = 1$, $\Delta t = t = 5$ с. Тогда $1 = \frac{\ln 2}{T_{1/2}} \frac{m}{\mu} N_A t$, отку $m = \frac{\mu T1/2}{N_A t \ln 2}$. Подставляя числовые данные, получ $m = 3{,}5 \cdot 10^{-20}$ кг.

21.9 При помощи ионизационного счетчика исследует активность некоторого радиоактивного изотопа. В начальный момент времени счетчик дает 75 отбросов за время $t = 10$ с. Какое число отбросов за время $t = 10$ с дает счетчик по истечении времени $t = T_{1/2}/2$? Считать $T_{1/2} >> 10$с.

Решение

В начальный момент времени активность радиоактивного изотопа равна $a_1 = \frac{N_0}{t}$ — (1), а спустя время $t_1 = \frac{T_{1/2}}{2}$ — (2) она станет равной $a_2 = \frac{N}{t}$ — (3), где N_0 и N — соответственно число атомов радиоактивного изотопа в начальный момент времени и через время t_1, которые связаны между собой соотношением $N = N_0 \exp(-\lambda t_1)$. Отсюда $\frac{N}{N_0} = \exp(-\lambda t_1)$ или, с учетом (2), $\frac{N}{N_0} = \exp\left(-\frac{\lambda T_{1/2}}{2}\right)$ — (4). Период полураспада и постоянная распада связаны соотношением $T_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda}$, откуда $\lambda = \frac{\ln 2}{T_{1/2}}$ — (5). Подставляя (5) в (4), получаем $\frac{N}{N_0} = \exp\left(-\frac{\ln 2}{2}\right)$ — (6). Разделив (3) на (1), получаем $\frac{a_2}{a_1} = \frac{N}{N_0}$ — (7). Сопоставляя формулы (6) и (7), находим, что $\frac{a_2}{a_1} = \exp\left(-\frac{\ln 2}{2}\right)$, откуда окончательно $a_2 = a_1 \exp\left(\frac{\ln 2}{2}\right) = 53$ отброса.

21.10 Некоторый радиоактивный изотоп имеет постоянную распада $\lambda = 4 \cdot 10^{-7}$ с$^{-1}$. Через какое время t распадется 75% первоначальной массы m атомов?

Решение

Число атомов радиоактивного изотопа в начальный момент времени связано с их числом по истечении времени t соотношением $N = N_0 \exp(-\lambda t)$ — (1), где $N = \frac{m}{\mu} N_A$ — (2) и $N_0 = \frac{m_0}{\mu} N_A$ — (3). Подставляя (2) и (3) в (1), получаем $m = m_0 \exp(-\lambda t)$ — (4). По условию $m = (1 - 0{,}75) m_0 = 0{,}25 m_0$ — (5). Подставляя (5) в (4), получаем $\exp(-\lambda t) = 0.25 = \frac{1}{4}$ или $\exp(\lambda t) = 4$ — (6). Логарифмируя уравнение (6), получим $\lambda t = \ln 4$, откуда $t = \frac{\ln 4}{\lambda} = 3{,}47 \cdot 10^6$ с $= 40{,}11$ суток.

21.11 Природный уран представляет собой смесь трех изотопов: $^{234}_{92}U$, $^{235}_{92}U$, $^{238}_{92}U$. Содержание $^{234}_{92}U$ ничтожно (0,006%) на долю $^{235}_{92}U$ приходится 0,71%, а остальную массу (99,28%) составляет $^{238}_{92}U$. Периоды полураспада $T_{1/2}$ этих изотопов соответственно равны $2{,}5\cdot 10^5$ лет, $7{,}1\cdot 10^8$ лет и $4{,}5\cdot 10^9$ лет. Найти процентную долю радиоактивности, вносимую каждым изотопом в общую радиоактивность природного урана.

Решение

Процентная доля радиоактивности, вносимая каждым из изотопов в общую радиоактивность природного урана, определяется отношением числа распадов в единицу времени каждого изотопа к общему числу распадов в единицу времени природного урана. Обозначим через m массу природного урана. Тогда массы изотопов будут равны соответственно $m_1 = 6\cdot 10^{-5} m$, $m_2 = 7{,}1\cdot 10^{-3} m$, $m_3 = 99{,}28\cdot 10^{-2} m$. Число распадов в единицу времени, даваемое изотопом, будет равно $\Delta N_1 = \frac{\ln 2}{T_1} N_1 \Delta t = \frac{\ln 2 N_A m_1 \Delta t}{T_1 A_1}$, $\Delta N_2 = \frac{\ln 2 N_A m_2 \Delta t}{T_2 A_2}$, $\Delta N_3 = \frac{\ln 2 N_A m_3 \Delta t}{T_3 A_3}$, где N_A — постоянная Авогадро, T_i — период полураспада изотопа (индекс 1/2 у T опущен), A_i — его молярная масса. Откуда искомое отношение для каждого изотопа равно

$$x = \frac{\Delta N_i}{\Delta N_1 + \Delta N_2 + \Delta N_3} = \frac{m_i/(A_i T_i)}{m_1/(A_1 T_1) + m_2/(A_2 T_2) + m_3/(A_3 T_3)}.$$

Подставляя числовые данные, нетрудно убедиться, что вся радиоактивность природного урана обусловлена изотопом $^{238}_{92}U$, радиоактивность же изотопов $^{235}_{92}U$ и $^{234}_{92}U$ исчезающе мала.

21.12 Кинетическая энергия α-частицы, вылетающей из ядра атома радия при радиоактивном распаде, $W_1 = 4{,}78$ МэВ. Найти скорость v α-частицы и полную энергию W, выделяющуюся при вылете α-частицы.

Решение

Кинетическая энергия α-частицы $W_1 = \frac{mv^2}{2}$, откуда $v = \sqrt{\frac{2W_1}{m}} = 1{,}52\cdot 10^7$ м/с. Полная энергия W, выделяющаяся при вылете α-частицы, складывается из кинетической энергии α-частицы W_1 и кинетической энергии остаточного ядра W_2, т. е. $W = W_1 + W_2$ — (1). Кроме того, согласно закону сохранения импульса $m_1 v_1 = m_2 v_2$ — (2). Из (2) получим $(m_1 v_1)^2 = \frac{m_1 v_1^2 2m_1}{2} = W_1 2m_1$; $(m_1 v_1)^2 = (m_2 v_2)^2 = \frac{m_2 v_2^2 2m_2}{2} = 2m_2 W_2$. Из (1) имеем $W = W_1 + \frac{2m_1 W_1}{2m_2} = W_1\left(1 + \frac{m_1}{m_2}\right) = W_1 \frac{m_2 + m_1}{m_2}$. Подставляя числовые данные, получим $W = 4{,}87\cdot 10^6$ эВ.

21.13 Какое количество теплоты Q выделяется при распаде радона активностью $a = 3{,}7\cdot10^{10}$ Бк: а) за время $t = 1$ ч; б) за среднее время жизни τ? Кинетическая энергия вылетающей из радона α-частицы $W = 5{,}5$ МэВ.

Решение

По закону сохранения энергии количество тепла, котор выделяется при распаде радона, равно $Q = NW$ — (1), г N — число распадов за время t, W — кинетическ энергия α-частицы. Поскольку $N = at$ — (2), где a активность радона, то, подставляя (2) в (1), получае $Q = atW$ — (3). а) Если $t = 1$ ч, то из формулы ($Q = 117{,}22$ Дж. б) По определению среднее время жизн радона $\tau = \dfrac{1}{\lambda}$ — (4). Поскольку постоянная распада (с задачу 21.9) равна $\lambda = \dfrac{ln 2}{T_{1/2}}$ — (5), то, подставляя (5) в (получаем $\tau = \dfrac{T_{1/2}}{ln 2}$ — (6). Учитывая, что $t = \tau$, подстав (6) в (3), окончательно получаем $Q = \dfrac{aWT_{1/2}}{ln 2} = 15{,}5$ кДж.

21.14 Масса $m = 1$ г урана ${}^{238}_{92}U$ в равновесии с продуктами его распада выделяет мощность $P = 1{,}07\cdot10^{-7}$ Вт. Найти молярную теплоту Q_μ, выделяемую ураном за среднее время жизни атомов урана.

Решение

Мощность, выделяемая при распаде урана ${}^{238}_{92}U$, рав $P = \dfrac{Q}{t}$ — (1), где Q — количество тепла, котор выделится при распаде ${}^{238}_{92}U$ за время t. По услов $t = \tau = \dfrac{1}{\lambda}$ — (2), где τ — среднее время жизни атомов урана ${}^{238}_{92}U$, λ — постоянная распада, которая связана с периодом полураспада урана ${}^{238}_{92}U$ следующим соотношением: $T_{1/2} = \dfrac{ln 2}{\lambda}$, откуда $\lambda = \dfrac{ln 2}{T_{1/2}}$ — (3). Подставляя (3) в (2), получаем $t = \dfrac{T_{1/2}}{ln 2}$ — (4), затем, подставляя (4) в (1), получим $P = \dfrac{Q\, ln 2}{T_{1/2}}$, откуда $Q = \dfrac{PT_{1/2}}{ln 2}$ — (5). Число молей урана ${}^{238}_{92}U$, участвующее в распаде $\nu = \dfrac{m}{\mu}$ — (6), где $\mu = 238$ г/моль — молярная масса урана ${}^{238}_{92}U$. Молярная теплота, выделяемая ураном ${}^{238}_{92}U$ за среднее время жизни его атомов, равна $Q_\mu = \dfrac{Q}{\nu}$ — (7). Подставляя (5) и (6) в (7), окончательно получаем $Q_\mu = \dfrac{PT_{1/2}\mu}{m\, ln 2} = 5{,}21\cdot10^{12}$ Дж/моль.

21.15 Найти активность a радона, образовавшегося из массы $m = 1$ г радия за время $t = 1$ ч.

Решение

Поскольку по условию задачи из радиоактивного изотопа $^{226}_{88}Ra$ образуется новый радиоактивный изотоп $^{222}_{86}Rn$, то по истечении времени t число ядер изотопа $^{222}_{86}Rn$ будет определяться по формуле $N_2 = N_{01}\frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1}\times$ $\times(exp(-\lambda_1 t) - exp(-\lambda_2 t))$ — (1), где $N_{01} = \frac{m_1}{\mu_1}N_A$ — (2) — начальное число ядер изотопа $^{226}_{88}Ra$, λ_1 и λ_2 — соответственно постоянные распада $^{226}_{88}Ra$ и $^{222}_{86}Rn$. Постоянная распада (см. задачу 21.14) равна $\lambda = \frac{ln 2}{T_{1/2}}$ — (3). Подставляя (2) и (3) в (1), получаем $N_2 = \frac{m_1}{\mu_1}N_A\times$ $\times\frac{T_{1/2(2)}}{T_{1/2(1)} - T_{1/2(2)}}\left[exp\left(-\frac{t\,ln 2}{T_{1/2(1)}}\right) - exp\left(-\frac{t\,ln 2}{T_{1/2(2)}}\right)\right]$ — (4). Активность образовавшегося радона равна $a_2 = -\lambda_2 N_2$ — (5). Подставляя (3) и (4) в (5), окончательно получаем

$$N_2 = \frac{m_1 N_A\, ln 2}{\mu_1\left(T_{1/2(1)} - T_{1/2(2)}\right)}\left[exp\left(-\frac{t\,ln 2}{T_{1/2(1)}}\right) - exp\left(-\frac{t\,ln 2}{T_{1/2(2)}}\right)\right];$$

$N_2 = 2{,}85\cdot 10^8$ Бк.

21.16 В результате распада массы m_0 = 1 г радия за время t = 1 год образовалась некоторая масса гелия, занимающая при нормальных условиях объем V = 43 мм^3. Найти из этих данных постоянную Авогадро N_A.

Решение

Согласно основному уравнению молекулярно-кинетической теории $p = nkT$, откуда $n = \frac{p}{kT}$ — (1), где n — число образовавшихся атомов гелия в единице объема, $p = 101$ кПа и $T = 273$ К — соответственно давление и абсолютная температура при нормальных условиях, $k = 1{,}38 \cdot 10^{-23}$ Дж/К — постоянная Больцмана. С другой стороны, $n = \frac{N_0 - N}{V}$ — (2), где $N = N_0 \exp(-\lambda t)$ — (3). Постоянная распада (см. задачу 21.14) равна $\lambda = \frac{\ln 2}{T_{1/2}}$ — (4). Подставляя (4) в (3), получаем $N = N_0 \exp\left(-\frac{t \ln 2}{T_{1/2}}\right)$ — (5). затем, подставляя (5) в (2), получаем $n = \frac{N_0\left[1 - \exp(-t \ln 2 / T_{1/2})\right]}{V}$ — (6). Приравнивая правые части соотношений (1) и (6), получаем $\frac{p}{kT} = \frac{N_0\left[1 - \exp(-t \ln 2 / T_{1/2})\right]}{V}$ — (7). Начальное число атомов радия равно $N_0 = \frac{m_0}{\mu} N_A$ — (8). Подставляя (8) в (7), получаем $\frac{p}{kT} = \frac{m_0 N_A\left[1 - \exp(-t \ln 2 / T_{1/2})\right]}{\mu V}$, откуда окончательно постоянная Авогадро равна $N_A = \frac{pV\mu}{kTm_0\left[1 - \exp(-t \ln 2 / T_{1/2})\right]} = 6 \cdot 10^{23}$ моль$^{-1}$.

21.17 В ампулу помещен препарат, содержащий массу m_0 = 1,5 г радия. Какая масса m радона накопится в этой ампуле по истечении времени $t = T_{1/2}/2$, где $T_{1/2}$ — период полураспада радона?

Решение

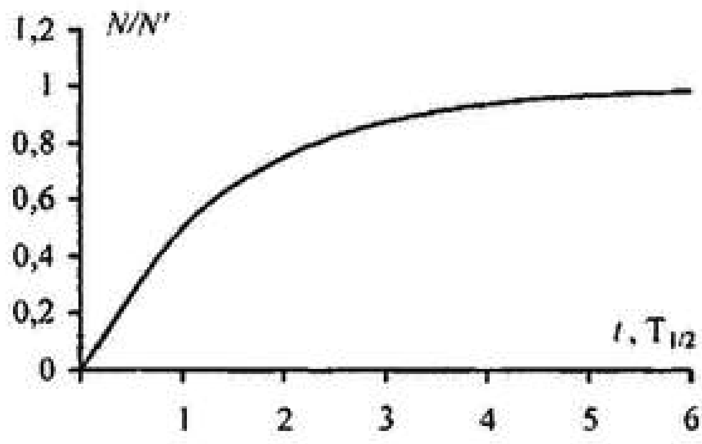
Поскольку период полураспада изотопа $^{222}_{86}Rn$ значительно меньше периода полураспада изотопа $^{226}_{88}Ra$, то число атомов радона, которое накопится в ампуле по истечении времени t, равно $N_2 = N_{01} \frac{\lambda_1}{\lambda_2}\left(1 - \exp(-\lambda_2 t)\right)$ — (1). Поскольку постоянная распада (см. задачу 21.14) равна $\lambda = \frac{\ln 2}{T_{1/2}}$ — (2) и по условию $t = \frac{T_{1/2(2)}}{2}$ — (3), то, подставляя (2) и (3) в (1), получаем $N_2 = N_{01} \frac{T_{1/2(2)}}{T_{1/2(1)}} \times \left[1 - \exp\left(-\frac{\ln 2}{2}\right)\right]$ — (4). Поскольку $N_2 = \frac{m}{\mu_2} N_A$ — (5) и $N_{01} = \frac{m_0}{\mu_1} N_A$ — (6), то, подставляя (5) и (6) в (4), окончательно получаем $m = \frac{m_0 \mu_2 T_{1/2(2)}}{\mu_1 T_{1/2(1)}}\left[1 - \exp\left(-\frac{\ln 2}{2}\right)\right] = 3 \cdot 10^{-9}$ кг.

21.18 Некоторое число атомов радия помещено в замкнутые сосуд. Через какое время t число атомов радона N в этом сосуде будет отличаться на 10% от того числа атомов радона N', которое соответствует радиоактивному равновесию радия с радоном в этом сосуде? Построить кривую зависимости от изменения N/N' в сосуде от времени t в интервале $0 \le t \le 6T_{1/2}$, принимая за единицу времени период полураспада радона $T_{1/2}$.

Решение

Число атомов радона, которое накопится в замкнутом сосуде за время t (см. задачу 21.17), равно $N = N_{01}\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\times$ $\times(1-exp(-\lambda_2 t))$ — (1). При радиоактивном равновесии $\frac{N_{01}}{N'} = \frac{\lambda_2}{\lambda_1}$, откуда $N' = N_{01}\frac{\lambda_1}{\lambda_2}$ — (2). Разделив (1) на (2), получаем $\frac{N}{N'} = (1-exp(-\lambda_2 t))$ — (3). По условию $\frac{N-N'}{N} = 0{,}1$ или $\frac{N}{N'} = 0{,}9$ — (4). Приравнивая правые части соотношений (3) и (4), получаем $1-exp(-\lambda_2 t) = 0{,}9$ или $exp(-\lambda_2 t) = 0{,}1$ — (5). Логарифмируя соотношение (5), получаем $-\lambda_2 t = ln\,0{,}1$ или $t = -\frac{ln\,0{,}1}{\lambda_2}$ — (6). Поскольку постоянная распада равна $\lambda = \frac{ln\,2}{T_{1/2}}$ — (7), то, подставляя (7) в (6), получаем $t = -\frac{T_{1/2(2)}\,ln\,0{,}1}{ln\,2} = 12{,}69$ суток. Подставляя (7) в (3), получаем $\frac{N}{N'} = \left[1-exp\left(-\frac{t\,ln\,2}{T_{1/2(2)}}\right)\right]$. Подставляя в полученную формулу числовые данные, составим таблицу и построим график:

t	0	$T_{1/2}$	$2T_{1/2}$	$3T_{1/2}$	$4T_{1/2}$	$5T_{1/2}$	$6T_{1/2}$
N/N'	0	0,5	0,75	0,875	0,9375	0,96875	0,9844



21.19 Некоторое число атомов радона N' помешено в замкнутый сосуд. Построить кривую зависимости изменения числа атомов радона N/N' в сосуде от времени в интервале $0 \le t \le 20$ сут через каждые 2 сут. Постоянная распада радона $\lambda = 0{,}181$ сут$^{-1}$. Из кривой $N/N' = F(t)$ найти период полураспада $T_{1/2}$ радона.

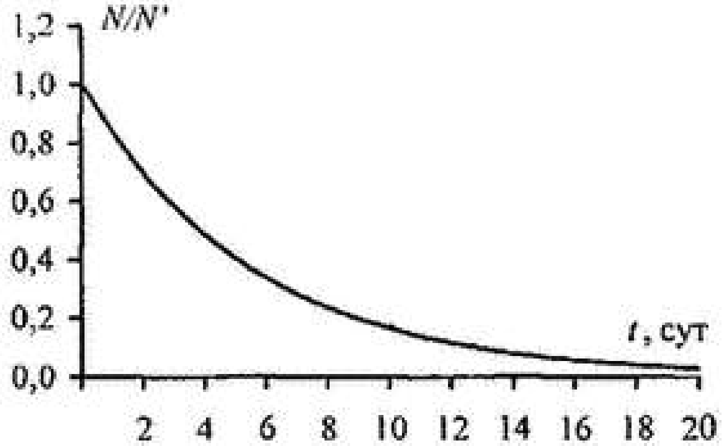
Решение

Имеем $N = N'e^{-\lambda t}$, отсюда $\frac{N}{N'} = e^{-\lambda t} = exp(-0{,}181t)$. Для заданного интервала значений t составим таблицу и построим график. Период полураспада найдем как абсциссу точки кривой, ордината которой равна 0,5. По графику найдем $T_{1/2} = 3{,}8$ сут.

t, сут	0	2	4	6	8	10
N/N'	1	0,696	0,485	0,338	0,235	0,164

Продолжение

t, сут	12	14	16	18	20
N/N'	0,114	0,079	0,055	0,038	0,027



21.20 В нижеследующей таблице приведены результаты измерения зависимости активности α некоторого радиоактивного элемента от времени t. Найти период полураспада $T_{1/2}$ элемента.

Решение

t, ч	0	3	6	9	12	15
a, $3{,}7\cdot10^7$Бк	21,6	12,6	7,6	4,2	2,4	1,8

Как видно из таблицы, измерение активности радиоактивного изотопа производилось через равные промежутки времени $\tau = 3$ часа. По определению активность $a = \left|-\lambda N\right|$ — (1), где N — число распавшихся ядер к моменту времени t. По закону радиоактивного распада $N = N_0\,exp(-\lambda t)$ — (2), где N_0 — начальное число ядер. Начальная активность из формулы (1) равна $a_0 = \lambda N_0$ — (3), а к моменту времени t она станет равной $a(t) = \lambda N(t)$ — (4). Подставляя (2) в (4), получаем $a(t) = \lambda N_0\,exp(-\lambda t)$ — (5). Сопоставляя формулы (3) и (5), нетрудно заметить, что закон изменения активности имеет вид: $a(t) = a_0\,exp(-\lambda t)$ — (6). Подставим в формулу (6) любое значение активности из таблицы, например для $t = 4\tau$, тогда $a_4 = a_0\,exp(-4\tau\lambda)$, откуда $exp(4\tau\lambda) = \dfrac{a_0}{a_4}$ — (7). Логарифмируя выражение (7), получаем $4\tau\lambda = ln\dfrac{a_0}{a_4}$, откуда постоянная распада $\lambda = \dfrac{ln(a_0/a_4)}{4\tau}$ — (8). По определению период полураспада $T_{1/2} = \dfrac{ln2}{\lambda}$ — (9). Подставляя (7) в (8), окончательно получаем $T_{1/2} = \dfrac{4\tau\,ln2}{ln(a_0/a_4)} = 3{,}79$ часа.

21.21 В ампулу помещен радон, активность которого $a_0 = 14{,}8 \cdot 10^9$ Бк. Через какое время t после наполнения ампулы активность радона будет равна $a = 2{,}22 \cdot 10^9$ Бк?

Решение

В начальный момент времени активность радона в ампуле равна $a_0 = -\lambda N_0$ — (1), а спустя время t она станет равной $a = -\lambda N$ — (2). Разделив (2) на (1), получаем $\frac{a}{a_0} = \frac{N}{N_0}$ — (3). Поскольку $N = N_0 exp(-\lambda t)$, то отсюда $\frac{N}{N_0} = exp(-\lambda t)$ — (4). Сопоставляя формулы (3) и (4), находим, что $\frac{a}{a_0} = exp(-\lambda t)$, откуда, логарифмируя, получаем $ln\left(\frac{a}{a_0}\right) = -\lambda t$ — (5). Поскольку постоянная распада (см. задачу 21.14) равна $\lambda = \frac{ln 2}{T_{1/2}}$ — (6), то, подставляя (6) в (5), получаем $ln\left(\frac{a}{a_0}\right) = -\frac{t\,ln 2}{T_{1/2}}$, откуда окончательно находим $t = -\frac{T_{1/2}\, ln(a/a_0)}{ln 2} = 10{,}45$ суток.

21.22 Свинец, содержащийся в урановой руде, является конечным продуктом распада уранового ряда, поэтому из отношения массы урана в руде к массе свинца в ней можно определить возраст руды. Найти возраст t урановой руды, если известно, что на массу $m_{ур} = 1$ кг урана ${}^{238}_{82}U$ в этой руде приходится масса $m_{св} = 320$ г свинца ${}^{206}_{82}Pb$.

Решение

Имеем $N_{св} = N_{ур}\left[1 - exp\left(-\frac{0{,}693t}{T_{1/2}}\right)\right]$;

$\frac{m_{св}}{A_{св}} = \frac{m_{ур}}{A_{ур}}\left[1 - exp\left(-\frac{0{,}693t}{T_{1/2}}\right)\right]$, где $T_{1/2}$ — период полураспада урана, $A_{св}$ и $A_{ур}$ — молярные массы свинца и урана. Отсюда $t = 3 \cdot 10^9$ лет.

21.23 Зная периоды полураспада $T_{1/2}$ радия и урана, найти число атомов урана, приходящееся на один атом радия в природной урановой руде. Указание: учесть, что радиоактивность природного урана обусловлена в основном изотопом $^{238}_{92}U$.

Решение

В природной урановой руде атомы урана и радия находятся в радиоактивном равновесии, поэтому $\frac{N_1}{N_2}=\frac{\lambda_2}{\lambda_1}$ — (1). Поскольку постоянная распада (см. задачу 21.14) равна $\lambda=\frac{\ln 2}{T_{1/2}}$ — (2), то, подставляя (2) в (1), получаем $\frac{N_1}{N_2}=\frac{T_{1/2(1)}}{T_{1/2(2)}}$, откуда $N_2=\frac{N_1 T_{1/2(2)}}{T_{1/2(1)}}$, где $T_{1/2(1)}$ и $T_{1/2(2)}$ — соответственно периоды полураспада радия и урана. Учитывая, что радиоактивность природного урана обусловлена в основном изотопом $^{238}_{92}\mathrm{U}$, то принимаем $T_{1/2(2)}=4{,}5\cdot 10^9$ лет. Поскольку $N_1=1$, то $N_2=\frac{T_{1/2(2)}}{T_{1/2(1)}}=$ $=2{,}83\cdot 10^6$ лет.

21.24 Из какой наименьшей массы m руды, содержащей 42% чистого урана, можно получить массу m_0 = 1 г радия?

Решение

В природной урановой руде (см. задачу 21.23) соотношение атомов радия и урана $\frac{N_1}{N_2}=\frac{T_{1/2(1)}}{T_{1/2(2)}}$ — (1). Количество атомов радия и урана соответственно равно $N_1=\frac{m_0}{\mu_1}N_A$ — (2) и $N_2=\frac{0{,}42m}{\mu_2}N_A$ — (3), поскольку по условию руда содержит 42% чистого урана. Разделив (2) на (3), получаем $\frac{N_1}{N_2}=\frac{m_0\mu_2}{0{,}42m\mu_1}$ — (4). Приравнивая правые части соотношений (4) и (1), получаем $\frac{m_0\mu_2}{0{,}42m\mu_1}=\frac{T_{1/2(2)}}{T_{1/2(1)}}=7{,}09\cdot 10^3$ кг.

21.25 α-частицы из изотопа радия вылетают со скоростью $v = 1{,}5\cdot 10^7$ м/с и ударяются о флуоресцирующий экран. Считая, что экран потребляет на единицу силы света мощность $P_1 = 0{,}25$ Вт/кд, найти силу света I экрана, если на него падают все α-частицы, испускаемые массой $m = 1$ мкг радия.

Решение

Из теории относительности известно, что кинетическая энергия α-частицы зависит от скорости ее движения следующим образом: $W_к = m_0c^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}-1\right)$ — (1), где $\beta = \frac{v}{c}$ — (2) — относительная скорость α-частицы. Подставляя (2) в (1), получаем $W_к = m_0c^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}}-1\right)$ — (3). Полная энергия всех α-частиц, испускаемых радием, равна $W = aW_к$ — (4), где $a = |-\lambda N|$ — (5) — активность радия, $N = \frac{m}{\mu}N_A$ — (6) — число атомов радия, $\lambda = \frac{\ln 2}{T_{1/2}}$ — (7) — постоянная распада радия. Подставляя (6) и (7) в (5), получаем $a = \frac{mN_A \ln 2}{\mu T_{1/2}}$ — (8). Подставляя (3) и (8) в (4), получаем $W = \frac{m_0c^2 mN_A \ln 2}{\mu T_{1/2}}\left(\frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}}-1\right)$ — (9). Мощность, потребляемая экраном на единицу силы света, равна $P_I = \frac{P}{I}$, откуда сила света $I = \frac{P}{P_I}$ — (10). По определению мощность $P = \frac{W}{t}$ — (11), причем в нашем случае $t = 1$ с. Подставляя (11) в (10), получаем $I = \frac{W}{P_I t}$ — (12). Подставляя (9) в (12), окончательно получаем $I = \frac{m_0c^2 mN_A \ln 2}{\mu T_{1/2} P_I t}\left(\frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}}-1\right)$. Подставляя числовые данные, получим $I = 1{,}1\cdot 10^{-4}$ Кд.

21.26 Какая доля первоначальной массы радиоактивного изотопа распадается за время жизни этого изотопа?

Решение

Число атомов радиоактивного изотопа, которое распадается за время t, равно $N = N_0(1 - exp(-\lambda t))$, где N_0 — начальное число атомов, λ — постоянная распада. Отсюда доля первоначальной массы радиоактивного изотопа, которая распадается за время t, равна $\frac{N}{N_0} = 1 - exp(-\lambda t)$ — (1).

Среднее время жизни радиоактивного атома $\tau = \frac{1}{\lambda}$, по условию $t = \tau$ — (3). Подставляя (2), с учетом (3), в (1), получаем $\frac{N}{N_0} = 1 - e^{-1} = 0{,}632$ или $\frac{N}{N_0} = 63{,}2\%$.

21.27 Найти активность a массы $m = 1$ мкг полония $^{210}_{84}Po$.

Решение

Активность радиоактивного изотопа равна $a = |-\lambda N|$ — (1). Постоянная распада (см. задачу 21.14) равна $\lambda = \frac{ln 2}{T_{1/2}}$ — (2). Число атомов полония $^{210}_{84}Po$ равно $N = \frac{m}{\mu} N_A$ — (3). Подставляя (2) и (3) в (1), получаем $a = \frac{m N_A \ln 2}{\mu T_{1/2}} = 1{,}67 \cdot 10^8$ Бк.

21.28 Найти удельную активность a_m искусственно полученного радиоактивного изотопа стронция $^{90}_{38}Sr$.

Решение

Удельная активность радиоактивного изотопа $a_m = \frac{a}{m}$ — (1), где a — активность радиоактивного изотопа, которая (см. задачу 21.27) равна $a = \frac{m N_A \ln 2}{\mu T_{1/2}}$ — (2). Подставляя (2) в (1), получаем $a_m = \frac{N_A \ln 2}{\mu T_{1/2}}$ Бк/кг.

21.29 К массе m_1 = 10 мг радиоактивного изотопа ${}^{45}_{20}Ca$ добавлена масса m_2 = 30 мг нерадиоактивного изотопа ${}^{40}_{20}Ca$. На сколько уменьшилась удельная активность a_m радиоактивного источника?

Решение

Первоначальная удельная активность изотопа ${}^{45}_{20}$Ca равна $a_{m1} = \frac{\Delta N}{m_1 \Delta t} = \frac{\lambda N}{m_1} = \frac{\ln 2 N_A m_1}{T_{1/2} A_1 m_1} = \frac{\ln 2 N_A}{T_{1/2} A_1}$ — (1). После добавления изотопа ${}^{40}_{20}$Ca удельная активность стала равна $a_{m2} = \frac{\Delta N}{(m_1 + m_2)\Delta t} = \frac{\ln 2 N_A m_1}{T_{1/2} A_1 (m_1 + m_2)}$ — (2), где A_1 — молярная масса радиоактивного изотопа. Вычитая (2) из (1), получим $\Delta a_m = \frac{\ln 2 N_A}{T_{1/2} A_1}\left(1 - \frac{m_1}{m_1 + m_2}\right) = \frac{\ln 2 N_A m_2}{T_{1/2} A_1 (m_1 + m_2)}$. Подставляя числовые данные, получим $\Delta a_m = 4{,}9 \cdot 10^{17}$ Бк/кг

21.30 Какую массу m_2 радиоактивного изотопа ${}^{210}_{83}Bi$ надо добавить к массе m_1 = 5 мг нерадиоактивного изотопа ${}^{209}_{83}Bi$, чтобы через время t = 10 сут после этого отношение числа распавшихся атомов к числу нераспавшихся было равно 50%? Постоянная распада изотопа ${}^{210}_{83}Bi$ равна λ = 0,14 сут$^{-1}$.

Решение

Поскольку распадается только радиоактивный изотоп ${}^{210}_{83}$Bi, то число распавшихся атомов будет равно $N_p = \frac{m_2}{\mu_2} N_A (1 - exp(-\lambda t))$ — (1), а число нераспавшихся будет складываться из атомов нерадиоактивного изотопа ${}^{209}_{83}$Bi и нераспавшихся атомов изотопа ${}^{210}_{83}$Bi и будет равно $N_н = \frac{m_1}{\mu_1} N_A + \frac{m_2}{\mu_2} N_A exp(-\lambda t)$ — (2). Разделив (1) на (2), получаем $\frac{N_p}{N_н} = \frac{m_2 \mu_1 (1 - exp(-\lambda t))}{m_1 \mu_2 + m_2 \mu_1 exp(-\lambda t)}$, откуда масса радиоактивного изотопа ${}^{210}_{83}$Bi равна

$$m_2 = \frac{m_1 \mu_2 N_p}{N_н \mu_1 (1 - exp(-\lambda t)(1 + N_p / N_н))}.$$

Подставляя числовые данные, получим $m_2 = 4$ мг.

21.31 Какой изотоп образуется из $^{232}_{90}Th$ после четырех α-распадов и двух β-распадов?

Решение

При α-распаде массовое число радиоактивного изотопа уменьшается на 4, а заряд на 2 единицы. В общем виде уравнение α-распада можно записать как $^{A}_{Z}K_1 \to ^{A-4}_{Z-2}K_2 + ^{4}_{2}\alpha$ — (1). При β-распаде испускается электрон, поэтому заряд ядра возрастает на единицу, а массовое число не изменяется. Таким образом, уравнение β-распада имеет следующий вид: $^{A}_{Z}K_1 \to ^{A}_{Z+1}K_2 + ^{0}_{-1}e$ — (2). Для N распадов уравнения (1) и (2) перепишутся следующим образом: $^{A}_{Z}K_1 \to ^{A-4N}_{Z-2N}K_2 + N^{4}_{2}\alpha$ — (3) и $^{A}_{Z}K_1 \to ^{A}_{Z+N}K_2 + N^{0}_{-1}e$ — (4). Для $N_\alpha = 4$ из уравнения (3) для радиоактивного изотопа $^{232}_{90}Th$ имеем $^{232}_{90}Th \to ^{216}_{82}K_2 + 4^{4}_{2}\alpha$. Для $N_\beta = 2$ из уравнения (4) для радиоактивного изотопа $^{216}_{82}K_1$ имеем $^{216}_{82}K_1 \to ^{216}_{84}K_2 + 2^{0}_{-1}e$. Из таблицы Менделеева находим, что это изотоп $^{216}_{84}Po$.

21.32 Какой изотоп образуется из $^{238}_{92}U$ после трех α-распадов и двух β-распадов?

Решение

Для N α-распадов и β-распадов (см. задачу 21.31) уравнения соответственно имеют вид $^{A}_{Z}K_1 \to ^{A-4N}_{Z-2N}K_2 + N^{4}_{2}\alpha$ — (1) и $^{A}_{Z}K_1 \to ^{A}_{Z+N}K_2 + N^{0}_{-1}e$ — (2). Для $N_\alpha = 3$ из уравнения (1) для радиоактивного изотопа $^{238}_{92}U$ имеем $^{238}_{92}U \to ^{226}_{86}K_2 + 3^{4}_{2}\alpha$. Для $N_\beta = 2$ из уравнения (2) для радиоактивного изотопа $^{226}_{86}K_1$ имеем $^{226}_{86}K_1 \to ^{226}_{88}K_2 + 2^{0}_{-1}e$. Из таблицы Менделеева находим, что это изотоп $^{226}_{88}Ra$.

21.33 Какой изотоп образуется из $^{239}_{92}U$ после двух β-распадов и одного α-распада?

Решение

Для N β-распадов и одного α-распада (см. задачу 21.31) уравнения соответственно имеют вид $^{A}_{Z}K_1 \to ^{A}_{Z+N}K_2 + N^{0}_{-1}e$ — (1) и $^{A}_{Z}K_1 \to ^{A-4}_{Z-2}K_2 + ^{4}_{2}\alpha$ — (2). Для $N_\beta = 2$ из уравнения (1) для радиоактивного изотопа $^{239}_{92}U$ имеем $^{239}_{92}U \to ^{239}_{94}K_2 + 2^{0}_{-1}e$. Из уравнения (2) для радиоактивного изотопа $^{239}_{94}K_1$ имеем $^{239}_{94}K_1 \to ^{235}_{92}K_2 + ^{4}_{2}\alpha$. Из таблицы Менделеева находим, что это изотоп $^{235}_{92}U$.

21.34 Какой изотоп образуется из $^{8}_{3}Li$ после одного β-распада и одного α-распада?

Решение

Для одного β-распада и одного α-распада (см. задачу 21.31) уравнения соответственно имеют вид $^{A}_{Z}K_1 \to ^{A}_{Z+1}K_2 + ^{0}_{-1}e$ — (1) и $^{A}_{Z}K_1 \to ^{A-4}_{Z-2}K_2 + ^{4}_{2}\alpha$ — (2). Из уравнения (1) для радиоактивного изотопа $^{8}_{3}Li$ имеем $^{8}_{3}Li \to ^{8}_{4}K_2 + ^{0}_{-1}e$. Из уравнения (2) для радиоактивного изотопа $^{8}_{4}K_1$ имеем $^{8}_{4}K_1 \to ^{4}_{2}K_2 + ^{4}_{2}\alpha$. Из таблицы Менделеева находим, что это изотоп $^{235}_{92}U$.

21.35 Какой изотоп образуется из $^{133}{}_{51}Sb$ после четырех β-распадов?

Решение

Для N β-распадов (см. задачу 21.31) уравнение имеет вид $^{A}_{Z}K_1 \rightarrow ^{A}_{Z+N}K_2 + N^{0}_{-1}e$. Для $N_\beta = 4$ для радиоактивного изотопа $^{133}_{51}\mathrm{Sb}$ имеем $^{133}_{51}\mathrm{Sb} \rightarrow ^{133}_{55}K_2 + 4^{0}_{-1}e$. Из таблицы Менделеева находим, что это изотоп $^{235}_{92}\mathrm{U}$.

21.36 Кинетическая энергия α-частицы, вылетающей из ядра атома полония $^{214}{}_{84}Po$ при радиоактивном распаде, $W_к = 7{,}68$ МэВ. Найти: а) скорость v α-частицы; б) полную энергию W, выделяющуюся при вылете α-частицы; в) число пар ионов N, образуемых α-частицей, принимая, что на образование одной пары ионов в воздухе требуется энергия $W_0 = 34$ эВ; г) ток насыщения $I_н$ в ионизационной камере от всех α-частиц, испускаемых полонием. Активность полония $a = 3{,}7\cdot10^4$Бк.

Решение

Из теории относительности известно, что кинетическая энергия α-частицы зависит от скорости ее движения следующим образом: $W_к = m_0c^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1\right)$ — (1), где $\beta = \frac{v}{c}$ — (2) — относительная скорость α-частицы. а) Из формулы (1) относительная скорость равна $\beta = \frac{\sqrt{W_к(W_к + 2m_0c^2)}}{W_к + m_0c^2}$ — (3). Приравнивая правые части соотношений (2) и (3), находим скорость α-частицы: $v = \frac{c\sqrt{W_к(W_к + 2m_0c^2)}}{W_к + m_0c^2}$ м/с. б) Полная энергия W, выделяющаяся при вылете α-частицы, равна сумме кинетической энергии $W_{к1}$ α-частицы и кинетической энергии $W_{к2}$ остаточного ядра: $W = W_{к1} + W_{к2}$ — (4). Кроме того, имеет место закон сохранения импульса. Поскольку до распада импульс системы был равен нулю, то после распада $m_1v_1 = m_2v_2$ — (5). Из (5) нетрудно получить $(m_1v_1)^2 = \frac{m_1v_1^2 2m_1}{2} = W_{к1}2m_1 = (m_2v_2)^2 = \frac{m_2v_2^2 2m_2}{2} = W_{к2}2m_2$. Тогда из (4) имеем $W = W_{к1} + \frac{2m_1W_{к1}}{2m_2} = W_{к1}\left(1 + \frac{m_1}{m_2}\right) = W_{к1}\frac{m_1 + m_2}{m_2}$. Подставляя числовые данные, получим $W = 7{,}83$ МэВ. в) Число пар ионов, образуемых α-частицей, равно $N = \frac{W_{к1}}{W_0} = 2{,}26\cdot10^5$. г) Ток насыщения в ионизационной камере от всех α-частиц, испускаемых полонием, равен $I_н = aN|e|$, где N — число пар ионов, образуемых полонием, a — активность полония, e — элементарный заряд. Подставляя числовые данные, находим $I_н = 1{,}34\cdot10^{-9}$ А.

§ 22. Ядерные реакции

22.1 Найти число протонов и нейтронов, входящих в состав ядер трех изотопов магния: *а*) $^{24}_{12}Mg$; б) $^{25}_{12}Mg$; в) $^{26}_{12}Mg$.

Решение

Ядро обозначается тем же символом, что и нейтральный атом: $^{A}_{Z}X$, где X — символ химического элемента; Z — зарядовое число (атомный номер, число протонов в ядре); A — массовое число (число нуклонов в ядре). Число нейтронов в ядре $N = A - Z$. С учетом сказанного найдем: а) ядро $^{24}_{12}Mg$ содержит 12 протонов и 12 нейтронов; ядро $^{25}_{12}Mg$ содержит 12 протонов и 13 нейтронов; ядро $^{26}_{12}Mg$ содержит 12 протонов и 14 нейтронов.

22.2 Найти энергию связи *W* ядра изотопа лития $^{7}_{3}Li$.

Решение

Энергия связи ядра любого изотопа определяется соотношением $W = c^2\Delta m$, где Δm —разность между массой частиц, составляющих ядро, и массой самого ядра. Очевидно, $\Delta m = Zm_p + (A - Z)m_n - m_я$, где m_p — масса протона, m_n — масса нейтрона, $m_я$ — масса ядра изотопа. Т. к. $m_я = m_A - Zm_e$, где m_e — масса электрона, m_A — масса изотопа, то $\Delta m = Zm_{^1_1H} + (A - Z)m_n - m_A$. С помощью таблицы 21 найдем $\Delta m = (3 \cdot 1{,}00783 + 4 \cdot 1{,}00867 - 7{,}01600) = 0{,}04217$ а.е.м. Массе 1 а.е.м. соответствует энергия 931МэВ (см. задачу 17.20), энергия связи ядра $^{7}_{3}Li$ будет равна $W = 0{,}04217 \cdot 931 = 39{,}3$ МэВ. Эту энергию надо затратить, чтобы расщепить ядро $^{7}_{3}Li$ на нуклоны.

22.3 Найти энергию связи *W* ядра атома гелия ^4_2He.

Решение

Энергия связи ядра любого изотопа определяется соотношением $W = c^2 \Delta m$ — (1), где $\Delta m = Zm_p + (A-Z) \times m_n - m_я$ — (2) — разность между массой частиц, составляющих ядро, и массой самого ядра, Z — порядковый номер изотопа, A — массовое число, m_p — масса протона, m_n — масса нейтрона, $m_я$ — масса ядра изотопа. Поскольку $m_я = m_a - Zm_e$ — (3), где m_a — масса изотопа и m_e — масса электрона, то, подставляя (3) в (2), получаем $\Delta m = Zm_{^1_1H} + (A-Z)m_n - m_a$ — (4). Подставляя (4) в (1), окончательно получаем $W = c^2\left[Zm_{^1_1H} + (A-Z)m_n - m_a\right]$. Для гелия ^4_2He: $A = 4$, $Z = 2$, $m_a = 4{,}0026$ а.е.м. Кроме того, $m_{^1_1H} = 1{,}0078$ а.е.м. и $m_n = 1{,}0087$ а.е.м. Подставляя числовые значения, получаем $W = 28{,}6$ МэВ.

22.4 Найти энергию связи *W* ядра атома алюминия $^{27}_{13}Al$.

Решение

Энергия связи ядра любого изотопа (см. задачу 22.3) равна $W = c^2\left[Zm_{^1_1H} + (A-Z)m_n - m_a\right]$. Для алюминия $^{27}_{13}Al$: $A = 27$, $Z = 13$ и $m_a = 26{,}9815$ а.е.м. Подставляя числовые данные, получим $W = 227$ МэВ.

22.5 Найти энергию связи *W* ядер; а) ^3_1H; б) ^3_2He. Какое из этих ядер более устойчиво?

Решение

Энергия связи ядра любого изотопа (см. задачу 22.3) равна $W = c^2\left[Zm_{^1_1H} + (A-Z)m_n - m_a\right]$. а) Для ядра ^3_1H: $A = 3$, $Z = 1$ и $m_a = 3{.}0161$ а.е.м. Подставляя числовые данные, получим $W = 8{.}52$ МэВ. б) Для ядра ^3_2He: $A = 3$, $Z = 2$ и $m_a = 3{.}0160$ а.е.м. Подставляя числовые данные, получим $W = 7{.}81$ МэВ. Поскольку энергия связи ядра ^3_1H больше, чем ядра ^3_2He, следовательно, ядро ^3_1H более устойчивое.

22.6 Найти энергию связи W_c, приходящуюся на один нуклон в ядре атома кислорода ${}^{16}_{8}O$.

Решение

Энергия связи ядра любого изотопа (см. задачу 22.3) равна $W = c^2\left[Zm_{{}^1_1H} + (A-Z)m_n - m_a\right]$ — (1). Энергия связи, приходящаяся на один нуклон в ядре, равна $W_0 = \frac{W}{A}$ — (2). Подставляя (1) в (2), получаем $W_0 = \frac{c^2}{A}\left[Zm_{{}^1_1H} + (A-Z)m_n - m_a\right]$. Для кислорода ${}^{16}_{8}O$: $A = 16$, $Z = 8$ и $m_a = 15{,}9994$ а.е.м. Подставляя числовые данные, получим $W_0 = 7{,}78$ МэВ.

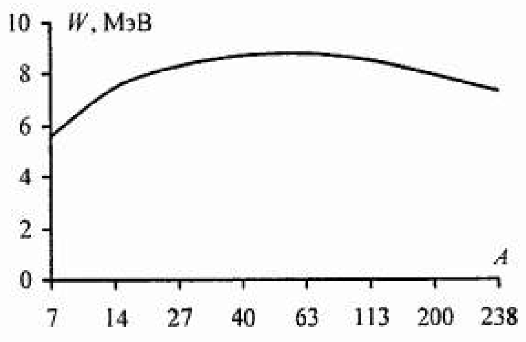
22.7 Найти энергию связи W ядра дейтерия ${}^{2}_{1}H$.

Решение

Энергия связи ядра любого изотопа (см. задачу 22.3) равна $W = c^2\left[Zm_{{}^1_1H} + (A-Z)m_n - m_a\right]$. Для дейтерия ${}^2_1H$: $A = 2$, $Z = 1$ и $m_a = 2{,}0141$ а.е.м. Подставляя числовые данные, получим $W = 2{,}25$ МэВ.

22.8 Найти энергию связи W_0, приходящуюся на один нуклон в ядрах: а) ${}^{7}_{3}Li$; б) ${}^{14}_{7}N$; в) ${}^{27}_{13}Al$; г) ${}^{40}_{20}Ca$; д) ${}^{63}_{29}Cu$; е) ${}^{113}_{48}Cd$; ж) ${}^{200}_{80}Hg$; з) ${}^{238}_{92}U$. Построить зависимость $W_0 = F(A)$, где A - массовое число.

Решение



Между энергией и массой любого вещества существует связь, которая дается уравнением Эйнштейна $W = mc^2$, где $c \approx 3\cdot10^8$ м/с — скорость света в вакууме. Под энергией связи понимают энергию, которая высвобождается в процессе образования из нуклонов атомного ядра, т. е. $W_{св} = \Delta mc^2$, где $\Delta m = \left[Zm_p + (A-Z)m_n - m_Ш\right]$ — дефект массы этого ядра, Z — атомарный номер, A — массовое число. Энергия связи, приходящаяся на один нуклон, $W_0 = \frac{W_{св}}{A} = \frac{(Zm_p + (A-Z)m_n - m_я)c^2}{A}$.

а) $W_0 = \dfrac{(3\cdot1{,}67 + 4\cdot1{,}68 - 7\cdot1{,}66)\cdot10^{-27}\cdot9\cdot10^{16}}{7} =$

$= 0{,}089\cdot10^{-11}$ Дж $= 5.62$ МэВ.

б) $W_0 = \dfrac{(7\cdot1{,}67 + 7\cdot1{,}68 - 14\cdot1{,}66)\cdot10^{-27}\cdot9\cdot10^{16}}{14} =$

$= 0{,}12\cdot10^{-11}$ Дж $= 7{,}53$ МэВ.

в) $W_0 = \dfrac{(13\cdot1{,}67 + 14\cdot1{,}68 - 27\cdot1{,}66)\cdot10^{-27}\cdot9\cdot10^{16}}{27} =$

$= 0{,}134\cdot10^{-11}$ Дж $= 8{,}35$ МэВ.

г) $W_0 = \dfrac{(20\cdot1{,}67 + 20\cdot1{,}68 - 40\cdot1{,}66)\cdot10^{-27}\cdot9\cdot10^{16}}{40} =$

$= 0{,}137\cdot10^{-11}$ Дж $= 8{,}55$ МэВ.

д) $W_0 = \dfrac{(29\cdot1{,}67 + 34\cdot1{,}68 - 63\cdot1{,}66)\cdot10^{-27}\cdot9\cdot10^{16}}{63} =$

$= 0{,}141\cdot10^{-11}$ Дж $= 8.75$ МэВ.

е) $W_0 = \dfrac{(48\cdot1{,}67 + 65\cdot1{,}68 - 113\cdot1{,}66)\cdot10^{-27}\cdot9\cdot10^{16}}{113} =$

$= 0.135\cdot10^{-11}$ Дж $= 8.48$ МэВ.

ж) $W_0 = \dfrac{(80\cdot1{,}67 + 120\cdot1{,}68 - 200\cdot1{,}66)\cdot10^{-27}\cdot9\cdot10^{16}}{200} =$

$= 0.127\cdot10^{-11}$ Дж $= 7{,}93$ МэВ.

з) $W_0 = \dfrac{(92\cdot1{,}67 + 146\cdot1{,}68 - 238\cdot1{,}66)\cdot10^{-27}\cdot9\cdot10^{16}}{238} =$

$= 0{,}0122\cdot10^{-11}$ Дж $= 7.62$ МэВ.

22.9 Найти энергию Q, выделяющуюся при реакции ${}^{7}_{3}Li + {}^{1}_{1}H \rightarrow {}^{4}_{2}He + {}^{2}_{2}He$.

Решение

Изменение энергии при ядерной реакции $Q = c^2 \times \left(\sum m_1 - \sum m_2\right)$ — (1). Сумма масс исходных частиц $\sum m_1 = (7.01600 + 1{,}00783) = 8{,}02383$ а.е.м. Сумма масс образовавшихся частиц $\sum m_2 = (4{,}00260 + 4{,}00260) = 8.00520$ а.е.м. Таким образом, дефект масс $\Delta m = 0.01863$ а.е.м. Тогда из (1) найдем $Q = 17{,}3\cdot10^6$ эВ.

22.10 Найти энергию Q, поглощенную при реакции ${}^{14}_{7}N + {}^{4}_{2}He \rightarrow {}^{1}_{1}H + {}^{17}_{8}O$.

Решение

Изменение энергии при ядерной реакции $Q = c^2 \times \left(\sum m_1 - \sum m_2\right)$, где $\sum m_1$ — сумма масс частиц до реакции, $\sum m_2$ — сумма масс частиц после реакции. В нашем случае $\sum m_1 = m_{{}^{14}_{7}N} + m_{{}^{4}_{2}He} = 18{,}0057$ а.е.м., а $\sum m_2 = m_{{}^{1}_{1}H} + m_{{}^{17}_{8}O} = 18{,}0069$ а.е.м. Поскольку $\sum m_1 < \sum m_2$, то реакция идет с поглощением тепла. Подставляя числовые данные, получим $Q = 1.13$ МэВ.

22.11 Найти энергию Q, выделяющуюся при реакциях a) ${}^{2}_{1}H + {}^{2}_{1}H \rightarrow {}^{1}_{1}H + {}^{3}_{1}H$; б)${}^{2}_{1}H + {}^{2}_{1}H \rightarrow {}^{1}_{1}H + {}^{1}_{0}n$.

Решение

Изменение энергии при ядерной реакции $Q = c^2 \times \times\left(\sum m_1 - \sum m_2\right)$ (см. задачу 22.10). а) $\sum m_1 = m_{{}^2_1H} + m_{{}^2_1H} = 4{,}0566$ а.е.м., а $\sum m_2 = m_{{}^1_1H} + m_{{}^3_1H} = 4{,}0239$ а.е.м. Поскольку $\sum m_1 > \sum m_2$, то реакция идет с выделением тепла. Подставляя числовые данные, получим $Q = 3{,}11$ МэВ. б) $\sum m_1 = m_{{}^2_1H} + m_{{}^2_1H} = 4{,}0566$ а.е.м., а $\sum m_2 = m_{{}^3_2He} + m_{{}^1_0n} = 4{,}0247$ а.е.м. Поскольку $\sum m_1 > \sum m_2$, то реакция идет с выделением тепла. Подставляя числовые данные, получим $Q = 3{,}01$ МэВ.

22.12 Найти энергию Q, выделяющуюся при реакциях: а) ${}^{2}_{1}H + {}^{3}_{1}He \rightarrow {}^{1}_{1}H + {}^{4}_{2}$He; б) ${}^{6}_{3}Li + {}^{2}_{1}H \rightarrow {}^{4}_{2}He + {}^{4}_{2}He$; в) ${}^{6}_{3}Li + {}^{1}_{1}H \rightarrow {}^{3}_{2}He + {}^{4}_{2}He$.

Решение

Изменение энергии при ядерной реакции $Q = c^2 \times \times\left(\sum m_1 - \sum m_2\right)$ (см. задачу 22.10). а) $\sum m_1 = m_{{}^2_1H} + m_{{}^3_2He} = 5{,}0301$ а.е.м., а $\sum m_2 = m_{{}^1_1H} + m_{{}^4_2He} = 5{,}0104$ а.е.м. Поскольку $\sum m_1 > \sum m_2$, то реакция идет с выделением тепла. Подставляя числовые данные, получим $Q = 18{,}5$ МэВ. б) $\sum m_1 = m_{{}^6_3Li} + m_{{}^2_1H} = 8{,}0292$ а.е.м., а $\sum m_2 = m_{{}^4_2He} + m_{{}^4_2He} = 8{,}0052$ а.е.м. Поскольку $\sum m_1 > \sum m_2$, то реакция идет с выделением тепла. Подставляя числовые данные, получим $Q = 22{,}5$ МэВ. в) $\sum m_1 = m_{{}^6_3Li} + m_{{}^1_1H} = 7{,}0229$ а.е.м., а $\sum m_2 = m_{{}^3_2He} + m_{{}^4_2He} = 7{,}0186$ а.е.м. Поскольку $\sum m_1 > \sum m_2$, то реакция идет с выделением тепла. Подставляя числовые данные, получим $Q = 4{,}04$ МэВ.

22.13 Какую массу M воды можно нагреть от 0 °С до кипения, если использовать все тепло, выделяющееся при реакции ${}^{7}_{3}Li(p,a)$, при полном разложении массы m = 1 г лития?

Решение

Напишем уравнение реакции ${}^{7}_{3}Li+{}^{1}_{1}p\rightarrow{}^{4}_{2}\alpha+{}^{4}_{2}\alpha$. Количество тепла, выделяемое при распаде одного ядра, $Q_1=c^2\left(\sum m_1+\sum m_2\right)$. Полная энергия, выделенная при распаде, $Q=NQ_1$ — где $N=\frac{m}{\mu}N_A$ — число ядер ${}^{3}_{7}Li$; $N_A=6{,}023\cdot10^{23}$ моль$^{-1}$ — число Авогадро. Количество тепла, необходимое для нагревания воды, $Q=c_вM\left(t_2-t_1\right)$. По условию все тепло, выделенное при реакции, идет на нагревание воды, поэтому $\frac{m}{\mu}N_Ac^2\left(\sum m_1-\sum m_2\right)=$ $=c_вM\left(t_2-t_1\right)$. Отсюда $M=\frac{mN_Ac^2\left(\sum m_1-\sum m_2\right)}{\mu c_в\left(t_2-t_1\right)}$. Подставляя числовые данные, получим $M=563$ т.

22.14 Написать недостающие обозначения в реакциях: а) ${}^{27}_{13}Al(n,\alpha)x$; б) ${}^{19}_{9}F(p,x){}^{16}_{8}O$; в) ${}^{55}_{25}Mn(x,n){}^{55}_{26}Fe$; г) ${}^{27}_{13}Al(\alpha,p)x$; д) ${}^{14}_{7}N(n,x){}^{14}_{6}C$; е) $x(p,\alpha){}^{22}_{11}Na$.

Решение

а) Запишем уравнение реакции ${}^{27}_{13}Al+{}^{1}_{0}n\rightarrow{}^{24}_{11}x+{}^{4}_{2}\alpha$. Зная заряд ядра, по таблице Менделеева найдем, что x — Na — натрий, отсюда окончательно ${}^{27}_{13}Al(n,\alpha){}^{24}_{11}Na$.

б) Запишем уравнение реакции ${}^{19}_{9}F+{}^{1}_{1}p\rightarrow{}^{16}_{8}O+{}^{4}_{2}x$. Следовательно, x — ${}^{4}_{2}\alpha$, отсюда окончательно ${}^{19}_{9}F(p,\alpha){}^{16}_{8}O$.

в) Запишем уравнение реакции ${}^{55}_{25}Mn+{}^{1}_{1}x\rightarrow{}^{55}_{26}Fe+{}^{1}_{0}n$. Следовательно, x — ${}^{1}_{1}p$, отсюда окончательно ${}^{55}_{25}Mn(p,n){}^{55}_{26}Fe$.

г) Запишем уравнение реакции ${}^{27}_{13}Al+{}^{4}_{2}\alpha\rightarrow{}^{30}_{14}x+{}^{1}_{1}p$. Зная заряд ядра, по таблице Менделеева найдем, что x — Si — кремний, отсюда окончательно ${}^{27}_{13}Al(\alpha,p){}^{30}_{14}Si$.

д) Запишем уравнение реакции ${}^{14}_{7}N+{}^{1}_{0}n\rightarrow{}^{14}_{6}C+{}^{1}_{1}x$. Следовательно, x — ${}^{1}_{1}p$, отсюда окончательно ${}^{14}_{7}N(n,p){}^{14}_{6}C$.

е) Запишем уравнение реакции ${}^{25}_{12}x+{}^{1}_{1}p\rightarrow{}^{22}_{11}Na+{}^{4}_{2}\alpha$. Зная заряд ядра, по таблице Менделеева найдем, что x — Mg — марганец, отсюда окончательно ${}^{27}_{13}Mg(p,\alpha){}^{22}_{11}Na$.

22.15 Найти энергию Q, выделяющуюся при реакции ${}^{7}_{3}Li + {}^{2}_{1}H \to {}^{8}_{4}Be + {}^{1}_{0}n$.

Решение

Изменение энергии при ядерной реакции $Q = c^2 \times \left(\sum m_1 - \sum m_2\right)$ (см. задачу 22.10). В нашем случае $\sum m_1 = m_{{}^7_3Li} + m_{{}^2_1H} = 9{,}0301$ а.е.м., а $\sum m_2 = m_{{}^8_4Be} + m_{{}^1_0n} = 9{,}0140$ а.е.м. Поскольку $\sum m_1 > \sum m_2$, то реакция идет с выделением тепла. Подставляя числовые данные, получим $Q = 15.12$ МэВ.

22.16 Найти энергию Q, выделяющуюся при реакции ${}^{9}_{4}Be + {}^{2}_{1}H \to {}^{10}_{5}Be + {}^{1}_{0}n$.

Решение

Изменение энергии при ядерной реакции $Q = c^2 \times \left(\sum m_1 - \sum m_2\right)$ (см. задачу 22.10). В нашем случае $\sum m_1 = m_{{}^9_4Be} + m_{{}^2_1H} = 11.0263$ а.е.м., а $\sum m_2 = m_{{}^{10}_5Be} + m_{{}^1_0n} = 11{,}0216$ а.е.м. Поскольку $\sum m_1 > \sum m_2$, то реакция идет с выделением тепла. Подставляя числовые данные, получим $Q = 4.42$ МэВ.

22.17 При бомбардировке изотопа азота ${}^{14}_{7}N$ нейтронами получается изотоп углерода ${}^{14}_{6}C$, который оказывается β-активным. Написать уравнения обеих реакций.

Решение

По условию уравнение первой реакции имеет вид ${}^{14}_{7}N + {}^{1}_{0}n \to {}^{14}_{6}C + {}^{1}_{1}x$. Следовательно, x — есть ${}^{1}_{1}p$ и первое уравнение окончательно запишется в виде ${}^{14}_{7}N + {}^{1}_{0}n \to {}^{14}_{6}C + {}^{1}_{1}p$ или ${}^{14}_{7}N(n,p){}^{14}_{6}C$. По условию изотоп ${}^{14}_{6}C$ оказывается β-радиоактивным, т. е. испускает электроны, поэтому ${}^{14}_{6}C \to {}^{0}_{-1}e + {}^{14}_{7}x$. По заряду ядра из таблицы Менделеева найдем, что x — N — азот, отсюда уравнение второй реакции имеет вид ${}^{14}_{6}C \to {}^{0}_{-1}e + {}^{14}_{7}N$.

22.18 При бомбардировке изотопа алюминия ${}^{27}_{13}Al$ α-частицами получается радиоактивный изотоп фосфора ${}^{30}_{15}P$, который затем распадается с выделением позитрона. Написать уравнения обеих реакций. Найти удельную активность a_m изотопа ${}^{30}_{15}P$, если его период полураспада $T_{1/2} = 130$ с.

Решение

По условию уравнение первой реакции имеет вид ${}^{27}_{13}Al + {}^{4}_{2}\alpha \to {}^{30}_{15}p + {}^{1}_{0}x$. Следовательно, x — есть ${}^{1}_{0}n$ и первое уравнение окончательно запишется в виде ${}^{27}_{13}Al + {}^{4}_{2}\alpha \to {}^{30}_{15}p + {}^{1}_{0}n$ или ${}^{27}_{13}Al(\alpha,n){}^{30}_{15}p$. По условию изотоп $^{30}_{15}p$ оказывается радиоактивным и распадается с излучением позитрона, поэтому $^{30}_{15}p \to ^{0}_{+1}e + ^{30}_{16}x$. По заряду ядра из таблицы Менделеева найдем, что x — S — сера, отсюда уравнение второй реакции имеет вид $^{30}_{15}p \to ^{0}_{+1}e + ^{30}_{16}S$. Период полураспада определяется как $T_{1/2} = \frac{ln2}{\lambda}$, отсюда $\lambda = \frac{0,693}{T_{1/2}}$ — постоянная распада. Активностью вещества называется физическая величина $A = \lambda N$, где $N = \frac{m}{\mu}N_A$ — число делящихся ядер. Тогда $A = \frac{0,693mN_A}{T_{1/2}\mu}$. Удельная активность $a_m = \frac{A}{m} = \frac{0,689N_A}{T_{1/2}\mu} = 1,07 \cdot 10^{23}$ Бк/кг.

22.19 При бомбардировке изотопа $^{23}{}_{11}Na$ дейтонами образуется β-радиоактивный изотоп $^{24}{}_{11}Na$. Счетчик β-частиц установлен вблизи препарата, содержащего радиоактивный $^{24}{}_{11}Na$. При первом измерении счетчик дал 170 отбросов за 1 мин, а через сутки — 56 отбросов за 1 мин. Написать уравнения обеих реакций. Найти период полураспада $T_{1/2}$ изотопа $^{24}{}_{11}Na$.

Решение

По условию уравнение первой реакции имеет вид $^{23}_{11}Na + ^{2}_{1}d \to ^{24}_{11}Na + ^{1}_{1}x$. Следовательно, x — есть $^{1}_{1}p$ и первое уравнение окончательно запишется в виде $^{23}_{11}Na + ^{2}_{1}d \to ^{24}_{11}Na + ^{1}_{1}p$ или $^{23}_{11}Nf(d,p)^{24}_{11}Na$. По условию изотоп $^{24}_{11}Na$ оказывается β-радиоактивным, т. е. испускает электроны, поэтому $^{24}_{11}Na \to ^{0}_{-1}e + ^{24}_{10}x$. По заряду ядра из таблицы Менделеева найдем, что x — Ne — неон, отсюда уравнение второй реакции имеет вид $^{24}_{11}Na \to ^{0}_{-1}e + ^{24}_{10}Ne$. По закону радиоактивного распада $N = \frac{N_0}{2t/T_{1/2}}$, отсюда $2\frac{t}{T_{1/2}} = \frac{N_0}{N}$; $\frac{t}{T_{1/2}} = log_2\left(\frac{N_0}{N}\right) = \frac{ln(N_0/N)}{ln2} = \frac{ln(N_0/N)}{0,693}$. Тогда период полураспада $T_{1/2} = \frac{t\,ln2}{ln(N_0/N)} = 14.97$ ч.

22.20 Какая энергия Q_1 выделится, если при реакции ${}^{27}_{13}Al + {}^{4}_{2}He \rightarrow {}^{30}_{14}Si + {}^{1}_{1}H$ подвергаются превращению все ядра, находящиеся в массе $m = 1$ г алюминия? Какую энергию Q_2 надо затратить, чтобы осуществить это превращение, если известно, что при бомбардировке ядра алюминия α-частицами с энергией $W = 8$ МэВ только одна α-частица из $n = 2 \cdot 10^6$ частиц вызывает превращение?

Решение

Энергия, выделяемая при превращении одного ядра алюминия, $Q_0 = c^2\left(\sum m_1 - \sum m_2\right)$. Число ядер алюминия, участвующих в реакции, $N = \frac{m}{\mu}N_A$. Тогда полная энергия, выделяемая при превращении всех ядер, $Q_1 = Q_0 N = \frac{m}{\mu}N_A c^2\left(\sum m_1 - \sum m_2\right)$. Подставляя числовые данные и учитывая, что энергетический эквивалент атомной единицы массы $(1\,а.е.м.)c^2 = 931{,}5$ МэВ, получим: $Q_1 = 5{,}3 \cdot 10^{22}$ МэВ. Т. к. превращение может осуществлять только одна из n частиц, то энергия, необходимая для осуществления превращения всех ядер, $Q_2 = WNn = \frac{WmN_A n}{\mu} = 3{,}57 \cdot 10^{29}$ МэВ. Таким образом, $\frac{Q_2}{Q_1} = 5{,}71 \cdot 10^6$, т. е. чтобы осуществить это превращение, надо затратить энергии приблизительно в 6 млн раз больше, чем выделится при этой реакции.

22.21 При бомбардировке изотопа лития ${}^{6}_{3}Li$ дейтонами (ядрами дейтерия ${}^{2}_{1}H$) образуются две α-частицы. При этом выделяется энергия $Q = 22{,}3$ МэВ. Зная массы дейтона d и α-частицы, найти массу m изотопа лития ${}^{6}_{3}Li$.

Решение

Запишем уравнение реакции ${}^{6}_{3}Li + {}^{2}_{1}d \rightarrow {}^{4}_{2}\alpha + {}^{4}_{2}\alpha$. Количество выделенной энергии $Q = c^2\left[\left(m_{Li} + m_d\right) - 2m_\alpha\right]$; $m_{Li} = \frac{Q}{c^2} - m_d + 2m_\alpha = 6{,}015$ а.е.м.

22.22 Источником энергии солнечного излучения является энергия образования гелия из водорода по следующей циклической реакции: ${}^{12}_{6}C + {}^{1}_{1}H \rightarrow {}^{13}_{7}N \rightarrow {}^{13}_{6}C + {}^{0}_{+1}e$, ${}^{13}_{6}C + {}^{1}_{1}H \rightarrow {}^{14}_{7}N$, ${}^{14}_{7}N + {}^{1}_{1}H \rightarrow {}^{15}_{8}O \rightarrow {}^{15}_{7}N + {}^{0}_{-1}e$, ${}^{13}_{7}N + {}^{1}_{1}H \rightarrow {}^{12}_{6}C + {}^{4}_{2}He$. Какая масса m_1 водорода в единицу времени должна превращаться в гелий? Солнечная постоянная $K = 1{,}37$ кВт/м^2. Принимая, что масса водорода составляет 35% массы Солнца, подсчитать, на какое время t хватит запаса водорода, если излучение Солнца считать постоянным.

Решение

В результате проведенного цикла четыре ядра водорода превращаются в одно ядро гелия. Углерод, ведущий себя как химический катализатор, может использоваться снова.

Изменение энергии при ядерной реакции $Q = c^2 \times \left(\sum m_1 - \sum m_2\right)$. Для цикла реакций $\sum m_1 = 4m_{{}^1_1H} = 4{,}0312$ а.е.м., а $\sum m_2 = 4m_{{}^4_2He} = 4{,}0026$ а.е.м. Поскольку $\sum m_1 > \sum m_2$, то реакция идет с выделением энергии. Подставляя числовые данные, получим $Q = 268{,}66$ МэВ $= 4{,}29 \cdot 10^{-12}$ Дж. С другой стороны, энергия, излучаемая Солнцем в единицу времени, $W_t = 4\pi \langle R \rangle^2 K$ — (1), где $\langle R \rangle = 1{,}495 \cdot 10^{11}$ м — среднее расстояние от Земли до Солнца, K — солнечная постоянная. Число атомов водорода, необходимое для излучения энергии W_t, равно $N = \dfrac{4W_t}{Q}$ — (2). Подставляя (1) в (2), получаем $N = 16\pi \langle R \rangle^2 K$ — (3), тогда необходимая масса водорода в единицу времени равна $M_{Ht} = m_{{}^1_1H} N = \dfrac{16\pi \langle R \rangle^2 K m_{{}^1_1H}}{Q} = 6{,}03 \cdot 10^{11}$ кг. По условию $M_H = 0.35 M_C$ — (4), где $M_C = 2 \cdot 10^{30}$ кг — масса Солнца. Тогда время, на которое хватит запаса водорода, равно $t = \dfrac{M_H}{M_{Ht}}$ — (5). Подставляя (4) в (5), окончательно получаем $t = \dfrac{0{,}35 M_C}{M_{Ht}} = 3{,}7 \cdot 10^{10}$ лет.

22.23 Реакция разложения дейтона γ-лучами: ${}^2_1H + h\nu \to {}^1_1H + {}^1_0n$. Найти массу m нейтрона, если известно, что энергия γ-квантов $W_1 = 2{,}66$ МэВ, а энергия вылетающих протонов, измеренная по производимой ими ионизации, оказалась равной $W_2 = 0{,}22$ МэВ. Энергию нейтрона считать равной энергии протона. Массы дейтона и протона считать известными.

Решение

Запишем уравнение реакции ${}^2_1d + h\nu \to {}^1_1p + {}^1_0n$. Количество тепла, выделенное при реакции, $Q = c^2 \times \left(m_d - (m_p + m_n)\right)$. По закону сохранения энергии $W_1 = 2W_2 - Q$. Подставим Q в закон сохранения энергии $W_1 = 2W_2 - c^2\left(m_d (m_p + m_n)\right)$, откуда $m_n = m_d - m_p - \dfrac{2W_2 - W_1}{c^2}$; $m_n = 1{,}0087$ а.е.м.

22.24 Написать недостающие обозначения в реакциях: *а*) ${}^{27}_{13}Al(\gamma,x){}^{26}_{12}Mg$; б) ${}^{27}_{13}Al(\gamma,n)x$; в) ${}^{63}_{29}Cu(\gamma,x){}^{62}_{29}Cu$; г) $x(\gamma,n){}^{181}_{74}W$.

Решение

а) Уравнение реакции будет иметь следующий вид ${}^{27}_{13}Al + h\nu \rightarrow {}^{26}_{12}Mg + {}^{1}_{1}x$, следовательно, ${}^{1}_{1}x$ — есть ${}^{1}_{1}p$; тогда ${}^{27}_{13}Al(\gamma,p){}^{26}_{12}Mg$. б) Уравнение реакции имеет вид ${}^{27}_{13}Al + h\nu \rightarrow {}^{26}_{13}x + {}^{1}_{0}n$. По заряду ядра с помощью таблицы Менделеева находим, что x — алюминий, тогда ${}^{27}_{13}Al(\gamma,n){}^{26}_{13}Al$. в) Т. к. порядковый номер элемента не изменился, то и не изменился заряд ядра, поэтому x — есть ${}^{1}_{0}n$, значит, ${}^{63}_{29}Cu(\gamma,n){}^{62}_{29}Cu$. г) При излучении нейтрона заряд ядра не меняется (см. б и в), поэтому ${}^{182}_{74}W(\gamma,n){}^{181}_{74}W$.

22.25 Выход реакции образования радиоактивных изотопов можно охарактеризовать либо числом k_1 — отношением числа происшедших актов ядерного превращения к числу бомбардирующих частиц, либо числом k_2 [Бк] — отношением активности полученного продукта к числу единиц, бомбардирующих мишень. Как связаны между собой величины k_1 и k_2?

Решение

Пусть N_1 — число происшедших актов ядерного превращения, N_2 — число бомбардирующих частиц. Тогда $k_1 = \frac{N_1}{N_2}$ — (1); $k_2 = \frac{a}{N_2} = \frac{\lambda N_1}{N_2} = \frac{\ln 2 N_1}{T_{1/2} N_2}$ — (2). Сравнивая выражения (1) и (2), получим $k_2 = \frac{\ln 2}{T_{1/2}} k_1$.

22.26 При бомбардировке ${}^{7}_{3}Li$ протонами образуется радиоактивный изотоп бериллия ${}^{7}_{4}Be$ с периодом полураспада $T_{1/2} = 4{,}67 \cdot 10^6$ с. Найти выход реакции k_1, если известно, что бомбардирующие протоны общим зарядом $q = 1$ мкА·ч вызывают активность полученного препарата $a = 6{,}51 \cdot 10^6$ Бк.

Решение

По определению $k_1 = \frac{N_1}{N_2}$ — (1), где N_1 — число происшедших актов ядерного превращения за некоторый промежуток времени, N_2 — число частиц, бомбардирующих мишень за этот промежуток времени, а $k_2 = \frac{a}{N_2}$ — (3), где a — активность полученного продукта. Суммарный заряд протонов, бомбардирующих мишень, равен $q = eN_2$, откуда $N_2 = \frac{q}{e}$ — (3). Подставляя (3) в (1) и (2), соответственно получаем $k_1 = \dfrac{N_1 e}{q}$ — (4) и $k_2 = \dfrac{ae}{q}$ — (5). Величины k_1 и k_2 связаны между собой соотношением: $k_2 = \dfrac{ln 2}{T_{1/2}} k_1$, где $T_{1/2}$ — период полураспада полученного продукта. тогда $k_1 = \dfrac{T_{1/2}}{ln 2} k_2$ — (6). Подставляя (5) в (6). окончательно получаем $k_1 = \dfrac{aeT_{1/2}}{q\, ln 2} = 2 \cdot 10^{-3} = \dfrac{1}{500}$, значит, только один протон из 500 вызывает реакцию.

22.27 В результате ядерной реакции $^{56}_{26}Fe(p,n)$ образуется радиоактивный изотоп кобальта $^{56}_{27}Co$ с периодом полураспада $T_{1/2}$ = 80 сут. Найти выход реакции k_1, если известно, что бомбардирующие протоны общим зарядом q = 20 мкА·ч вызывают активность полученного препарата $a = 5{,}2 \cdot 10^7$ Бк.

Решение

Выход реакции (см. задачу 22.26) выражается соотношением $k_1 = \dfrac{aeT_{1/2}}{q\, ln 2} = 1{,}15 \cdot 10^{-3}$.

22.28 Источником нейтронов является трубка, содержащая порошок бериллия $^{9}_{4}Be$ и газообразный радон. При реакции α-частиц радона с бериллием возникают нейтроны. Написать реакцию получения нейтронов. Найти массу m радона, введенного в источник при его изготовлении, если известно, что этот источник дает через время t = 5 сут после его изготовления число нейтронов в единицу времени $a_2 = 1{,}2 \cdot 10^6$ с$^{-1}$. Выход реакции k_1 = 1/4000, т.е. только одна α-частица из n = 4000 вызывает реакцию.

Решение

Сразу после изготовления источник дает в единицу времени число распадов $a_1 = \left(\dfrac{\Delta N}{\Delta t}\right)_1 = \lambda N_1$. Через время t число распадов в единицу времени $a_2 = \left(\dfrac{\Delta N}{\Delta t}\right)_2 - \lambda N_2$, где $N_2 = N_1 e^{-\lambda t}$. По условию только одна α-частица из $n = 4000$ вызывает реакцию, тогда число атомов радона, введенного в источник, $N' = nN_1 = \dfrac{nN_2}{e^{-\lambda t}} = nN_2 e^{\lambda t}$. Тогда масса радона $m = \dfrac{\mu N'}{N_A} = \dfrac{\mu}{N_A} nN_2 e^{\lambda t} = \dfrac{\mu n e^{\lambda t} a_2}{N_A \lambda}$. Подставляя числовые данные, получим $m = 2{,}1 \cdot 10^{-9}$ кг.

22.29 Источником нейтронов является трубка. Какое число нейтронов a_2 в единицу времени создают α-частицы, излучаемые радоном с активностью $a_1 = 3{,}7\cdot10^{10}$ Бк, попадая на порошок бериллия? Выход реакции $k_1 = 1/4000$.

Решение

По условию выход реакции $k_1 = \frac{1}{4000}$, значит, только одна α-частица из $n = 4000$ вызывает реакцию. Поскольку активность радона равна $a_1 = 3{,}7\cdot10^{10}$ Бк, то число нейтронов в единицу времени, создаваемое α-частицами, равно $a_2 = \frac{a_1}{n} = a_1 k_1 = 9{,}25\cdot10^6\ \text{с}^{-1}$.

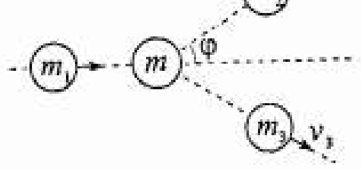
22.30 Реакция образования радиоактивного изотопа углерода $^{11}_{6}C$ имеет вид $^{10}_{5}B(d,n)$, где d-дейтон (ядро дейтерия $^{2}_{1}H$). Период полураспада изотопа $^{11}_{6}$C $T_{1/2} = 20$ мин. Какая энергия Q выделится при этой реакции? Найти выход реакции k_2, если $k_1 = 10^{-8}$.

Решение

Запишем уравнение реакции $^{10}_{5}B + ^{2}_{1}H \to ^{11}_{6}C + ^{1}_{0}n$. Изменение энергии при ядерной реакции $Q = c^2\left(\sum m_1 - \sum m_2\right)$. В нашем случае $\sum m_1 = m_{^{10}_{5}B} + m_{^{2}_{1}H} = 12{,}0270$ а.е.м., а $\sum m_2 = m_{^{11}_{6}C} + m_{^{1}_{0}n} = 12{,}0087$ а.е.м. Поскольку $\sum m_1 > \sum m_2$, то реакция идет с выделением энергии. Подставляя числовые данные, получим $Q = 7{,}12$ МэВ. Величины k_1 и k_2 связаны соотношением $k_2 = \frac{\ln 2}{T_{1/2}} k_1$, отсюда $k_2 = 5{,}78\cdot10^{-12}$ Бк.

22.31 В реакции $^{14}_{7}N(a,p)$ кинетическая энергия α-частицы $W_1 = 7{,}7$ МэВ. Под каким утлом φ к направлению движения α-частицы вылетает протон, если известно, что его кинетическая энергия $W_2 = 8{,}5$ МэВ?

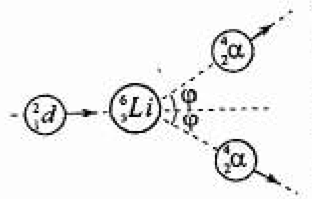
Решение



Обозначим m_1, m_2 и m_3 — массы бомбардирующей α-частицы, протона и ядра отдачи (в нашем случае кислорода); W_1, W_2 и W_3 — их кинетические энергии. Если ядро азота (m) неподвижно, то закон сохранения энергии запишется так: $W_1 + Q = W_2 + W_3$ — (1), где Q — энергия реакции. Закон сохранения импульса в векторной форме имеет вид $\vec{p}_1 = \vec{p}_2 + \vec{p}_3$ — (2). Из (2) имеем для импульсов $p_3^2 = p_1^2 + p_2^2 - 2p_1p_2\cos\varphi$ — (3). Т. к. $p^2 = (mv)^2 = \frac{mv^2}{2}2m = 2mW$ — (4), то уравнение (3) примет вид $2m_3W_3 = 2m_1W_1 + 2m_2W_2 - 2\cos\varphi\sqrt{2m_1W_1 2m_2W_2}$, или $W_3 = \frac{m_1}{m_3}W_1 + \frac{m_2}{m_3}W_2 - \frac{2\cos\varphi}{m_3}\sqrt{m_1m_2W_1W_2}$ — (5). Исключая из (1) и (5) энергию W_3, получим формулу, связывающую кинетическую энергию бомбардирующих α-частиц с кинетической энергией протонов: $W_1\left(\frac{m_3 - m_1}{m_3}\right) + Q = W_2 \times \left(\frac{m_2 + m_3}{m_3}\right) - \frac{2\cos\varphi}{m_3}\sqrt{m_1m_2W_1W_2}$ — (6). Здесь $Q = -1{,}18$ МэВ. Решая (6) относительно $\cos\varphi$ и подставляя числовые данные, найдем $\cos\varphi = \frac{m_2 + m_3}{2}\sqrt{\frac{W_2}{m_1m_2W_1}} - \frac{m_3 - m_1}{2} \times \sqrt{\frac{W_1}{m_1m_2W_2}} - \frac{m_3Q}{2\sqrt{m_1m_2W_1W_2}} = 0{,}849$, или $\varphi = 32°$.

22.32 При бомбардировке изотопа лития ${}^6_3Li$ дейтонами образуются две α-частицы, разлетающиеся симметрично под углом φ к направлению скорости бомбардирующих дейтонов. Какую кинетическую энергию W_2 имеют образующиеся α-частицы, если известно, что энергия бомбардирующих дейтонов $W_1 = 0{,}2$ МэВ? Найти угол φ.

Решение



Запишем уравнение реакции ${}^6_3Li + {}^1_2d \rightarrow {}^4_2\alpha + {}^4_2\alpha$. Т. к. ядра лития покоились, то по закону сохранения энергии $W_1 = 2W_2 - Q$, где $Q = c^2(m_{Li} + m_d - 2m_\alpha)$. Тогда $2W_2 = W_1 + c^2(m_{Li} + m_d - 2m_\alpha)$, отсюда $W_2 = \frac{W_1 + c^2(m_{Li} + m_d - 2m_\alpha)}{2} = 11{,}31$ МэВ. Из механики кинетическая энергия $W_к = \frac{mv^2}{2} = \frac{m^2v^2}{2m} = \frac{p^2}{2m}$, откуда $p^2 = 2mW_к$ или импульс $p = \sqrt{2mW_к}$. Импульсы дейтона и α-частиц будут соответственно равны $p_1 = \sqrt{2m_dW_1}$ и $p_2 = \sqrt{2m_\alpha W_2}$. По закону сохранения импульса $p_1 = 2p_2\cos\varphi$; $\cos\varphi = \frac{p_1}{2p_2} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{m_dW_1}{m_\alpha W_2}} = 0{,}047$, отсюда $\varphi = \arccos(0{,}047) \approx 87{,}3°$.

22.33 Изотоп гелия $^{3}_{2}He$ получается бомбардировкой ядер трития $^{3}_{1}H$ протонами. Написать уравнение реакции. Какая энергия Q выделяется при этой реакции? Найти порог реакции, т. е. минимальную кинетическую энергию бомбардирующей частицы, при которой происходит эта реакция. Указание: учесть, что при пороговом значении кинетической энергии бомбардирующей частицы относительная скорость частиц, возникающих в реакции, равна нулю.

Решение

Запишем уравнение реакции $^{3}_{1}H+^{1}_{1}p\to^{3}_{2}He+^{1}_{0}n$. Энергия, выделяемая при реакции, $Q=c^2\left(\sum m_1-\sum m_2\right)$. Подставляя числовые данные и учитывая, что энергетический эквивалент атомной единицы массы $(1а.е.м.)c^2=931,5$ МэВ, получим $Q=931,5\cdot((3.01605+1,0078)-(3,01603+1,00867))=$ $=-0,79$ МэВ. Т. к. $Q<0$, то реакция эндотермическая, т. е. идет с поглощением энергии и обладает порогом. Если частицы покоятся друг относительно друга, то такая реакция не пойдет. Необходимо, чтобы энергия относительного движения частиц была не меньше $|Q|$, поэтому пороговая энергия определяется соотношением $W_{пор}=\dfrac{p_1^2}{2(m_1+m_2)}+|Q|$, где p_1 — импульс центра инерции системы. С другой стороны, по определению $W_{пор}$ равна кинетической энергии протона: $W_{пор}=\dfrac{p_1^2}{2m_2}$, откуда $p_1^2=2m_2W_{пор}$. Значит, $W_{пор}=\dfrac{2m_2W_{пор}}{2(m_1+m_2)}+|Q|$, откуда $W_{пор}\left(1-\dfrac{m_2}{m_1+m_2}\right)=|Q|$ или $W_{пор}=\dfrac{|Q|(m_1+m_2)}{m_1}=1,04$ МэВ.

22.34 Найти порог W ядерной реакции $^{14}_{7}N(\alpha,p)$.

Решение

Порог ядерной реакции, т. е. минимальная кинетическая энергия бомбардирующей частицы, при которой происходит эта реакция (см. задачу 22.33), выражается соотношением $W=\dfrac{|Q|(m_1+m_2)}{m_1}$. В нашем случае $m_1=m_{^{14}_{7}N}=$ $=14,0031$ а.е.м. — масса покоящегося ядра, $m_2=m_{^{4}_{2}He}=$ $=4,0026$ а.е.м. — масса бомбардирующей частицы. Запишем уравнение реакции: $^{14}_{7}N+^{4}_{2}He\to^{7}_{8}O+^{1}_{1}p$. Изменение энергии при ядерной реакции $Q=c^2\left(\sum m_1-\sum m_2\right)$. В нашем случае $\sum m_1=m_{^{14}_{7}N}+m_{^{4}_{2}He}=18,0057$ а.е.м., а $\sum m_2=m_{^{17}_{8}O}+m_{^{1}_{1}p}=18,0069$ а.е.м. Поскольку $\sum m_1<\sum m_2$, то реакция идет с поглощением энергии. Подставляя числовые данные, получим $Q=-1,13$ МэВ и $W=1,45$ МэВ.

22.35 Найти порог W ядерной реакции ${}^{7}_{3}Li(p,n)$.

Решение

Порог ядерной реакции, т. е. минимальная кинетическая энергия бомбардирующей частицы, при которой происходит эта реакция (см. задачу 22.33), выражается соотношением $W = \frac{|Q|(m_1 + m_2)}{m_1}$. В нашем случае $m_1 = m_{{}^7_3 Li} = 7{,}0160$ а.е.м. — масса покоящегося ядра, $m_2 = m_{{}^1_1 p} = 1{,}0078$ а.е.м. — масса бомбардирующей частицы. Запишем уравнение реакции: ${}^7_3 Li + {}^1_1 p \to {}^7_4 Be + {}^1_0 n$. Изменение энергии при ядерной реакции $Q = c^2\left(\sum m_1 - \sum m_2\right)$. В нашем случае $\sum m_1 = m_{{}^7_3 Li} + m_{{}^1_1 p} = 8{,}0238$ а.е.м., а $\sum m_2 = m_{{}^7_4 Be} + m_{{}^1_0 n} = 8{,}0256$ а.е.м. Поскольку $\sum m_1 < \sum m_2$, то реакция идет с поглощением энергии. Подставляя числовые данные, получим $Q = -1{,}69$ МэВ и $W = 1{,}93$ МэВ.

22.36 Искусственный изотоп азота ${}^{13}_{7}N$ получается бомбардировкой ядер углерода ${}^{12}_{6}C$ дейтонами. Написать уравнение реакции. Найти количество теплоты Q, поглощенное при этой реакции, и порог W этой реакции. Какова суммарная кинетическая энергия W' продуктов этой реакции при пороговом значении кинетической энергии дейтонов? Ядра углерода считать неподвижными.

Решение

Запишем уравнение реакции ${}^{12}_6 C + {}^2_1 d \to {}^{13}_7 N + {}^1_0 n$. Найдем количество тепла $Q = c^2\left[(m_C + m_d) - (m_N + m_n)\right]$;

$Q = 9 \cdot 10^{16}\left[(12 + 2{,}0141) - (13{,}00574 + 1{,}0087)\right] \cdot 1{,}66 \cdot 10^{-27}$;

$Q = -0{,}00507 \cdot 10^{-11}$ Дж $= -0{,}00317 \cdot 10^{-8}$ эВ $= -0{,}317$ МэВ.

Т. к. $Q < 0$, то реакция эндотермическая, т. е. она не пойдет, если частицы покоятся друг относительно друга. Необходимо, чтобы энергия относительного движения частиц была не меньше $|Q|$. Поэтому порог определяется соотношением $W = \frac{p_d^2}{2(m_d + m_C)} + |Q|$. С другой стороны, по определению этот порог равен кинетической энергии дейтона, т. е. $W = \frac{p_d^2}{2m_d}$; $\frac{p_d^2}{2(m_d + m_C)} + |Q| = \frac{p_d^2}{2m_d}$. Т. к. импульс $p_d^2 = 2m_d W$ (см. задачу 22.32), то

$$\frac{2m_d W}{2m_d} - \frac{2m_d W}{2(m_d + m_C)} = |Q|;$$

$$W - \frac{m_d W}{m_d + m_C} = W\left(1 - \frac{m_d}{m_d + m_C}\right) = |Q|;$$

$$W = \frac{|Q|}{1 - m_d/(m_d + m_C)} = \frac{|Q|(m_d + m_C)}{m_d + m_C - m_d} = |Q|\left(\frac{m_d}{m_C} + 1\right)$$

— пороговая энергия. $W = 0{,}317\left(\frac{2{,}0141}{12} + 1\right) = 0{,}37$ МэВ. Суммарная кинетическая энергия продуктов реакции $W' = W + Q = 0{,}37 - 0{,}317 = 0{,}053$ МэВ.

22.37 Реакция $^{10}_{5}B(n,\alpha)$ идет при бомбардировке бора нейтронами, скорость которых очень мала (тепловые нейтроны). Какая энергия Q выделяется при этой реакции? Пренебрегая скоростями нейтронов, найти скорость v и кинетическую энергию W α-частицы. Ядра бора считать неподвижными.

Решение

Запишем уравнение реакции $^{10}_{5}B+^{1}_{0}n\rightarrow^{7}_{3}Li+^{4}_{2}\alpha$. Количество тепла, выделенного при реакции, $Q-c^2\left[(m_B+m_n)+(m_{Li}+m_\alpha)\right]$;

$Q=9\cdot10^{16}\left[(10{,}01294+1{,}0087)-(7{,}016+4{,}0026)\right]\cdot1{,}66\cdot10^{-27}==0{,}0454\cdot10^{-11}$ Дж $Q=2{,}83$ МэВ. Т. к. по условию скоростью нейтронов можно пренебречь, то по закону сохранения импульса $m_{Li}v_{Li}=m_\alpha v_\alpha$, отсюда $v_{Li}=\frac{m_\alpha v_\alpha}{m_{Li}}$. По закону сохранения энергии $Q=W_{Li}+W_\alpha=\frac{m_{Li}v_{Li}^2}{2}+\frac{m_\alpha v_\alpha^2}{2}$;

$2Q=m_\alpha v_\alpha^2\left(\frac{m_\alpha}{m_{Li}}+1\right)$, отсюда $v_\alpha=\sqrt{\frac{2Q}{m_\alpha(m_\alpha/m_{Li}+1)}}$;

$$v_\alpha=\sqrt{\frac{2\cdot0{,}0454\cdot10^{-11}}{4{,}0026\cdot1{,}66\cdot10^{-27}(4{,}0026/7{,}016+1)}}=9{,}33\cdot10^6\text{ м/с.}$$

Кинетическая энергия α-частицы $W_\alpha=\frac{m_\alpha v_\alpha^2}{2}$;

$$W_\alpha=\frac{4{,}0026\cdot1{,}66\cdot10^{-27}\cdot9{,}33^2\cdot10^{12}}{2}=2{,}89\cdot10^{-13}\text{ Дж}=$$
$=1{,}806$ МэВ.

22.38 При бомбардировке изотопа лития $^{7}_{3}Li$ протонами образуются две α-частицы. Энергия каждой α-частицы в момент их образования $W_2=9{,}15$ МэВ. Какова энергия W_1 бомбардирующих протонов?

Решение

Запишем уравнение реакции: $^{7}_{3}Li+^{1}_{1}p\rightarrow^{4}_{2}He+^{4}_{2}He$. Изменение энергии при ядерной реакции $Q=c^2\left(\sum m_1-\sum m_2\right)$. В нашем случае $\sum m_1=m_{^7_3Li}+m_{^1_1p}=8{,}0238$ а.е.м., а $\sum m_2=m_{^4_2He}+m_{^4_2He}=8{,}0052$ а.е.м. Поскольку $\sum m_1>\sum m_2$, то реакция идет с выделением энергии. Подставляя числовые данные, получим $Q-17{,}37$ МэВ. По закону сохранения энергии $W_1+Q=2W_2$, откуда энергия бомбардирующих протонов $W_1=2W_2-Q=0{,}93$ МэВ.

22.39 Найти наименьшую энергию γ-кванта, достаточную для осуществления реакции разложения дейтона γ-лучами ${}^2{}_1H + h\nu \to {}^1{}_1H + {}^1{}_0n$.

Решение

Количество тепла, поглощаемое при реакции $Q = c^2 \times \left(m_{{}^2_1H} - \left(m_{{}^1_1H} + m_n\right)\right) = 9\cdot10^{16}[2{,}0141 - (1{,}00783 + 1{,}0086)] \times 1{,}66\cdot10^{-27} = -0{,}035\cdot10^{-11}$ Дж $= -2{,}175$ МэВ. Для осуществления расщепления необходимо, чтобы γ-квант имел энергию $h\nu \ge |Q|$. В предельном случае при $h\nu = |Q|$ γ-квант расщепит ядро, но не сможет сообщить образовавшимся частицам кинетическую энергию. Значит, $h\nu_{min} = 2{,}175$ МэВ.

22.40 Найти наименьшую энергию γ-кванта, достаточную для осуществления реакции ${}^{24}{}_{12}Mg(\gamma,n)$.

Решение

Запишем уравнение реакции: ${}^{24}_{12}Mg + h\nu \to {}^{23}_{12}Mg + {}^1_0n$. Изменение энергии при ядерной реакции $Q = c^2 \times \left(\sum m_1 - \sum m_2\right)$. В нашем случае $\sum m_1 = m_{{}^{24}_{12}Mg} = 23.9850$ а.е.м., т. к. масса покоя γ-кванта равна нулю, а $\sum m_2 = m_{{}^{23}_{12}Mg} + m_{{}^1_0n} = 24{,}0028$ а.е.м. Поскольку отношение $\sum m_1 < \sum m_2$, то реакция идет с поглощением энергии. Подставляя числовые данные, получим $Q = -16{,}72$ МэВ. Чтобы реакция могла произойти, энергия γ-кванта должна быть больше или равна порогу ядерной реакции, который выражается соотношением $W = \frac{|Q|(m_1 + m_2)}{m_1}$ (см. задачу 22.33). Однако в нашем случае масса покоя γ-кванта $m_2 = 0$, поэтому порог ядерной реакции $W = |Q|$, а следовательно, наименьшая энергия γ-кванта $h\nu = |Q| = 16{,}72$ МэВ.

22.41 Какую энергию W (в киловатт-часах) можно получить от деления массы $m = 1$ г урана ${}^{235}{}_{92}U$, если при каждом акте распада выделяется энергия $Q = 200$ МэВ?

Решение

Число делящихся ядер урана ${}^{235}_{92}U$, содержащееся в определенной массе, равно $N = \frac{m}{\mu}N_A$ — (1), где $\mu = 0{,}235$ кг/моль — молярная масса ${}^{235}_{92}U$, $N_A = 6{,}02 \times 10^{23}$ моль$^{-1}$ — постоянная Авогадро. Энергия, которую можно получить при образовании данной массы ${}^{235}_{92}U$, равна $W = QN$ — (2). Подставляя (1) в (2), получим $W = \frac{m}{\mu}N_A Q = 2{,}28$ кВт·ч.

22.42 Какая масса урана ${}^{235}_{92}U$ расходуется за время t = 1 сут на атомной электростанции мощностью P = 5000 кВт? К.п.д. принять равным 17%. Считать, что при каждом акте распада выделяется энергия Q = 200 МэВ.

Решение

Число распавшихся ядер урана $n = \frac{m}{\mu} N_A$. Полная энергия, выделяемая при распаде массы m урана, $Q_{полн} = Q_0 n = Q_0 \frac{m}{\mu} N_A$. Тогда полезная энергия $Q_{полез} = \eta Q_{полн} = \eta Q_0 \times \frac{m}{\mu} N_A$. Мощность атомной электростанции $p = \frac{Q_{полез}}{t} = \frac{\eta Q_0 m N_A}{\mu t}$. Отсюда масса распавшегося урана за время t

$$m = \frac{p \mu t}{\eta Q_0 N_A} = 31 \text{ г.}$$

22.43 При взрыве водородной бомбы протекает термоядерная реакция образования гелия из дейтерия и трития. Написать уравнение реакции. Найти энергию Q, выделяющуюся при этой реакции. Какую энергию W можно получить при образовании массы m = 1 г гелия?

Решение

Запишем уравнение реакции: ${}^2_1H + {}^3_1H \to {}^4_2He + {}^1_0n$. Изменение энергии при ядерной реакции $Q = c^2\left(\sum m_1 - \sum m_2\right)$.

В нашем случае $\sum m_1 = m_{{}^2_1H} + m_{{}^3_1H} = 5.0301$ а.е.м., а $\sum m_2 = m_{{}^4_2He} + m_{{}^1_0n} = 5{,}0113$ а.е.м. Поскольку $\sum m_1 > \sum m_2$, то реакция идет с выделением энергии. Подставляя числовые данные, получим $Q = 17{,}66$ МэВ. Энергия, которую можно получить при образовании данной массы ${}^4_2He$ (см. задачу 22.41), равна $W = \frac{m}{M} N_A Q = 11{,}8 \cdot 10^4$ кВт·ч.

§ 23. Элементарные частицы. Ускорители частиц

23.1 В ядерной физике принято число заряженных частиц, бомбардирующих мишень, характеризовать их общим зарядом, выраженным в микроампер-часах (мкА·ч). Какому числу заряженных частиц соответствует общий заряд q = 1 мкА·ч? Задачу решить для: а) электронов; б) α-частиц.

Решение

а) Заряд электрона равен $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл, значит, $N = \frac{q}{e} = 2{,}25 \cdot 10^{16}$ электронов. б) Заряд α-частицы равен $2e = 3{,}2 \cdot 10^{-19}$ Кл, значит, $N = \frac{q}{2e} = 1{,}125 \cdot 10^{16}$ α-частиц.

23.2 При упругом центральном столкновении нейтрона с неподвижным ядром замедляющего вещества кинетическая энергия нейтрона уменьшилась в 1,4 раза. Найти массу m ядер замедляющего вещества.

Решение

По закону сохранения энергии $W_{к0} = W_{к1} + W_{к2}$ — (1), где $W_{к0}$ — начальная кинетическая энергия нейтрона, $W_{к1}$ — его кинетическая энергия после взаимодействия с ядром, $W_{к2}$ — кинетическая энергия ядра замедляющего вещества. По условию $\frac{W_{к0}}{W_{к1}} = k = 1{,}4$, отсюда $W_{к0} = kW_{к1}$ — (2) и после подстановки (2) в (1) получаем $(k-1)W_{к1} = W_{к2}$ — (3). По закону сохранения импульса $p_0 = p_2 - p_1$ — (4), где p_0 — начальный импульс нейтрона, p_1 — его импульс после взаимодействия с ядром, p_2 — импульс ядра замедляющего вещества. Кинетическая энергия и импульс связаны между собой соотношением $W_к = \frac{p^2}{2m}$ — (5). Подставляя (5) в (2), получаем $p_0^2 = kp_1^2$ или $p_0 = \sqrt{k}\,p_1$ — (6). Подставляя (6) в (4), получаем $\frac{(k-1)p_1^2}{m_n} = \frac{p_2^2}{m}$ — (8), где $m_n = 1{,}675^{-27}$ кг — масса нейтрона. Решая совместно уравнения (7) и (8), находим массу ядер замедляющего вещества $m = \frac{(\sqrt{k}+1)^2 m_n}{k-1} = 19{,}96 \cdot 10^{-27}$ кг $= 12{,}02$ а.е.м. По таблице Менделеева находим, что это углерод ${}^{12}_{6}C$, следовательно, замедлителем является графит.

23.3 Какую часть первоначальной скорости будет составлять скорость нейтрона после упругого центрального столкновения с неподвижным ядром изотопа $^{23}{}_{11}Na$?

Решение

Масса ядер замедляющего вещества (см. задачу 23.2) равна $m=\frac{\left(\sqrt{k}+1\right)^2 m_n}{k-1}$ — (1), где $k=\frac{W_{к0}}{W_{к1}}$ — (2), $W_{к0}$ и $W_{к1}$ — соответственно начальная и кинетическая энергии бомбардирующего натрия, $m_n=1{,}675\cdot10^{-27}$ кг — масса нейтрона. Поскольку кинетическая энергия равна $W_к=mv^2/2$ — (3), то, подставляя (3) в (2), получаем $k=\left(\frac{v_0}{v}\right)^2$ или $\frac{v_0}{v}=\sqrt{k}$ — (4). Из формулы (1) находим $\sqrt{k}=\frac{m+m_n}{m-m_n}$ — (5). Подставляя (5) в (4), получаем $\frac{v}{v_0}=\frac{m-m_n}{m+m_n}=0{,}916\cdot100\%=91{,}6\%$.

23.4 Для получения медленных нейтронов их пропускают через вещества, содержащие водород (например, парафин). Какую наибольшую часть своей кинетической энергии нейтрон массой m_0может передать: а) протону (масса m_0); б) ядру атома свинца (масса $207m_0$)? Наибольшая часть передаваемой энергии соответствует упругому центральному столкновению.

Решение

По закону сохранения энергии $W_{к0}=W_{к1}+W_{к2}$ — (1), где $W_{к0}$ и $W_{к1}$ — соответственно кинетическая энергия нейтрона до и после взаимодействия с ядром замедлителя, $W_{к2}$ — кинетическая энергия ядра замедляющегося вещества. Если $\frac{W_{к0}}{W_{к1}}=k$ — (2), то из (1) и (2) следует, что $\frac{W_{к2}}{W_{к0}}=1-\frac{1}{k}$ — (3). Поскольку (см. задачу 23.3) $\sqrt{k}=\frac{m+m_0}{m-m_0}$, то $k=\left(\frac{m+m_0}{m-m_0}\right)^2$ — (4). Подставляя (4) в (3), получаем $\frac{W_{к2}}{W_{к0}}=1-\left(\frac{m-m_0}{m+m_0}\right)^2$. а) Для протона $m\approx m_0$, поэтому $\frac{W_{к2}}{W_{к0}}\approx1\cdot100\%=100\%$. б) Для ядра атома свинца $m=207m_0$, поэтому $\frac{W_{к2}}{W_{к0}}=0{,}0191\cdot100\%=19{,}1\%$.

23.5 Найти в предыдущей задаче распределение энергии между нейтроном и протоном, если столкновение неупругое. Нейтрон при каждом столкновении отклоняется в среднем на угол φ = 45°.

Решение

Направление скорости $\vec{v}$ нейтрона и скорости частиц $\vec{v}_1$ показано на рисунке. Скорости частиц одинаковы и равны $v' = \frac{v\sqrt{2}}{2}$. Следовательно, энергия распределится между нейтроном и протоном в среднем поровну.

23.6 Нейтрон, обладающий энергией W_0 = 4,6 МэВ, в результате столкновений с протонами замедляется. Сколько столкновений он должен испытать, чтобы его энергия уменьшилась до W = 0,23 эВ? Нейтрон отклоняется при каждом столкновении в среднем на угол φ = 45°.

Решение

После каждого столкновения кинетическая энергия нейтрона становится в два раза меньше (см. задачу 23.5). Тогда после n столкновений энергия нейтрона $W = \left(\frac{1}{2}\right)^n W_0$.

Отсюда $n\lg 2 = \lg\left(\frac{W_0}{W}\right) = \lg\left(2\cdot 10^7\right)$; $n = \frac{\lg\left(2\cdot 10^7\right)}{\lg 2} = 24$.

23.7 Поток заряженных частиц влетает в однородное магнитное поле с индукцией B = 3 Тл. Скорость частиц $v = 1{,}52\cdot 10^7$ м/с и направлена перпендикулярно к направлению поля. Найти заряд q каждой частицы, если известно, что на нее действует сила $F = 1{,}46\cdot 10^{-11}$ Н.

Решение

В однородном магнитном поле на заряженные частицы действует сила Лоренца, которая равна $F_Л = qvB\sin\alpha$. По условию скорость частиц направлена перпендикулярно направлению поля, значит, $\alpha = \frac{\pi}{2}$, поэтому $\sin\alpha = 1$, а

следовательно, $F_Л = qvB$. Отсюда заряд каждой частицы $q = \frac{F_Л}{vB} = 3{,}2\cdot 10^{-19}$ Кл.

23.8 Заряженная частица влетает в однородное магнитное поле с индукцией $B = 0{,}5$ Тл и движется по окружности с радиусом $R = 10$ см. Скорость частицы $v = 2{,}4\cdot10^6$ м/с. Найти для этой частицы отношение ее заряда к массе.

Решение

В однородном магнитном поле на заряженную частицу действует сила Лоренца, которая (см. задачу 23.7) равна $F_Л = qvB$ — (1). Она является центростремительной силой и сообщает частице нормальное ускорение $a_n = \frac{v^2}{R}$ — (2). По второму закону Ньютона $F_Л = ma_n$ — (3). Подставляя (1) и (2) в (3), получаем $qvB = m\frac{v^2}{R}$, откуда отношение заряда частицы к ее массе равно $\frac{q}{m} = \frac{v}{BR} = 4{,}8\cdot10^7$ Кл/кг.

23.9 Электрон ускорен разностью потенциалов $U = 180$ кВ. Учитывая поправки теории относительности, найти для этого электрона массу m, скорость v, кинетическую энергию W и отношение его заряда к массе. Какова скорость v' этого электрона без учета релятивистской поправки?

Решение

Электрон, ускоренный разностью потенциалов, обладает потенциальной энергией $W_п = eU$ — (1). По закону сохранения энергии $W_п = W_к$ — (2). Приравнивая правые части соотношений (1) и (2), получаем $eU = W_к$ — (3) или $W_к = eU = 2{,}88\cdot10^{-14}$ Дж $= 1{,}8\cdot10^5$ эВ. Зависимость кинетической энергии электрона от скорости его движения дается уравнением $W_к = m_0c^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1\right)$ — (3), где $m_0 = 9{,}11\times$ $\times10^{-31}$ кг — масса покоя электрона, $\beta = \frac{v}{c}$ — (4) — относительная скорость электрона, c — скорость света. Из формулы (3) имеем $\sqrt{1-\beta^2} = \frac{m_0c^2}{W_к + m_0c^2}$ — (5). Зависимость массы электрона от скорости его движения дается уравнением $m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}}$ — (6). Подставляя (5) в (6), получаем $m = \frac{W_к + m_0c^2}{c^2}$ — (7), а затем, подставляя (3) в (7), окончательно находим массу электрона $m = \frac{eU + m_0c^2}{c^2} = 1{,}23\cdot10^{-30}$ кг. Кинетическая энергия электрона $W_к = \frac{mv^2}{2}$, откуда релятивистская скорость электрона $v' = \sqrt{\frac{2eU}{m}} = 2{,}52\cdot10^8$ м/с. Отношение заряда электрона к его массе равно $\frac{e}{m} = 1{,}3\cdot10^{11}$ Кл/кг. Реальное значение равно $\frac{e}{m} = 1{,}759\cdot10^{11}$ Кл/кг. С учетом погрешностей величину, полученную в данной задаче, можно считать допустимой.

23.10 Мезон космических лучей имеет энергию $W = 3$ ГэВ. Энергия покоя мезона $W_0 = 100$ МэВ. Какое расстояние l в атмосфере сможет пройти мезон за время его жизни τ по лабораторным часам? Собственное время жизни мезона $\tau_0 = 2$ мкс.

Решение

Имеем $\frac{W}{W_0} = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = 30$, отсюда найдем $v = 2{,}998 \cdot 10^8$ м/с. Время жизни мезона по лабораторным часам $\tau = \frac{\tau_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = 30\tau_0$. Расстояние, пройденное мезоном за это время, равно $l = v\tau = v \cdot 30\tau_0 \approx 18 \cdot 10^3$ м.

23.11 Мезон космических лучей имеет кинетическую энергию $W = 7m_0c^2$, где m_0 — масса покоя мезона. Во сколько раз собственное время жизни τ_0 мезона меньше времени его жизни τ по лабораторным часам?

Решение

Зависимость кинетической энергии мезона от скорости его движения дается уравнением $W_к = m_0c^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1\right)$ — (1). По условию кинетическая энергия мезона равна $W_к = 7m_0c^2$ — (2). Приравнивая правые части уравнений (1) и (2), получаем $7m_0c^2 = m_0c^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1\right)$, откуда $\sqrt{1-\beta^2} = \frac{1}{8}$ — (3). Время жизни мезона по лабораторным часам τ связано с его собственным временем жизни τ_0 соотношением $\tau = \frac{\tau_0}{\sqrt{1-\beta^2}}$, откуда $\frac{\tau}{\tau_0} = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$ — (4).

Подставляя (3) в (4), получаем $\frac{\tau}{\tau_0} = 8$.

23.12 Позитрон и электрон соединяются, образуя два фотона. Найти энергию $h\nu$ каждого из фотонов, считая, что начальная энергия частиц ничтожно мала. Какова длина волны λ этих фотонов?

Решение

Если электрон и позитрон образуют два фотона, то по закону сохранения энергии $2m_0c^2 + W_1 + W_2 = 2h\nu$, где $2m_0c^2$ — суммарная энергия покоя электрона и позитрона, W_1 и W_2 — кинетические энергии электрона и позитрона, $2h\nu$ — суммарная энергия образовавшихся фотонов. Поскольку по условию начальная энергия частиц W_1 и W_2 ничтожно мала, то энергия каждого из фотонов равна $h\nu = m_0c^2 = 0{,}51$ МэВ. Отсюда частота излучения фотона $\nu = \frac{m_0c^2}{h}$ — (1). С другой стороны, $\nu = \frac{c}{\lambda}$ — (2). Приравнивая правые части уравнений (1) и (2), получаем $\frac{m_0c}{h} = \frac{1}{\lambda}$, откуда длина волны фотонов $\lambda = \frac{h}{m_0c} = 2{,}42 \cdot 10^{-12}$ м.

23.13 Электрон и позитрон образуются фотоном с энергией $h\nu$ = 2,62 МэВ. Какова была в момент возникновения полная кинетическая энергия $W_1 + W_2$ позитрона и электрона?

Решение

По закону сохранения энергии $h\nu = 2m_0c^2 + W_1 + W_2$. Энергия покоя каждой частицы $m_0c^2 = 0{,}51\cdot 10^6$ эВ. Тогда $W_1 + W_2 = h\nu - 2m_0c^2 = 1{,}6\cdot 10^6$ эВ.

23.14 Электрон и позитрон, образованные фотоном с энергией $h\nu$ = 5,7 МэВ, дают в камере Вильсона, помещенной в магнитное поле, траектории с радиусом кривизны R = 3 см. Найти магнитную индукцию В поля.

Решение

На электрон и позитрон в магнитном поле действует сила Лоренца, сообщая им нормальное ускорение, т. е. $qBv = \frac{mv^2}{R}$, откуда $B = \frac{mv}{qR}$ — (1). Согласно теории относительности импульс частицы $p = mv = \frac{1}{c}\sqrt{W(W + 2m_0c^2)}$ — (2). Подставляя (2) в (1), получим $B = \frac{1}{cqR}\sqrt{W(W + 2m_0c^2)}$ — (3). Кинетическая энергия каждой частицы $W = \frac{h\nu - 2m_0c^2}{2} = 2{,}34$ МэВ (см. задачу 23.13). Подставляя числовые данные в (3), получим $B = 0{,}31$ Тл.

23.15 Неподвижный нейтральный π-мезон, распадаясь, превращается в два фотона. Найти энергию $h\nu$ каждого фотона. Масса покоя π-мезона $m_0(\pi) = 264{,}2m_0$, где m_0 - масса покоя электрона.

Решение

Если неподвижный нейтральный π-мезон распадается на два фотона, то по закону сохранения энергии $m_0(\pi)c^2 = 2h\nu$ — (1). По условию масса покоя мезона $m_0(\pi) = 264{,}2m_0$ — (2), где $m_0 = 9{,}11\cdot 10^{-31}$ кг — масса покоя электрона. Подставляя (2) в (1), получаем $h\nu = 132{,}1m_0c^2 = 67{,}7$ МэВ.

23.16 Нейтрон и антинейтрон соединяются, образуя два фотона. Найти энергию $h\nu$ каждого из фотонов, считая, что начальная энергия частиц ничтожно мала.

Решение

Энергия каждого из фотонов (см. задачу 23.12) равна $h\nu = m_0c^2 = 942$ МэВ.

23.17 Неподвижный K^0-мезон распадается на два заряженных π-мезона. Масса покоя K^0-мезона $m_0(K^0) = 965m_0$, где m_0 — масса покоя электрона; масса каждого π-мезона $m(\pi) = 1{,}77m_0(\pi)$, где $m_0(\pi)$ — его масса покоя. Найти массу покоя $m_0(\pi)$ π-мезонов и их скорость v в момент образования.

Решение

Если неподвижный K^0-мезон распадается на два заряженных π-мезона, то по закону сохранения энергии $m_{0K^0}c^2 - 2m_{0\pi}c^2 = 2(m_\pi - m_{0\pi})c^2$ — (1). По условию задачи масса покоя K^0-мезона $m_{0K^0} = 965m_0$ — (2), где $m_0 = 9{,}11 \cdot 10^{-31}$ кг — масса покоя электрона, а масса каждого π-мезона $m_\pi = 1{,}77m_{0\pi}$ — (3), где $m_{0\pi}$ — его масса покоя. Подставляя (2) и (3) в (1), получаем $965m_0c^2 - 2m_{0\pi}c^2 = 2 \cdot 1{,}77m_{0\pi}c^2$. Отсюда масса покоя π-мезонов равна $m_{0\pi} = \dfrac{965m_0}{2 \cdot 1{,}77} = 272{,}59m_0 = 2{,}48 \cdot 10^{-28}$ кг.

Из теории относительности известно, что кинетическая энергия тела зависит от скорости его движения следующим образом: $W_к = m_{0\pi}c^2\left(\dfrac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1\right)$ — (4), где $\beta = \dfrac{v}{c}$ — (5) — относительная скорость. С другой стороны, $W_к - m_\pi c^2$, или, учитывая (3), $W_к = 1{,}77m_{0\pi}c^2$ (6). Приравнивая правые части уравнений (4) и (6), получим $\dfrac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1 = 1{,}77$. Отсюда относительная скорость π-мезонов равна $\beta = 0{,}932$. Тогда, учитывая (5), скорость π-мезонов в момент образования будет равна $v = 0{,}932 \cdot c = 2{,}79 \cdot 10^8$ м/с.

23.18 Вывести формулу, связывающую магнитную индукцию B поля циклотрона и частоту ν приложенной к дуантам разности потенциалов. Найти частоту приложенной к дуантам разности потенциалов для дейтонов, протонов и α-частиц. Магнитная индукция поля B = 1,26 Тл.

Решение

На заряженную частицу в циклотроне действует сила Лоренца $F_Л = qvB\sin\alpha$, где q — заряд частицы, B — индукция магнитного поля. Т. к. $\alpha = \frac{\pi}{2}$, то $\sin\alpha = 1$, отсюда $F_Л = qvB$. Она является центростремительной силой и сообщает частице центростремительное ускорение $a_{ц.с.} = \frac{v^2}{R}$. По второму закону Ньютона $F_Л = ma_{ц.с.} = m\frac{v^2}{R}$. Приравняем правые части уравнений $qvB = \frac{mv^2}{R}$, откуда $R = \frac{mv}{qB}$ — радиус окружности циклотрона. Период обращения циклотрона $T_ц = \frac{L}{v}$, где $L = 2\pi R = \frac{2\pi mv}{qB}$ — длина окружности циклотрона. $T_ц = \frac{2\pi m}{qB}$. Тогда частота $\nu_ц = \frac{1}{T_ц} = \frac{qB}{2\pi m}$. Для того чтобы частица непрерывно ускорялась, необходимо, чтобы она попадала в ускоряющий промежуток между дуантами в тот момент, когда электрическое поле изменит свою полярность, т. е. частота изменения полярности ускоряющего электрического поля должна совпадать с частотой циклотрона: $\nu = \nu_ц = \frac{qB}{2\pi m}$ — условие синхронизации. Подставляя числовые данные, получим $\nu_D = 9{,}7$ МГц; $\nu_p = 19{,}4$ МГц; $\nu_\alpha = 9{,}7$ МГц.

23.19 Вывести формулу, связывающую энергию W вылетающих из циклотрона частиц и максимальный радиус кривизны R траектории частиц. Найти энергию W вылетающих из циклотрона дейтонов, протонов и α-частиц, если максимальный радиус кривизны R = 48,3 см; частота приложенной к дуантам разности потенциалов ν = 12 МГц.

Решение

Радиус окружности циклотрона и частота изменения полярности ускоряющего электрического поля (см. задачу 23.18) равны: $R = \frac{mv}{qB}$ и $\nu = \frac{qB}{2\pi m}$, отсюда $qB = 2\pi m\nu$; $R = \frac{mv}{2\pi m\nu} = \frac{v}{2\pi\nu}$. Отсюда скорость вылетающих из циклотрона частиц $v = 2\pi\nu R$, а их кинетическая энергия $W = \frac{mv^2}{2} = \frac{m4\pi^2\nu^2R^2}{2} = 2\pi^2m\nu^2R^2$. Подставляя числовые данные, получим $W_D = 13{,}8$ МэВ; $W_p = 6{,}9$ МэВ; $W_\alpha = 27{,}6$ МэВ.

23.20 Максимальный радиус кривизны траектории частиц в циклотроне $R = 35$ см; частота приложенной к дуантам разности потенциалов $\nu = 13{,}8$ МГц. Найти магнитную индукцию B поля, необходимого для синхронной работы циклотрона, и максимальную энергию W вылетающих протонов.

Решение

Частота приложенной к дуантам циклотрона разности потенциалов (см. задачу 23.18) определяется соотношением $\nu = \frac{Bq}{2\pi m}$. Отсюда индукция магнитного поля, необходимого для синхронной работы циклотрона, равна $B = \frac{2\pi m\nu}{q}$. Для протона $m = 1{,}673 \cdot 10^{-27}$ кг и $q = e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл, поэтому $B = 0{,}9$ Тл. Максимальная энергия вылетающих из циклотрона заряженных частиц (см. задачу 23.19) равна $W = 2\pi^2 m\nu^2 R^2$. Подставляя значения для протона, получаем $W = 4{,}8$ МэВ.

23.21 Максимальный радиус кривизны траектории частиц в циклотроне $R = 35$ см; частота приложенной к дуантам разности потенциалов $\nu = 13{,}8$ МГц. Найти магнитную индукцию В поля, необходимого для синхронной работы циклотрона, и максимальную энергию W вылетающих: а) дейтонов, б) α-частиц.

Решение

Индукция магнитного поля, необходимого для синхронной работы циклотрона (см. задачу 23.20), равна $B = \frac{2\pi m\nu}{q}$. Максимальная энергия вылетающих из циклотрона заряженных частиц равна $W = 2\pi^2 m\nu^2 R^2$. а) Для дейтонов $q = e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл и $m = 3{,}346 \cdot 10^{-27}$ кг, следовательно, $B = 1{,}8$ Тл и $W = 9{,}6$ МэВ. б) Для α-частиц $q = 2e = 3{,}2 \cdot 10^{-19}$ Кл и $m = 6{,}692 \cdot 10^{-27}$ кг, следовательно, $B = 1{,}8$ Тл и $W = 19{,}25$ МэВ.

23.22 Ионный ток в циклотроне при работе с α-частицами $I = 15$ мкА. Во сколько раз такой циклотрон продуктивнее массы $m = 1$ г радия?

Решение

По определению ионный ток в циклотроне $I = \frac{q}{T} = qn$ — (1), где $q = 3{,}2 \cdot 10^{-19}$ Кл – заряд α-частицы, T — период обращения α -частицы в циклотроне, n — частота излучения α -частиц циклотроном. Активность излучения α -частиц радием равна $a = \lambda N$ — (2), где $N = \frac{m}{\mu} N_A$ — (3) — число делящихся ядер радия, $\mu = 226$ г/моль — молярная масса радия, $N_A = 6{,}022 \cdot 10^{23}$ моль$^{-1}$ — число Авогадро. Период полураспада радия равен $T_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda}$, откуда постоянная распада $\lambda = \frac{\ln 2}{T_{1/2}}$ — (4). Подставляя (3) и (4) в (2), получим $a = \frac{mN_A \ln 2}{\mu T_{1/2}}$ — (5). Из формулы (1) $n = \frac{I}{q}$ — (6). Разделив (6) на (5), окончательно находим $\frac{n}{a} = \frac{I\mu T_{1/2}}{qmN_A \ln 2} = 1270$.

23.23 Максимальный радиус кривизны траектории частиц в циклотроне R = 50 см; магнитная индукция поля B = 1 Тл. Какую постоянную разность потенциалов U должны пройти протоны, чтобы получить такое же ускорение, как в данном циклотроне?

Решение

Частота разности потенциалов, приложенной к дуантам циклотрона (см. задачу 13.18), равна $\nu = \frac{Be}{2\pi m}$ — (1), а энергия вылетающих из циклотрона протонов (см. задачу 23.19) равна $W = 2\pi^2 m \nu^2 R^2$ — (2). Подставляя (1) в (2), получим $W = \frac{B^2 e^2 R^2}{2m}$ — (3). Потенциальная энергия протонов, прошедших ускоряющую разность потенциалов, равна $W_п = eU$ — (4). Чтобы протоны получили такое же ускорение, как в циклотроне, по закону сохранения

энергии необходимо, чтобы $W_п = W$ — (5). Подставляя (3) и (4) в (5), получаем $U = \frac{B^2 e R^2}{2m} = 11{,}98$ МВ.

23.24 Циклотрон дает дейтоны с энергией W = 7 МэB. Магнитная индукция поля циклотрона В = 1,5 Тл. Найти минимальный радиус кривизны R траектории дейтона.

Решение

Энергия дейтонов, вылетающих из циклотрона (см. задачу 23.23), равна $W = \frac{B^2 q^2 R^2}{2m}$. Отсюда максимальный радиус кривизны траектории дейтона равен $R = \frac{\sqrt{2mW}}{Bq} = 36$ см.

23.25 Между дуантами циклотрона радиусом R = 50 см приложена переменная разность потенциалов U = 75 кВ с частотой ν = 10 МГц. Найти магнитную индукцию B поля циклотрона, скорость v и энергию W вылетающих из циклотрона частиц. Какое число оборотов n делает заряженная частица до своего вылета из циклотрона? Задачу решить для дейтонов, протонов и α-частиц.

Решение

Частота разности потенциалов, приложенной к дуантам циклотрона (см. задачу 23.18), равна $\nu = \dfrac{Bq}{2\pi m}$. Отсюда магнитная индукция поля циклотрона равна $B = \dfrac{2\pi m\nu}{q}$ — (1). Энергия вылетающих из циклотрона частиц (см. задачу 23.19) равна $W = 2\pi^2 m\nu^2 R^2$ — (2). Из теории относительности известно, что кинетическая энергия частицы зависит от скорости ее движения следующим образом: $W_к = mc^2\left(\dfrac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1\right)$ — (3). Приравнивая правые части уравнений (2) и (3), получаем $2\pi^2\nu^2R^2 = c^2\left(\dfrac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1\right)$, откуда $\beta = \dfrac{2\pi\nu R\sqrt{\pi^2\nu^2R^2 + c^2}}{2\pi^2\nu^2R^2 + c^2}$ — (4). С другой стороны, относительная скорость $\beta = \dfrac{u}{c}$ — (5). Приравнивая правые части уравнений (4) и (5), находим скорость частиц $u = \dfrac{2\pi\nu Rc\sqrt{\pi^2\nu^2R^2 + c^2}}{2\pi^2\nu^2R^2 + c^2}$ — (6). При каждом полном обороте заряженная частица проходит дважды расстояние между дуантами и, следовательно, дважды получит добавочный импульс. Поэтому при n оборотах заряженная частица приобретает энергию, эквивалентную ускоряющему потенциалу, $U' = 2nU$, где U — разность потенциалов, приложенная между дуантами. Отсюда $n = \dfrac{U'}{2U}$ — (7). Подставляя значения в формулы (1), (2), (6) и (7), получаем следующие числовые значения: а) Для дейтонов: $B_1 = 1{,}3$ Тл; $W_1 = 10{,}2$ МэВ; $u_1 = 3{,}13\cdot10^7$ м/с; $n = 68$. б) Для протонов: $B_1 = 0{,}65$ Тл; $W_1 = 5{,}12$ МэВ; $u_1 = 3{,}13\cdot10^7$ м/с; $n = 34$. в) Для α-частиц: $B_1 = 1{,}3$ Тл; $W_1 = 5{,}12$ МэВ; $u_1 = 3{,}13\cdot10^7$ м/с; $n = 68$.

23.26 До какой энергии W можно ускорить α-частицы в циклотроне, если относительное увеличение массы частицы $k = (m\text{-}m_0)/m_0$ не должно превышать 5%?

Решение

Из теории относительности известно, что изменение массы частицы на Δm соответствует изменению ее энергии на $\Delta W = c^2\Delta m$ — (1). По условию задачи относительное увеличение массы частицы $k = \frac{m - m_0}{m_0} = \frac{\Delta m}{m_0} \le 0.05$ — (2). Считая начальную энергию α-частицы равной нулю, можно предположить, что $W_{max} = \Delta W$ — (3). В этом случае из формулы (2) изменение массы α-частицы равно $\Delta m = 0{,}05 m_0$ — (4). Подставляя (3) и (4) в (1), получаем $W_{max} = 0{,}05 m_0 c^2 = 187$ МэВ.

23.27 Энергия дейтонов, ускоренных синхротроном, $W = 200$ МэВ. Найти для этих дейтонов отношение m/m_0 (где m — масса движущегося дейтона и m_0 — его масса покоя) и скорость v.

Решение

Считая начальную энергию дейтонов равной нулю (см. задачу 23.26), можно предположить, что $W = c^2\Delta m$ — (1), где $\Delta m = m - m_0$ — (2) — изменение массы дейтона. $m_0 = 2{,}0141$ а.е.м. — его масса покоя. Подставляя (2) в (1), получаем $W = c^2(m - m_0)$, откуда $\frac{m}{m_0} = \frac{W}{c^2 m_0} = 1{,}1$. Из теории относительности известно, что масса дейтона зависит от скорости его движения следующим образом $m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}}$, откуда $\frac{m}{m_0} = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$ — (3), где $\beta = \frac{v}{c}$ — (4) — относительная скорость дейтона. Решая совместно уравнения (3) и (4), получаем $v = \frac{c\sqrt{(m/m_0)^2 - 1}}{m/m_0} = 1{,}3\cdot 10^8$ м/с.

23.28 В фазотроне увеличение массы частицы при возрастании ее скорости компенсируется увеличением периода ускоряющего поля. Частота разности потенциалов, подаваемой на дуанты фазотрона, менялась для каждого ускоряющего цикла от $\nu_0 = 25$ МГц до $\nu = 18{,}9$ МГц. Найти магнитную индукцию B поля фазотрона и кинетическую энергию W вылетающих протонов.

Решение

Имеем $B = \frac{2\pi m_0 \nu_0}{q} = \frac{2\pi m \nu}{q} = 1{,}62$ Тл. Поскольку $\frac{\nu_0}{\nu} = \frac{m}{m_0} = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$, то $W = m_0 c^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1\right) = \frac{m_0 c^2(\nu_0 - \nu)}{\nu} = 300$ МэВ.

23.29 Протоны ускоряются в фазотроне до энергии $W = 660$ МэВ, α-частицы — до энергии $W = 840$ МэВ. Для того чтобы скомпенсировать увеличение массы, изменялся период ускоряющего поля фазотрона. Во сколько раз необходимо было изменить период ускоряющего поля фазотрона (для каждого ускоряющего цикла) при работе: а) с протонами; б) с α-частицами?

Решение

В фазотроне при ускорении релятивистских частиц, когда их скорость приближается к скорости света, их масса заметно возрастает. Следовательно, возрастает и период обращения частицы. Чтобы сохранить синхронизацию, увеличивают период ускоряющего поля фазотрона. Начальный и конечный периоды можно найти аналогично, как в циклотроне (см. задачу 12.18): $T_0 = \frac{2\pi m_0}{qB}$; $T = \frac{2\pi m}{qB}$, где m_0 — масса покоя, m — конечная масса. $\frac{T}{T_0} = \frac{2\pi m}{qB}\frac{qB}{2\pi m_0} = \frac{m}{m_0}$. Релятивистская энергия частицы $\varepsilon = mc^2$, где c — скорость света. Энергия покоя $\varepsilon_0 = m_0c^2$. По закону сохранения энергии разность начальной и конечной энергий составит кинетическая энергия, полученная частицей при ускорении фазотроном, $W = \varepsilon - \varepsilon_0 = mc^2 - m_0c^2 = (m - m_0)c^2$, отсюда $m = \frac{W}{c^2} + m_0$.

$\frac{T}{T_0} = \frac{W/c^2 + m_0}{m_0} = \frac{W}{c^2 m_0} + 1$. а) Для протона $W = W_p = 660 \times 10^6 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19} = 1{,}06 \cdot 10^{-10}$ Дж, $\frac{T}{T_0} = 1{,}7$. б) Для α-частицы $W = W_\alpha = 840 \cdot 10^6 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19} = 1{,}34 \cdot 10^{-10}$ Дж, $\frac{T}{T_0} = 1{,}2$.

Контактная информация

info@zzapomni.com

https://vk.com/zzapomni

https://twitter.com/ZZapomni